4° Acad. 78 fa
(math. phys. Kl. 23



<36636657120010 S

<36636657120010

Bayer. Staatsbibliothek

40
Math.-phys. Classe
23
1897

# ABHANDLUNGEN

VIERZIGSTER BAND.

39

560 D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

# ABHANDLUNGEN

## DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.




VIERZIGSTER BAND.

MIT 13 TAFELN UND 55 ABBILDUNGEN.

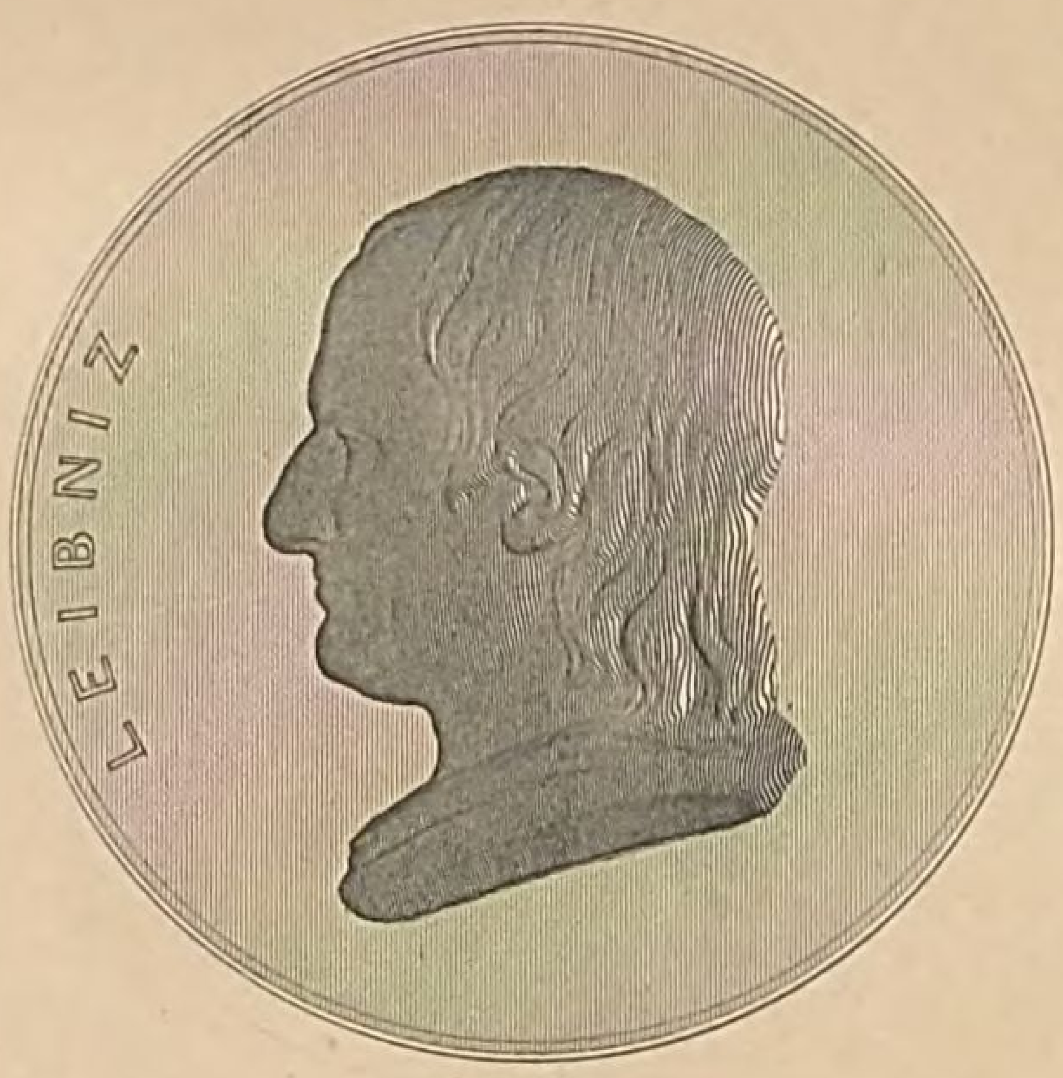
LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1897.

# ABHANDLUNGEN

## DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE
## DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN
## GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.




DREIUNDZWANZIGSTER BAND.

MIT 13 TAFELN UND 55 ABBILDUNGEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1897.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

# INHALT.

P. Drude, Über die anomale elektrische Dispersion von Flüssigkeiten. Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren . . . . . . . . . . . . . . . S. 1

P. Drude, Zur Theorie stehender elektrischer Drahtwellen. Mit 1 Tafel - 59

M. v. Frey, Untersuchungen über die Sinnesfunctionen der menschlichen Haut. Erste Abhandlung: Druckempfindung und Schmerz. Mit 16 Textfiguren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . - 169

O. Fischer, Beiträge zur Muskelstatik. Erste Abhandlung: Ueber das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln am zweigliedrigen System. Mit 7 Tafeln und 21 Textfiguren . . . . . . . . . . - 267

J. Hartmann, Die Beobachtung der Mondfinsternisse. Mit 4 Textfiguren. - 369

O. Fischer, Beiträge zu einer Muskeldynamik. Zweite Abhandlung: Über die Wirkung der Schwere und beliebiger Muskeln auf das zweigliedrige System. Mit 4 Tafeln und 12 Textfiguren . . . . . - 467

ÜBER DIE

# ANOMALE ELEKTRISCHE DISPERSION

VON

# FLÜSSIGKEITEN

VON

**P. DRUDE.**

Des XXIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° I.

MIT EINER TAFEL UND ZWEI TEXTFIGUREN.

**LEIPZIG**

BEI S. HIRZEL

1896.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Das Manuscript eingeliefert am 20. Januar 1896.
Der Abdruck vollendet am 5. Februar 1896.

# ÜBER DIE

# ANOMALE ELEKTRISCHE DISPERSION

VON

# FLÜSSIGKEITEN

VON

**P. DRUDE,**

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MIT EINER TAFEL UND ZWEI TEXTFIGUREN.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Bei der Beschreibung einer Untersuchungsmethode für den elektrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten[1]) hatte ich das auffällige Resultat erwähnt, dass kurze elektrische Wellen (von 70 cm Wellenlänge in Luft) in Alkohol und besonders in Glycerin in viel stärkerem Grade gedämpft werden, als in Wasser, oder in wässrigen Salzlösungen. Dies muss deshalb auffällig erscheinen, weil die Dämpfung elektrischer Wellen in einer Substanz von deren elektrischer Leitfähigkeit abhängen muss in der Weise, dass erstere mit der letzteren zunehmen muss. Nun ist aber die Leitfähigkeit von Glycerin oder Alkohol bei weitem geringer, als die von Wasser oder gar wässrigen Salzlösungen. Trotzdem kann man aber mit Hülfe der damals beschriebenen Methode sehr leicht constatiren, dass Glycerin jene kurzen elektrischen Wellen zweifellos stärker dämpft, als eine etwa 0,8procentige Kupfersulfat-Lösung, deren Leitfähigkeit bei 18° Celsius bezogen auf Quecksilber als Einheit $4700 \cdot 10^{-10}$ ist, während das von mir benutzte Glycerin, wenn es nach der Kohlrausch'schen Methode mit Hülfe eines Inductionsapparates untersucht wird, bei 18° die Leitfähigkeit $2,84 \cdot 10^{-10}$ besitzt. Ich habe jetzt durch die im Folgenden zu beschreibenden Versuche ermittelt, dass eine etwa 5procentige Kupfersulfat-Lösung, deren Leitfähigkeit $17000 \cdot 10^{-10}$ ist, elektrische Wellen der in Luft gemessenen Wellenlänge von 74 cm ebenso stark dämpft, wie Glycerin, nämlich in dem Maasse, dass die Welle sich auf der Strecke von $\frac{3}{2}$ Wellenlängen todt läuft. Die Leitfähigkeiten beider Flüssigkeiten verhalten sich wie 6000 zu 1.

Es kann also vorkommen, dass Substanzen, welche für langsame elektrische Wechselfelder, wie sie z. B. Inductionsapparate erzeugen, im Verhältniss 6000 zu 1 verschieden isoliren, für sehr schnelle elektrische Wechselfelder gleich schlecht isoliren.

---

1) P. Drude, Ber. d. k. sächs. Ges. d. W., math. phys. Cl., 1895, p. 329. — Wied. Ann. 55, 1895, p. 633.

Durch Ausdehnung der Untersuchung auf mehrere Flüssigkeiten habe ich constatirt, dass derartige Auffälligkeiten bei denjenigen Substanzen hohen Molekulargewichtes anzutreffen sind, deren Dielektricitätsconstante stark vom Quadrat des optischen Brechungsexponenten abweicht, welche also nach der Dispersionstheorie Eigenschwingungen besitzen, die langsamer als die des Lichtes sind. Es zeigt sich allemal in diesen Fällen eine zum Theil sehr starke anomale Dispersion und Absorption, d. h. der elektrische Brechungsexponent nimmt mit zunehmender Schwingungszahl ab, die Absorption zu.

Das Molekulargewicht hat jedenfalls einen bedeutenden Einfluss auf die Erscheinung. In der Reihe der Alkohole wird die anomale Absorption und Dispersion für bestimmte Schwingungsgebiete in sehr hohem Grade intensiver, je höher das Molekulargewicht ist, d. h. je complicirter das Molekül gebaut ist. Complicirtere Moleküle der Alkohole besitzen demnach langsamere Eigenschwingungen, als einfachere, und diese mit der chemischen Constitution in so einleuchtendem Zusammenhange stehende Thatsache wird sich vermuthlich auch für andere homologe Reihen bestätigen, welche überhaupt sehr langsame Eigenschwingungen besitzen.

Auch will ich gleich im Voraus bemerken, dass ich für Wasser, in Übereinstimmung mit anderen Beobachtern, keine Dispersion und Absorption habe nachweisen können. Nach den Resultaten, welche ich bei anderen Flüssigkeiten erhalten habe, muss ich vermuthen, dass das niedrige Molekulargewicht des Wassers, d. h. die Kleinheit des Moleküls, die Eigenschwingungen in Gebiete rückt, in deren Nähe man mit den bisherigen experimentellen Hülfsmitteln nicht gelangen konnte. So ist wohl durch die, ich möchte sagen zufällige Kleinheit des Wassermoleküls eine Erscheinung bei den jetzt so zahlreich angestellten Beobachtungen mit elektrischen Wellen entgangen, die für andere Flüssigkeiten ganz evident zu Tage tritt.

Besonders merkwürdig muss es ja erscheinen, dass die Schwingungszahlen von verhältnissmässig noch trägen elektrischen Wellen schon mit den langsamsten Eigenschwingungen von Flüssigkeiten selbst sehr hohen Molekulargewichtes vergleichbar oder gar benachbart werden. Aus diesem Grunde bin ich anfangs sehr skeptisch bei der Deutung dieser Erscheinungen verfahren, als ich

zunächst beim Glycerin und Alkohol starke Absorption bemerkte und für Glycerin nur eine halb so grosse Dielektricitätsconstante erhielt, als sie Thwing[1]) für langsamere Schwingungen gewonnen hat. Ich liess zunächst[2]) die Ursache hierfür offen zwischen den beiden Möglichkeiten, dass jene Flüssigkeiten in der Nähe der von mir benutzten Schwingungen auswählende Absorption besässen, oder dass das Glycerin stark verunreinigt wäre.

Später[3]) habe ich, weil mir auswählende Absorption und anomale Dispersion für die benutzten elektrischen Wellen zu unwahrscheinlich schien, vermuthet, dass ein mangelnder metallischer Contact eines Drahtbügels, welcher die Drähte *DD* überbrückt, längs denen sich die elektrischen Wellen fortpflanzen, Ursache der Dämpfung der Wellen sein könnte. Bei dem zähflüssigen Glycerin drängt sich leicht diese Vorstellung auf. Indess kann ich nicht leugnen, dass schon damals das Verhalten des Alkohols mir sehr wenig dadurch erklärt schien, da in ihm der Bügelcontact doch sicherlich nicht schlechter ist, als im Wasser, welches auf die Wellen keine merkliche Dämpfung ausübt.

Ausserdem kommt es beim Zustandekommen stehender elektrischer Wellen in den Drähten *DD* auf eine wirkliche metallische Berührung des Bügels nicht an, wenn nur durch ihn eine grosse Capacität an die Drähte *DD* angelegt wird. Diesen Schluss ergiebt sowohl die Theorie, als auch das Experiment. Ich habe mich davon überzeugt, dass durch Verschiebung einer fein lackirten Metallscheibe von 5 cm Durchmesser auf den Drähten *DD* in ihnen ebenso intensive stehende elektrische Wellen abgegrenzt werden können, als durch einen übergelegten Metallbügel, nur liegen die Ueberbrückungsstellen, für welche eine über die Drähte *DD* gelegte Vacuumröhre maximales Leuchten aufweist, bei Benutzung der Scheibe und des Bügels verschieden (weil der metallische Contakt einer unendlich grossen Capacität entspricht, die lackirte Scheibe einer endlichen Capacität[4]).

Dass ferner die Dämpfung elektrischer Wellen in den Flüssig-

1) Ch. B. Thwing, Ztschf. f. phys. Chem. 1894, 14, p. 286.

2) P. Drude, Ber. d. k. sächs. Ges. d. W. l. c. p. 342, Anm. 3. — p. 348, Anm. 1.

3) Beim Abdruck des Gesellschaft-Berichtes in Wied. Ann. 55, 1895, p. 646, Anm. 3, — p. 652, Anm. 1.

4) Man kann dieselbe genau berechnen, wenn man die Differenz der Überbrückungsstellen des Bügels und der Scheibe misst.

keiten eine mit ihrer Natur verbundene Erscheinung und nicht eine durch secundäre Umstände, z. B. den Bügelcontact, hervorgerufene ist, erkennt man daraus, dass beim Weiterschieben des Bügels über mehrere, etwa nur zwei halbe Wellenlängen heraus bei demselben Erreger der elektrischen Wellen und denselben Drähten *DD* die Intensität derselben, je nach Natur der Flüssigkeit, in verschiedenem Grade immer mehr und zum Theil sehr stark abnimmt, je weiter der Bügel in die Flüssigkeit hinein geschoben wird. Wenn der Bügel an sich einen schwächenden Einfluss auf die Intensität der an ihm reflectirten Wellen ausübte, so müsste derselbe sich immer gleich bleiben, unabhängig davon, ob der Bügel eine oder mehrere halbe Wellenlängen in der Flüssigkeit abgrenzt.

Wegen der zeitlichen Dämpfung der vom Erreger ausgesandten Wellen müssten zwar auch die stehenden Wellen allmählich an Deutlichkeit verlieren, wenn der Bügel über mehrere halbe Wellenlängen hinaus verschoben wird. Dass aber diese zeitliche Dämpfung bei dem von mir benutzten Erreger sehr gering war, ist daraus zu schliessen, dass der Bügel, falls die Drähte *DD* in Luft oder Wasser liegen, über zahlreiche halbe Wellenlängen hinaus verschoben werden konnte, ohne dass die deutliche Bildung stehender Wellen aufhörte.

Schliesslich habe ich mich beim Glycerin davon überzeugt, dass die Dämpfung der Wellen in ihm ebenso stark war, wenn nicht ein beweglicher Bügel die Drähte *DD* überbrückte, sondern wenn dieselben ein einziges zusammenhängendes Drahtstück von zu variirender Länge bildeten. Die Anordnung ist unten bei der Mittheilung der Resultate für Glycerin näher beschrieben.

Es ist also ausgeschlossen, dass die hier angewandte Messungsmethode durch zufällige störende Nebenumstände falsche Resultate liefert; im Gegentheil stimmen dieselben bei normal sich verhaltenden Flüssigkeiten mit grosser Genauigkeit mit den Resultaten, welche andere Forscher nach anderen Methoden erhalten haben, überein, und überhaupt erweist sich die Präcision der Methode als so gross, wie ich sie ursprünglich nicht für möglich gehalten hatte[1]). Ich werde die Präcision bei Besprechung der einzelnen Resultate angeben.

---

1) Bei der ersten Mittheilung (Ber. d. k. sächs. Ges. d. W. l. c. p. 361, Wied. Ann. l. c. p. 655) habe ich angegeben, dass die Methode die Dielektricitätsconstante

## Beschreibung des Apparates.

Hinsichtlich der Details verweise ich auf die frühere Mittheilung. Ich will hier nur das Wesentliche wiederholen (vgl. die skizzirte Figur 1).

Es sind zwei verschiedene Erreger der elektrischen Wellen und dem entsprechend zwei verschiedene Schwingungsdauern zur Untersuchung angewandt worden. Die Schwingungsdauern verhalten sich etwa wie 1 : 3. Der kleinere Erreger besteht aus zwei halbkreisförmig gebogenen, 3 mm dicken, Drähten *EE*, welche zusammen einen Kreis von 5 cm Durchmesser bilden. An ihrem einen Ende tragen sie

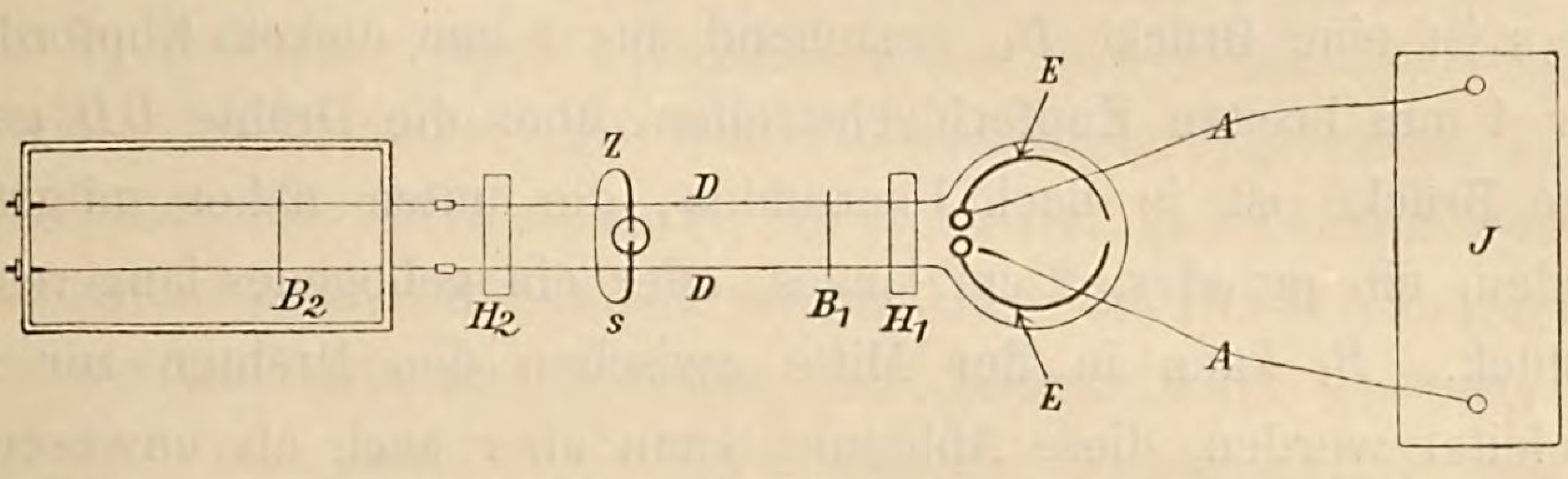



Fig. 1.

zwei Messingkugeln von 5 mm Durchmesser, zwischen denen ein Funkenspiel durch Zuleitung von einem Rhumkorff'schen Inductionsapparate *J* zu Stande gebracht wird. Von diesen Zuleitungsdrähten *AA* liegt der eine metallisch an der einen Entladungskugel, während der andere eine kleine Funkenstrecke[1]) mit der anderen Entladungskugel bildet. Beide Funkenstrecken (letztere und die zwischen den Messingkugeln) sind mikrometrisch verstellbar. Man kann leicht diejenigen Längen der Funkenstrecken ausprobiren, für welche die Intensität und Regelmässigkeit der elektrischen Wellen möglichst gross ist. Bei dem Überschlagen der Funken in Petroleum beträgt die

mit einer Genauigkeit von 2 % zu bestimmen erlaube. Ich habe mich jetzt davon überzeugt, dass sie für Substanzen, die keine starke auswählende Absorption für die benutzten Wellen besitzen, wesentlich höher, oft bis auf $\frac{1}{2}$ %, getrieben werden kann, cf. unten.

1) Diese zweite Funkenstrecke, die ich bei der früheren Anwendung des Apparates (cf. die frühere Mittheilung) nicht anwandte, steigert die Intensität der Wellen ganz ausserordentlich. — Eine dritte Funkenstrecke (zwischen Zuleitung und anderer Entladungskugel) erweist keinen besonderen Vortheil.

wirksamste Länge unter $\frac{1}{2}$ mm. Der Rhumkorff'sche Apparat besitzt einen schnell schwingenden Deprez'schen Unterbrecher[1]. — Der grössere Erreger besteht aus zwei längeren, halbkreisförmigen Kupferdrähten, welche zusammen einen Kreis von 15 cm Durchmesser bilden. Im Übrigen ist der Apparat für diese längeren, wie für jene kürzeren Wellen ganz gleich construirt.

Der Erreger ist nahe (auf 1 mm Distanz) umgeben von einem 1 mm dicken, kreisförmig gebogenen Kupferdraht (Empfänger), der in die beiden Paralleldrähte $DD$ ausläuft, deren Axen 1,8 cm Distanz besitzen. Die Parallelität und Unveränderlichkeit wird durch Einklemmen und Straffspannen durch Ebonithalter $H_1$, $H_2$ an zwei Stellen gesichert. In etwa 10 cm Distanz von den Messingkugeln des Erregers ist eine Brücke $B_1$, bestehend aus 1 mm dickem Kupferdraht, oder 1 mm breiten Kupferblechstreifen, über die Drähte $DD$ gelegt. Diese Brücke ist je nach Umständen, die unten näher mitgetheilt werden, ein gerades, 2 cm langes, oder ein gebogenes längeres Metallstück. $B_1$ kann in der Mitte zwischen den Drähten zur Erde abgeleitet werden, diese Ableitung kann aber auch als unwesentlich fortgelassen werden.

Jenseit $B_1$ kann eine zweite Brücke $B_2$ über den Drähten $DD$ verschoben werden. Bei bestimmten Lagen (Knoten der elektrischen Kraft) von $B_2$ bilden sich intensive stehende elektrische Wellen zwischen $B_1$ und $B_2$, deren Existenz an dem Aufleuchten einer zwischen die Drähte $DD$ gebrachten Zehnder'schen Vacuumröhre $Z$ erkannt wird. Die Glimmelektroden dieser Zehnder'schen Röhre sind durch einen 14,5 bezw. 70 cm langen Kupferdraht $s$ verbunden. Dadurch besitzt die Röhre eine Eigenschwingung, welche in Resonanz steht mit den Schwingungen, welche der kleinere, bezw. grössere Erreger in dem Drahtsystem vor $B_1$ erzeugt. Für die kurzen Wellen (kleinen Erreger) wurde die Zehnder'sche Röhre in der auf die elektrische Kraft reagirenden Lage (vgl. die frühere Mittheilung, Ber. der sächs. Akad. p. 343 — Wied. Ann. p. 647) als Resonator angewandt,

1) Denselben habe ich von KEISER & SCHMIDT in Berlin bezogen. Mit seiner Hülfe werden die Wellen viel deutlicher beobachtbar, als bei Benutzung langsam schwingender Unterbrecher mit Platincontact. — Ich habe auch versucht, den primären Stromkreis des Rhumkorff mit einer Wechselstrommaschine zu speisen, habe aber dann keine Entladungsfunken in Petroleum erzielen können.

d. h. eine Viertel Wellenlänge der (in Luft gemessenen) elektrischen Schwingungen hinter $B_1$ (wie Figur 1 andeutet), — für die längeren Wellen (grossen Erreger) wurde sie als Resonator für die magnetische Kraft benutzt (weil die Gestaltung der Resonatorleitung jene andere Lage verbot) und dem entsprechend lag ihre Drahtleitung dann dicht hinter $B_1$. Die Abstimmung auf Resonanz geschieht dadurch, dass einmal der erweiterte Theil der Zehnder'schen Röhre über $DD$ gelegt wird (welcher keine Eigenschwingungen besitzt), und die halbe Wellenlänge der jenseits $B_1$ erzeugten Schwingungen durch Verschiebung des Bügels $B_2$ abgegriffen wird, und andererseits die Zehnder'sche Röhre in den bezeichneten Lagen als Resonator benutzt wird, und wieder die Wellenlänge durch Fortschieben des Bügels $B_2$ bestimmt wird. Letztere muss, wenn der die Glimmelektroden der Zehnder'schen Röhre verbindende Kupferdraht $s$ die richtige Länge hat, übereinstimmen mit den zuerst gemessenen Wellenlängen; wenn das nicht der Fall ist, so muss die Länge des Kupferdrahtes $s$ etwas geändert werden. Es beeinträchtigt übrigens die Wirkungen nicht merklich, wenn zwischen beiden halben Wellenlängen eine Differenz von etwa 2 % besteht. — Die Eigenschwingung der Zehnder'schen Röhre kann man auch dadurch ermitteln, dass man $B_1$ fortnimmt und nur $B_2$ verschiebt. Es bilden sich allerdings nicht so scharf ausgebildete Maxima und Minima des Leuchtens bei Verschieben von $B_2$. Die so bestimmten Lagen von $B_2$ hängen nur von der Eigenschwingungsdauer der Zehnder'schen Röhre ab, da ohne Bügel $B_1$ der Erreger keine Wellen von scharf ausgeprägter Periode entsendet[1].

Erreger und Empfänger sind in Petroleum (Kaiseröl) eingetaucht, die Drähte $DD$ dagegen verlaufen zwischen beiden Ebonithaltern $H_1$, $H_2$ in Luft. Diese Halter sind fest auf die Tischplatte aufgeschraubt und zwar $H_2$ nahe am Tischrande in der Weise, dass die erste Hauptlage von $B_2$, für welche die Zehnder'sche Röhre maximales Leuchten aufweist (erster Knoten der elektrischen Kraft), jenseit $H_2$ liegt und etwa 8 cm über den Tischrand herausfällt.

1) Es sind nämlich für die Periode derselben nicht nur die Dimensionen des Erregers massgebend, sondern auch die geometrischen Verhältnisse des ihn unmittelbar umgebenden Empfängers, cf. die frühere Mittheilung Ber. d. k. sächs. Ges. d. W. p. 333, Wied. Ann. p. 636.

4 cm hinter $H_2$ tragen die Drähte *DD* sehr kleine, 5 mm lange, 3 mm dicke Klemmschrauben, vermittelst deren man nach Belieben entweder eine 2 m lange Luftleitung, die aus straff und genau parallel gespannten 1 mm dicken Kupferdrähten besteht, anlegen kann, oder eine Drahtleitung, welche einen Trog aus glasirtem Thon durchsetzt, in welchen die zu untersuchenden Flüssigkeiten gegossen werden (in Figur 1 ist letztere Anordnung gezeichnet).

Die Luftleitung liegt 1 m über dem Erdboden, nur an ihrem Ende wird sie von einem, auf einem Stelltisch aufgeschraubten Halter getragen und gespannt. Die Wellen können daher hinter den Klemmschrauben der Drähte *DD* vollkommen ungestört (wie im unendlichen Luftraume) verlaufen, und man erhält durch Messung der Knotenlagen von $B_2$ die wahre Wellenlänge der elektrischen Schwingung in Luft. — Übrigens habe ich mich davon überzeugt, dass nur die unmittelbare Nähe (1 cm) von Holz- oder Metallmassen die Knotenlagen von $B_2$ stört.

Der Thontrog hat 31 cm Länge, 12 cm Höhe, 10 cm Breite im Lichten[1]). Die Wandstärke beträgt 1,1 cm. Die Schmalseiten besitzen je zwei Löcher, welche den Eintritt einer 1 mm dicken Drahtleitung in den Trog ermöglichen. Diese ist durch Korkstopfen in den Löchern auf 1,8 cm Axenabstand festgeklemmt, und wird dadurch straff gespannt, dass an den Vorderenden je ein kleines, 2 mm Durchmesser haltendes Kupferscheibchen festgelöthet ist, welches das Durchziehen durch die Korke der Vorderwand des Troges verhindert, während die Hinterenden an kurze, dickere Messingdrähte angelöthet sind, die die Korke der Hinterwand durchsetzen und Gewinde und Schraubenmutter besitzen. Die Korke der Vorderwand schneiden genau mit der Innenfläche des Troges ab. Die Drahtleitung reicht über die Vorderwand in derartiger Länge (etwa 4 cm) heraus, dass beim Ansetzen dieser Drahtleitung an die Klemmschrauben der Drähte *DD* an der Innenfläche der Vorderwand des Troges, d. h. beim Anfang der Flüssigkeit, bei geeigneter Lage des Bügels $B_1$ genau der

1) Wie unten, bei Besprechung der Fehlerquelle 1 angegeben ist, brauchten die Querdimensionen des Troges nur 3 cm bei 1 cm Drahtabstand zu betragen, ohne Fehler herbeizuführen. Man kann also auch mit dem zehnten Theil der Substanzmengen arbeiten.

erste wahre Knoten (vgl. weiter unten) des Wellenzuges hinter $B_1$ liegt.

Als Bügel $B_2$ ist stets ein gerader, 2 cm langer Kupferdraht gewählt. Er trägt in der Mitte an einem Seidenfaden oder feinem versilberten Kupferdraht eine 12 mm grosse Bleikugel, welche ihm durch seine Schwere guten Contact mit der Drahtleitung sichert. Für die Luftleitung ist der Bügel mit der Hand verschoben, da eine Einstellungsgenauigkeit von 1 mm bei 37 cm Knotenabstand (halber Wellenlänge) vollkommen genügt, für die Leitung des Troges ist eine besondere Einrichtung zur Bügeleinstellung construirt, da bei der

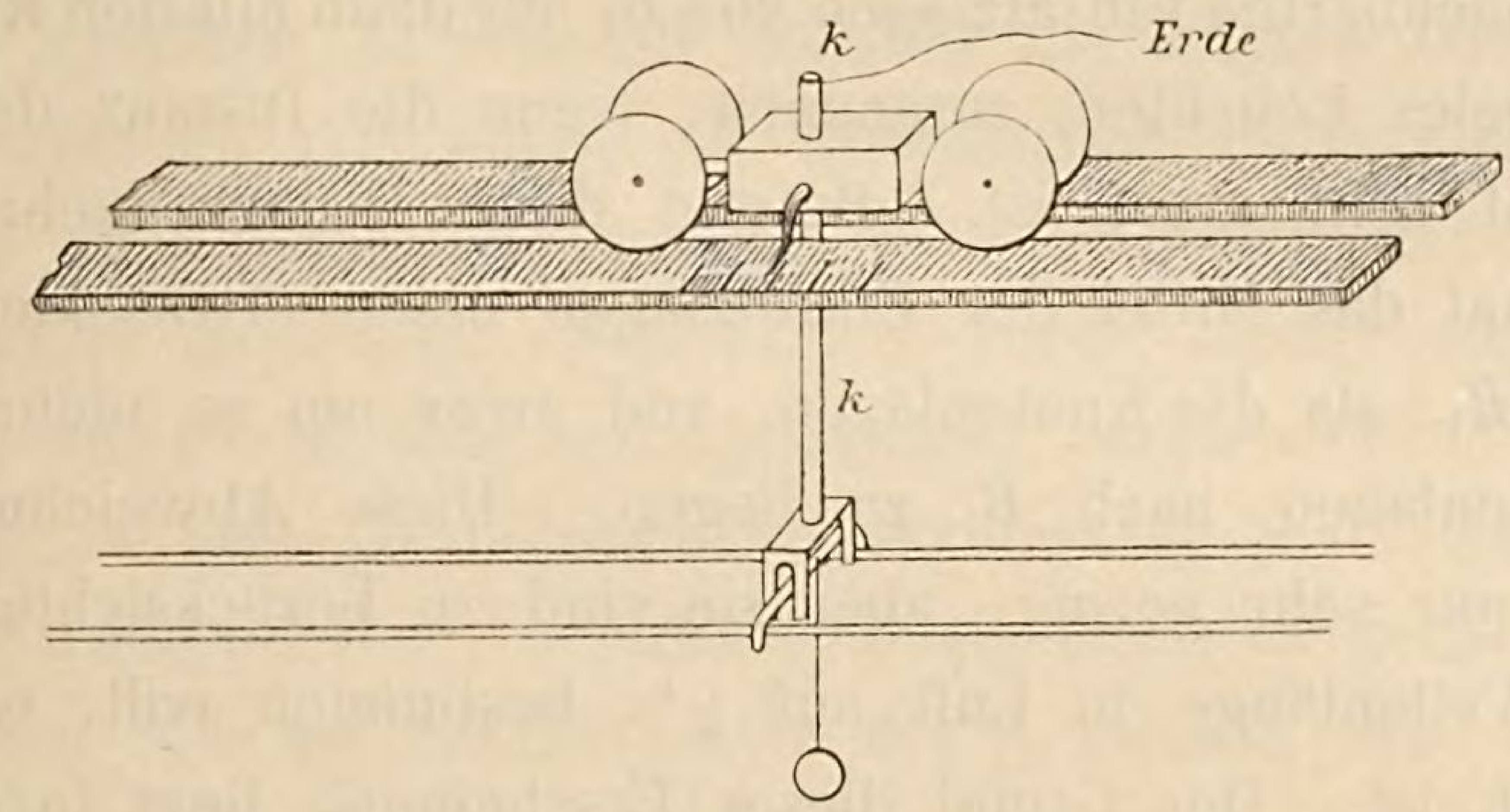



Fig. 2.

kurzen Wellenlänge in einigen Flüssigkeiten (4 cm Knotenabstand im Wasser) der Bügel $B_2$ eine genaue Parallelführung besitzen muss, und seine Lagen auf $\frac{1}{10}$ mm abgelesen werden müssen. Der Bügel $B_2$ passt nämlich knapp in eine, an einem dicken Kupferdraht $k$ (vgl. Figur 2) befestigte Messinggabel, welche dem Bügel $B_2$ nur noch verticale Bewegungen gestattet. Der Kupferdraht $k$ ist mit einem kleinen Wagen befestigt, der auf zwei Metallschienen rollen kann, welche auf der Oberseite des Thontroges befestigt sind. Die eine der Metallschienen ist in mm getheilt. Der Kupferdraht $k$ wird zur Erde abgeleitet.

## Untersuchungsmethode.

### 1. Methode der Leuchtwirkungen.

Die gegenseitigen Abstände der Knoten der elektrischen Kraft in den Drähten $DD$ können durch Ermittelung der Stellungen des Bügels $B_2$ erhalten werden, für welche die Vacuumröhre $Z$ maximales Leuchten aufweist. Bequemer und genauer kann man die Punkte längs $DD$ mit $B_2$ aufsuchen, an welchen das Leuchten von $Z$ gerade eingesetzt, da dieses mit grosser Präcision geschieht. Indess fallen die Mittelwerthe zweier solcher benachbarten Einsatzlagen von $B_2$ nur dann mit den Knotenlagen (für maximales Leuchten) zusammen, wenn die Distanz der Einsetzlagen nicht sehr gross ist. Beträgt diese Distanz mehrere, etwa 8 cm, so hat das Mittel der Einsetzlagen einen etwas kleineren Abstand von $B_1$, als die Knotenlagen, und zwar um so mehr, je näher diese Knotenlagen nach $B_1$ zu liegen. Diese Abweichungen sind allerdings nur sehr gering, aber sie sind zu berücksichtigen, wenn man die Wellenlänge in Luft auf $\frac{1}{4}$ % bestimmen will, was durchaus möglich ist. Der Grund dieser Erscheinung liegt in der, allerdings verhältnissmässig geringen zeitlichen Dämpfung der vom Erreger entsandten Wellen, man kann diese Dämpfung aus Messung jener Differenzen ermitteln[1]). Deshalb wurden zur Ermittelung der Knotenlagen diejenigen Stellungen des Bügels $B_2$ aufgesucht, für welche das Leuchten der Röhre $Z$ von mässiger Stärke in grosse Intensität übergeht (Übergangspunkte). Diese Stellungen liegen nur wenige Centimeter (etwa 2 cm bei 37 cm halber Wellenlänge in Luft) auseinander und ihr Mittel fällt genau zusammen mit den Knotenlagen von $B_2$. Sie lassen sich experimentell sehr bequem und scharf ermitteln.

Wenn die Wellen sehr kurz werden, wie es in manchen Flüssigkeiten (z. B. Wasser, 4 cm Knotenabstand) der Fall ist, so kann man auch die relative Lage der Bäuche der elektrischen Kraft zu den Knoten erhalten als Mittel der zwei Lagen des Bügels $B_2$, für welche das Leuchten der Röhre von $Z$ grade einsetzt, da diese dann sehr

1) Dies soll in späteren theoretischen Betrachtungen geschehen.

nahe bei einander liegen, bezw. (bei starker Dämpfung in den Flüssigkeiten) für welche das Leuchten von $Z$ von geringer Intensität zu grösserer Stärke übergeht. Das Mittel dieser Lagen fällt dann zusammen mit denjenigen Bügelstellungen, für welche die Röhre $Z$, wenn sie überhaupt leuchtet, minimale Lichtentwickelung zeigt.

Die Beobachtung geschah nun in der Weise, dass zunächst an der Luftleitung die Knotenabstände vermittelst $B_2$ aufgesucht wurden. Sodann wurde die Luftleitung aus den Klemmschrauben der Drähte $DD$ gelöst und, ohne etwas an der Stellung des Bügels $B_1$, des Erregers $EE$, oder der Zehnder'schen Röhre $Z$ zu ändern, mit der den Thonkasten durchsetzenden Leitung ausgewechselt. In dem mit Flüssigkeit gefüllten Thonkasten wurden die Knoten bezw. Bäuche durch Verschieben des Bügels $B_2$ symmetrisch hinsichtlich der Zeit durch Hin- und Rückgang ermittelt und beständig die Temperatur der Flüssigkeit gemessen. Schliesslich wurde wieder vorsichtig die Luftleitung an die Drähte $DD$ geklemmt, und wiederum die halbe Wellenlänge in Luft $\frac{1}{2}\lambda$ bestimmt. Letzteres geschah, um sicher zu sein, dass während der Versuchsreihe $\frac{1}{2}\lambda$ constant geblieben wäre. Meistens war $\frac{1}{2}\lambda$ am Schluss etwa 0,1 % kleiner, als am Anfang, was jedenfalls durch die geringe Erwärmung des Petroleumbades des Erregers in Folge der Funken, und dementsprechende Verkleinerung seiner Dielektricitätsconstante verursacht wird. — Bei unverändertem Bügel $B_1$ erwies sich mehrere Tage hinter einander $\frac{1}{2}\lambda$ innerhalb $\frac{1}{2}$% constant. Es ist die Frage, ob die Knotenlagen des Bügels $B_2$ in Luft und Flüssigkeit immer derselben Schwingungsdauer zugehören. Man kann nun bei grösseren Erregern bei fester Lage des Bügels $B_1$ in der That nicht nur die Grundschwingung, sondern auch die harmonischen Oberschwingungen, z. B. sehr gut die Octave, mit dem Bügel $B_2$ abgreifen[1]), dies geht aber nicht mehr, wenn als Indicator eine auf die Grundschwingung als Resonator ab-

1) Bei den vielen Arbeiten, die über die Knotensysteme gemacht worden sind, sind diese einfachsten Verhältnisse nicht gefunden, weil der erste Bügel $B_1$ über der Drahtleitung nicht fest liegen blieb, in der Meinung, dass die Periode nur vom Erreger abhinge. Dies trifft aber auch für die Lecher'sche Anordnung nicht zu. Dort ist die Erregerperiode daraus zu berechnen (dies bestätigen mir auch directe Versuche), dass in einem durch den ersten Bügel $B_1$ abgegrenzten Drahtsystem zwei Capacitäten, die von den gegenüberstehenden Platten des Erregers bezw. des Empfängers gebildet werden, in Reihe hintereinander geschaltet sind.

gestimmte Zehnder'sche Röhre benutzt wird. Auch sind die Oberschwingungen merklich schwächer, so dass sie z. B. beim kleinen Erreger überhaupt nicht wahrnehmbar waren. Ausserdem wird ein Ansprechen auf die Octave völlig vermieden, wenn man die Vacuumröhre auf einen elektrischen Bauch der Grundschwingung legt, da dies ein Knoten der Octave ist.

Je nach Umständen wurde ein grader Bügel $B_1$ gewählt, oder ein gebogener. Letzterer ergiebt grössere Intensität der Wellen hinter $B_1$. Es wurde stets diejenige Bügellänge gewählt, welche der grösstmöglichsten Einstellungsschärfe entsprach (vergl. weiter unten). Gerade für Flüssigkeiten mit starker Dämpfung ist es sehr wichtig, dass man hierdurch ein einfaches Mittel besitzt, die Wellen hinter $B_1$ beliebig in ihrer Intensität zu variiren.

Die Luftwellen wurden mit einem Holzmaassstab gemessen, dessen Theilung nicht genau identisch mit der Theilung der Metallschiene war, auf welcher der Wagen zum Abmessen der Flüssigkeitswellen rollte. Diese Correction war aber nur $\frac{1}{2}$ ‰, und daher als unwesentlich nicht berücksichtigt.

Die Absorption der elektrischen Wellen in der Flüssigkeit kann man dadurch schätzen, dass mit wachsender Absorption die Leuchtintensität der Röhre $Z$ in den Knotenlagen von $B_2$ um so mehr abnehmen muss, je weiter $B_2$ vom Flüssigkeitsanfang entfernt liegt, während die Leuchtintensität in den Bauchstellungen von $B_2$ dadurch allmälich zunehmen muss. Schliesslich, bei einer gewissen Entfernung, die um so weniger Viertel-Wellenlängen umfasst, je stärker das Absorptionsvermögen der Flüssigkeit ist, tritt es ein, dass Knoten- und Bauchstellung von $B_2$ nicht mehr am Leuchten von $Z$ zu unterscheiden ist.

Die beschriebene Erscheinung tritt nun allerdings auch schon ein, wenn auch in sehr geringem Grade, falls der Bügel $B_2$ längs einer langen Luftleitung verschoben wird. Die Luft hat sicher kein Absorptionsvermögen, die Ursache kann hier sowohl in der zeitlichen Dämpfung der vom Erreger entsandten Wellen, als in der Dämpfung in den Metalldrähten $DD$ liegen, da deren Leitfähigkeit nicht eine unendlich grosse ist. Man überzeugt sich leicht, dass erstere Ursache die zweite bei weitem übertrifft. Mit einer Luftleitung von $2\frac{1}{2}$ m Länge von 1 mm dicken Kupferdraht erhält man mit dem

kleinen Erreger sehr gut 7 ausgeprägte (äquidistante) Knotenstellungen des Bügels (ob noch mehr zu erhalten sind, habe ich wegen der Umständlichkeit, die mit der grossen Länge der Luftleitung verbunden ist, nicht geprüft). Wird der 1 mm dicke Kupferdraht ersetzt durch $\frac{1}{2}$ mm dicken, so sind die 7 Knotenstellungen genau ebenso deutlich ausgebildet und kennzeichnen sich durch ebenso starkes Leuchten der Röhre $Z$, wie bei der 1 mm starken Leitung. Dies zeigt, dass keine merkliche Dämpfung der Wellen in den Drähten wegen ihres galvanischen Widerstandes vorhanden ist, denn sonst müsste sich die dickere Leitung merklich günstiger erweisen, als die dünnere.

Man erhält also durch Beobachtung des Leuchtens in den Knotenstellungen der Luftleitung ein Bild von der zeitlichen Dämpfung der Wellen. Am besten und bequemsten ist dasselbe zu erhalten, wenn man diese Beobachtungen macht, während die Drähte $DD$ hinter dem ersten Knoten von destillirtem Wasser umgeben sind. Das Wasser hat bis zu den kleinsten der benutzten Wellen sicher keine anomale Dispersion und auswählende Absorption, die Absorption der Wellen ist demnach theoretisch aus dem nach gewöhnlichen Methoden zu entnehmenden elektrischen Leitvermögen des Wassers zu berechnen. Die Berechnung zeigt, dass für die Wellen des kleinen Erregers ($\frac{1}{2}\lambda = 37$ cm) die Absorption in destillirtem Wasser (Leitfähigkeit $K = 7 \cdot 10^{-10}$ bezogen auf Quecksilber) und selbst gewöhnlichem Leitungswasser ($K = 180 \cdot 10^{-10}$) vollkommen zu vernachlässigen ist. Der Theorie entsprechend sind daher die stehenden Wellen im Wasser ebenso gut ausgebildet, als in Luft, vielleicht sind sie sogar für destillirtes Wasser noch etwas deutlicher, als für Luft, da wegen der kürzeren Wellenlänge im Wasser die Dämpfung durch die endliche Leitfähigkeit der Kupferdrähte noch weniger beeinflusst werden kann, als in Luft.

Mit einem genügend langen Troge (50 cm lang) kann man nun in der That 12 Knotenlagen des Bügels $B_2$ noch gut erkennen[1]; in dem meist benutzten 30 cm langen Troge sind alle innerhalb des-

---

1) Dies Resultat ist unabhängig davon, ob das Petroleumbad des Erregers (cf. oben pag. 9) erneuert wird, und vom Putzen der Erregerkugeln, was übrigens wochenlang nicht nöthig ist. — Die zeitliche Dämpfung der Erregerwellen hängt also hiervon nicht ab.

selben fallenden Knotenlagen (7, exclusive der ersten Knotenlage an der Vorderwand) sehr gut zu erkennen, selbst mit Wasser der Leitfähigkeit $360 \cdot 10^{-10}$.

Ebenso normal, wie reines Wasser, verhalten sich wässrige Salzlösungen. Lösungen von Kupfersulfat und Kochsalz in destillirtem Wasser zeigen eine Absorption, die nur von ihrer für constante Ströme oder Ströme langsamer Wechselzahl stattfindenden Leitfähigkeit abhängt. Die Natur des Salzes bedingt also keinerlei Einfluss[2]. Man ist daher berechtigt, die Absorption der elektrischen Wellen in wässrigen Salzlösungen aus der für Ströme langsamer Wechselzahl stattfindenden Leitfähigkeit zu berechnen, und ist dadurch in den Stand gesetzt, die Absorptionscoëfficienten anderer Flüssigkeiten mit anomaler Absorption theoretisch zu berechnen, wenn man feststellt, mit welcher wässrigen Salzlösung sie für die betreffende Schwingungsdauer gleiche Absorption besitzen. Es ist dabei von Werth, dass die zeitliche Dämpfung der Wellen aus dem Verhalten in reinem Wasser zu entnehmen ist. Die Rechnung soll in einem nachfolgenden theoretischen Theile durchgeführt werden. Hier möchte ich nur mittheilen, wie gross die Absorption für sehr hohe Leitfähigkeiten wässriger Kupfersulfatlösungen ist, um dies als Maassstab für die Absorptionscoëfficienten anomal sich verhaltender Flüssigkeiten später benutzen zu können. Im Folgenden bedeutet $K$ die nach der KOHLRAUSCH'schen Methode mit Inductorium, Telephon und gut platinirten Platinelektroden ermittelte Leitfähigkeit, bezogen auf Quecksilber. $+++$ bedeutet, dass die Einstellungen sehr gut gemacht werden können (in Knotenlage intensives Leuchten der Vacuumröhre, in Bauchlage vollständige Dunkelheit), $++$ bedeutet, dass der Knoten bezw. Bauch noch deutlich zu erkennen ist, aber weniger scharf

2) Dies findet auch hinsichtlich der Wellenlänge statt. Mit welcher Genauigkeit die Methode die Unabhängigkeit der Dielektricitätsconstante wässriger Lösungen von ihrer Leitfähigkeit bei den benutzten Wellen erweist, werde ich an anderer Stelle mittheilen. — Die verhältnissmässig noch starke Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante wässriger Kochsalzlösungen, die COHN, Wied. Ann. 45, p. 371, 1892, für Wellen der Länge 6 m in Luft angiebt, habe ich für diese achtmal schneller schwingenden Wellen jedenfalls nicht annähernd erhalten. — Beim Lesen der Correctur erhalte ich Kenntniss von einer soeben erschienenen Arbeit von P. ZEEMANN (Commun. fr. the Lab. of Phys. at the Univ. of Leiden, Nr. 22), welche bestätigt, dass die Dämpfung von der Natur des gelösten Salzes nicht abhängt.

ausgeprägt ist, als vorhin, + bedeutet, dass der Knoten bezw. Bauch nur noch sehr schwer zu erkennen ist, — bedeutet, dass er nicht mehr zu erkennen ist.

In der Tabelle ist die Einstellung für den in den Flüssigkeitsanfang fallenden Knoten nicht mit angeführt, da bei seiner Überbrückung die Vacuumröhre selbstverständlich immer gleich intensiv leuchtet.

$\frac{1}{2}\lambda$ bedeutet die halbe Wellenlänge (Knotenabstand) der Schwingungen, falls man sie mit der Luftleitung misst. In den Lösungen betrug die halbe Wellenlänge unabhängig von $K$ nahezu den neunten Theil von $\frac{1}{2}\lambda$. Für die kurzen Wellen ist ein gerader Bügel $B_1$ benutzt worden, für die langen ein gebogener Bügel $B_1$ von 4 cm Länge[1]. Die Temperatur war bei diesen Beobachtungen dieselbe, wie bei Ermittelung des $K$ (17° Celsius).

Kleiner Erreger. $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}2$ cm.

| $K$ | 1. Bauch | 1. Knoten | 2. Bauch | 2. Knoten | 3. Bauch |
|---|---|---|---|---|---|
| $6070 \cdot 10^{-10}$ | +++ | +++ | ++ | + | — |
| $8260 \cdot 10^{-10}$ | +++ | ++ | + | — | — |
| $10000 \cdot 10^{-10}$ | ++ | + | — | — | — |
| $17000 \cdot 10^{-10}$ | + | + | — | — | — |
| $21300 \cdot 10^{-10}$ | + | — | — | — | — |

Grosser Erreger. $\frac{1}{2}\lambda = 100$ cm.

| $K$ | 1. Bauch | 1. Knoten | 2. Bauch | 2. Knoten | 3. Bauch |
|---|---|---|---|---|---|
| $2000 \cdot 10^{-10}$ | +++ | +++ | ++ | + | — |
| $3400 \cdot 10^{-10}$ | ++ | + | — | — | — |
| $4480 \cdot 10^{-10}$ | ++ | + | — | — | — |
| $6070 \cdot 10^{-10}$ | + | — | — | — | — |

1) Die Bügellänge ist so zu wählen, dass, falls $B_2$ soweit in die Flüssigkeit geschoben wird, dass die an ihm reflectirten Wellen keinen Einfluss auf das Leuchten der Röhre haben können, dieselbe gerade noch schwach und gleichmässig leuchtet. — Hierauf ist bei der Bestimmung der Absorption anderer Flüssigkeiten auch stets geachtet worden.

Wie aus den Tabellen ersichtlich, sind die Werthe von $K$, welche ungefähr die gleiche Anzahl Einstellungen erlauben, nahezu umgekehrt proportional zu $\lambda$. Dieses Gesetz folgt auch aus der Theorie, da nach ihr[1]) das Verhältniss der Intensität der Leitungsströme zu der der MAXWELL'schen Verschiebungsströme proportional dem Product der Leitfähigkeit in die Wellenlänge ist[2]). — Bei Herstellung von Wellen der Grösse $\frac{1}{2}\lambda = 6$ cm, welche man mit Drahtwellen (vergl. meine frühere Mittheilung), oder der Grösse $\frac{1}{2}\lambda = 0{,}6$ cm, welche man nach LEBEDEW[3]) mit Luftwellen erzielen kann, müsste man demnach noch Substanzen der Leitfähigkeit $K = 12 \cdot 10^{-6}$ bezw. $1 \cdot 10^{-4}$ auf Bildung stehender Wellen hin untersuchen können. — Es ist zu bemerken, dass für eine Flüssigkeit, welche noch den ersten Bauch, nicht mehr den ersten Knoten zu ermitteln erlaubt, die Welle (wegen der Reflexion am Bügel) erst nach Durcheilen einer ganzen Wellenlänge todt sein muss.

## 2. Widerstandsmethode.

An Stelle der Leuchtintensität in der Vacuumröhre kann man[4]) gut die Messung des galvanischen Widerstandes ihres luminiscirenden Gasraumes benutzen zur Abschätzung der Intensität der elektrischen Kraft an der Vacuumröhre, wenn der Bügel $B_2$ auf der Drahtleitung verschoben wird. Man erzielt dadurch den Vortheil, dass man so in gewisser Weise das Bild der Welle längs der ganzen

---

1) Vgl. P. DRUDE, Phys. d. Aethers, p. 549.

2) E. COHN hat Wied. Ann. 45, p. 370, 1892, für Wellen, deren $\frac{1}{2}\lambda = 292$ cm betrug, NaCl-Lösungen der Leitfähigkeit $500 \cdot 10^{-10}$ untersuchen können. Nach der COHN'schen Methode musste die Flüssigkeit die Ermittelung eines ersten Knotens gestatten. Nach den hier angegebenen Resultaten müsste der obere Grenzwerth von $K$ für solche Wellen etwa $1000 \cdot 10^{-10}$ sein, was mit dem COHN'schen Resultat insofern ganz gut stimmt, als die zeitliche Dämpfung der von dem hier benutzten Erreger ausgesandten Wellen wahrscheinlich kleiner ist, als beim Erreger, den COHN benutzt hat. cf. P. DRUDE, Wied. Ann. 55, pag. 635, 1885.

3) P. LEBEDEW, Wied. Ann. 56, p. 1, 1895.

4) P. DRUDE, Wied. Ann. 53, p. 761, 1894.

Drahtleitung erhalten kann. Da der Widerstand der luminiscirenden Gasstrecke sehr hoch ist (Millionen Ohm), so verwendet man zu seiner Messung passend ein Elektrometer, anstatt eines Galvanometers. Die Versuchsanordnung war ganz ähnlich, wie ich sie früher (l. c., vergl. dort das Detail) für Luftwellen angewandt und beschrieben habe. Es wurden zwei als Resonatoren gleich abgestimmte Zehndersche Röhren $Z_1$ und $Z_2$ angewandt, von denen $Z_1$ in der im Vorigen benutzten Lage hinter $B_1$ lag, während $Z_2$ dicht vor $B_1$ lag und als Reagens auf die magnetische Kraft angewandt wurde. $Z_2$ diente als Standard-Röhre für die Erregerschwingungen, der Widerstand von $Z_1$ wurde durch ein Thomson'sches Quadrant-Elektrometer mit dem Widerstand von $Z_2$ bei verschiedenen Bügellagen $B_2$ verglichen. Die Nadel des Elektrometers wurde, falls $Z_1$ gut leuchtet, während $Z_2$ (durch Entfernung von der Drahtleitung $DD$) dunkel bleibt, zum Potential von 167 Kupfer-Zink-Elementen, die in Leitungswasser tauchten, geladen. Wenn dagegen $Z_1$ dunkel ist und $Z_2$ leuchtet (was es in seiner bei den Versuchen benutzten Lage vor $B_1$ immer thut), so war das Nadelpotential durch Leitung über $Z_2$ gleich Null. Die Quadranten des Elektrometers waren zur Potentialdifferenz von 3 Kupfer-Zink-Elementen geladen.

Bei vollkommener Dunkelheit von $Z_1$ hätte die Elektrometernadel keinen Ausschlag bei Ingangsetzen des Inductoriums $J$ zeigen dürfen. Trotzdem fand ein solcher statt, weil die auf Zuleitungsdrähten $AA$ vorhandenen elektrostatischen Ladungen auf die Elektrometerzuleitung wirkten. Dieser Ausschlag ist bestimmt, indem unmittelbar vor oder hinter $Z_1$ ein Bügel $B_2$ aufgelegt wurde. $Z_1$ leuchtet dann gar nicht. Dieser Ausschlag ist als Nullpunkt von den bei anderen Bügelstellungen $B_2$ erhaltenen Ausschlägen in Abzug gebracht. Es wurden immer die Ausschläge von der Ruhelage aus beobachtet, und für jede Lage des Bügels $B_2$ das Mittel aus drei Ausschlägen genommen. Die Beobachtungen wurden der Zeit nach symmetrisch angestellt, und das Mittel aus den beim Hin- und Rückgang des Bügels erhaltenen Ausschlägen genommen.

Folgende Tabelle enthält die Resultate, wie sie mit dem kleinen Erreger ($\frac{1}{2}\lambda$ in Luft 36,8 cm) für reines Wasser, Lösungen von Kupfersulfat und Chlornatrium und Glycerin bei 18° Celsius erhalten sind. $d$ bedeutet die Entfernung des Bügels vom Flüssigkeitsanfang

in Centimetern, $a$ die Elektrometerausschläge (Differenz der Ausschläge gegen den Nullausschlag, vergl. oben) in Millimetern der mit dem Elektrometerspiegel in 2 m Entfernung beobachteten Scala, und zwar

$a_1$ für destillirtes Wasser $K = 7 \cdot 10^{-10}$
$a_2$ für $CuSO_4 + aq.$ $K = 880 \cdot 10^{-10}$
$a_3$ für $NaCl + aq.$ $K = 922 \cdot 10^{-10}$
$a_4$ für $NaCl + aq.$ $K = 4550 \cdot 10^{-10}$
$a_5$ für $CuSO_4 + aq.$ $K = 4730 \cdot 10^{-10}$
$a_6$ für $CuSO_4 + aq.$ $K = 14200 \cdot 10^{-10}$
$a_7$ für $CuSO_4 + aq.$ $K = 20000 \cdot 10^{-10}$
$a_8$ für Glycerin $K = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$.

| $d$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 239 | 217 | 225 | 217 | 184 | 180 | 188 | 170 |
| 0,5 | 226 | — | 202 | 212 | 182 | 171 | 162 | — |
| 1,0 | 119 | — | 128 | 146 | 173 | 148 | 142 | 178 |
| 1,5 | 2 | 101 | 27 | 73 | 109 | 130 | 117 | — |
| 1,8 | — | 56 | — | — | 72 | 125 | 117 | — |
| 2,0 | 83 | 82 | 39 | 66 | 67 | 132 | 128 | 110 |
| 2,5 | 89 | 105 | 42 | 87 | 92 | 134 | 137 | — |
| 3,0 | 147 | 162 | 79 | 118 | 122 | 153 | 150 | 73 |
| 3,5 | 190 | 176 | 141 | 135 | 139 | 157 | 146 | — |
| 4,0 | 211 | 198 | 165 | 142 | 148 | 150 | 146 | 73 |
| 4,5 | 208 | 192 | 170 | 143 | 142 | 158 | 148 | — |
| 5,0 | 174 | 173 | 116 | 122 | 136 | 149 | 143 | 92 |
| 5,5 | 78 | 124 | 49 | 96 | 119 | 150 | — | — |
| 6,0 | 38 | 50 | 13 | 90 | 115 | — | — | 96 |
| 6,5 | 92 | 93 | 47 | 92 | 123 | — | — | — |
| 7,0 | 122 | 143 | 87 | 104 | 121 | — | — | 104 |
| 7,5 | 168 | 161 | 111 | 126 | 134 | — | ohne $B_2$ | — |
| 8,0 | 183 | 180 | 149 | 132 | 134 | — | 146 | 100 |
| 8,5 | 186 | 171 | 129 | 130 | 146 | — | — | — |
| 9,0 | 157 | 163 | 120 | 130 | 145 | — | — | 101 |
| 9,5 | 122 | 143 | 68 | 114 | 141 | — | — | — |
| 10,0 | 49 | 102 | 39 | 109 | 138 | — | — | 109 |
| 10,5 | 51 | 93 | 28 | 112 | — | — | — | — |
| 11,0 | 106 | 118 | 57 | 106 | — | — | — | — |
| 11,5 | 147 | 137 | 77 | 111 | — | — | — | — |
| 12,0 | 167 | 174 | 91 | 112 | — | — | — | — |
| 12,5 | 174 | 145 | 104 | — | — | — | — | — |

| $d$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13,0 | 166 | 155 | 95 | 125 | — | — | — | — |
| 13,5 | 139 | 136 | 80 | 118 | — | — | — | — |
| 14,0 | 95 | 105 | 45 | — | — | — | — | — |
| 14,5 | 58 | 80 | 42 | 116 | — | — | — | — |
| 15,0 | 92 | 92 | 52 | — | — | — | — | — |
| 15,5 | 123 | 121 | 71 | — | — | — | — | — |
| 16,0 | 159 | 146 | 92 | — | — | — | — | — |
| 16,5 | 168 | 147 | 99 | — | — | — | — | — |
| 17,0 | 166 | 137 | 103 | — | — | — | — | — |
| 17,5 | 154 | 124 | 103 | — | — | — | — | — |
| 18,0 | 109 | 105 | 75 | — | — | — | — | — |
| 18,5 | 100 | 80 | 53 | — | — | — | — | — |

Die Resultate der Tabelle sind in den Curven der Tafel I graphisch dargestellt. Die Abscissen sind die Entfernung $d$ der Brücke $B_2$ in natürlicher Grösse, die Curven stellen daher die in der Flüssigkeit fortgepflanzten elektrischen Wellen hinsichtlich der Lage ihrer Knoten und Bäuche in natürlicher Grösse quantitativ, hinsichtlich ihrer Absorption qualitativ dar. Die Ordinaten sind die Elektrometerausschläge $a$, von den stark in der Tafel gezeichneten geraden Linien als Nulllinien aus gerechnet. Aus den Curven kann man anschaulich entnehmen, dass beim Wasser und den wässrigen Salzlösungen die Lage der Knoten und Bäuche unabhängig von der Leitfähigkeit ist, und dass die halbe Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda'$ etwa $16,5:4 = 4,12$ ist. Es ist daher

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = \left(\frac{36,8}{4,12}\right)^2 = 80,0 \text{ für die Temperatur } 18° \pm 0,5°.$$

Diese Zahl direct mit dem Quadrat des elektrischen Brechungsexponenten zu identificiren ist nur gestattet, so lange das Quadrat des Absorptionscoëfficienten gegen diese Zahl zu vernachlässigen ist (vergl. den später nachfolgenden theoretischen Theil).

Diese Beobachtungen sollen aber weniger dazu dienen, das Verhältniss $\lambda : \lambda'$ genau zu ermitteln, da dieses schärfer mittelst der Methode der Leuchtwirkungen möglich ist, als vielmehr anschaulich das Wachsen der Absorption mit steigender Leitfähigkeit zu erweisen. Dieses Wachsen der Absorption richtet sich, wie die Curven zeigen, nur nach der Leitfähigkeit $K$, nicht nach der Natur des gelösten Salzes.

Die oben Seite 17 angegebene Tabelle über die Abhängigkeit der Anzahl der zu ermittelnden Knoten und Bäuche von der Leitfähigkeit $K$ widerstreitet den Curven der Tafel nicht.

Ganz eclatant zeigt sich aus den Curven das abnorme Verhalten des Glycerins, da dies an Dämpfung der $CuSO_4$-Lösung mit $K = 20000$ etwa gleichkommt. Andere Versuche, die mit Leuchtwirkungen angestellt worden sind, werden unten bei näherer Besprechung des Glycerins noch angeführt. Die Viertel-Wellenlänge im Glycerin ist (nahezu, nicht genau wegen der Bügelverkürzung, vergl. den folgenden Abschnitt)

$$\tfrac{1}{4}\lambda' = 3,5.$$

Daraus berechnet sich für Glycerin

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = \left(\frac{36,8}{7,0}\right)^2 = 27,6.$$

Diese Widerstandsmethode ist auf andere Flüssigkeiten nicht angewandt worden, da sie sehr zeitraubend ist und die Methode der Leuchtwirkungen nicht nur schneller, sondern auch sicherer arbeitet.

## 3. Besprechung anderer Methoden.

Um alles durchzuprobiren habe ich auch mit Hülfe der von BJERKNESS angewandten Elektrometermethode die Knotenlagen des Bügels $B_2$ zu ermitteln gesucht, indem ein kleines Quadrantelektrometer in der von BJERKNESS benutzten Form, über dessen Quadrante (welche Kreisquadranten von 1,5 cm Radius bildeten) ein an einem feinen Quarzfaden aufgehängte Alumiumnadel dicht schwebte, mit ganz kurzer (1 cm langer) Zuleitung an die Drähte $DD$ $^1/_4\lambda$ hinter $B_1$ angelegt wurde. Die erste Knotenlage von $B_2$ kennzeichnete sich durch grösseren Ausschlag des Elektrometers, indess war er so gering, zumal bei den weiteren Knotenlagen des $B_2$, dass ich diese Methode als aussichtslos für diese kurzen Wellen verlassen habe.

Ebenso wenig hatte ich Erfolg mit der von KLEMENCIC oft angewandten Methode des Thermoelementes, indem zwei Rubens'sche Flaschen über $DD$ gezogen wurden, um welche die Enden zweier sehr feiner Drähte aus Eisen und Constantan geschlungen waren, die über Kreuz geschlagen waren (mit Spannung) und ein Thermoelenment bildeten. Die Erwärmung der Contactstelle wurde mit einem

Thomson'schen oder Du Bois'schen Galvanometer mit passendem Widerstande beobachtet.

Es ist offenbar zur sicheren Beobachtung der Wirkungen dieser schnellen Schwingungen die Gestaltung des Indicators als Resonator von grosser Wichtigkeit, durch einfaches Überlegen der Zehnder'schen Röhre über die Drähte *DD*, ohne sie als Resonator zu benutzen, konnte ich bei dem kleinen Erreger nicht so gut die Wirkung der Wellen beobachten.

## Fehlerquellen.

Da aus dem Nachfolgenden hervorgehen wird, dass die Methode der Leuchtwirkungen eine grosse Präcision gestattet, so möge es mir verstattet sein, etwaige Fehlerquellen ausführlich zu besprechen.

### 1. Seitliche Begrenzung der Flüssigkeit.

Der Knotenabstand in der Flüssigkeit gestattet streng genommen nur dann die Berechnung des elektrischen Brechungsexponenten, wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist. Dies kann man praktisch nicht erreichen, doch kommt es hier offenbar nicht auf die absolute Grösse des Troges, sondern nur auf das (quadratische) Verhältniss der Querdimensionen des Troges zum Abstand der Drähte *DD* an. Bei dem von mir angewandten Trog war die Flüssigkeitsgrenze 4—5 cm von den Drähten entfernt. Der hierdurch entstehende Fehler wird um so kleiner, je näher die Drähte *DD* bei einander liegen, denn zur Abschätzung des Fehlers kann man offenbar das Verhältniss der Stärke des elektrischen Feldes an den Grenzen der Flüssigkeit zu der Stärke des Feldes in der Mitte zwischen den Drähten *DD* heranziehen. Dies Verhältniss lässt sich leicht angeben, da es, wie die (durch Experimente durchaus bewährte) Theorie lehrt, dasselbe sein muss, als ob beide Drähte *DD* unendlich lang wären und gleichförmig mit Elektricität verschiedenen Vorzeichens, aber gleichen absoluten Betrages geladen wären.

Nennt man $r$ die Entfernung eines Punktes $P$ von dem ihm nächsten der Drähte, so ist für ein festes $r$ die elektrische Kraft $F$ in $P$ am grössten, falls $P$ senkrecht über der Mitte der Ebene

beider Drähte liegt. Das Verhältniss der elektrischen Kraft in $P$ zu der elektrischen Kraft $F_0$ mitten zwischen beiden Drähten ist dann, wenn der Raum überall von demselben Isolator angefüllt ist:

$$F : F_0 = a^2 : 4\,r^2,$$

falls $a$ den Axenabstand beider Drähte bezeichnet. Wenn nun dies Verhältniss sehr klein wird, so kann es auch nur eine sehr kleine Änderung in den Knoten der Drahtwellen bedingen, wenn jenseit der Entfernung $r$ die Dielektricitätsconstante einen anderen Werth besitzt, also die zu untersuchende Flüssigkeit begrenzt ist. — Ausserdem wird für ein bestimmtes $a$ und $r$ der Einfluss der Begrenzung der Flüssigkeit auf die Knotenlagen um so grösser, je grösser der Unterschied in den Dielektricitätsconstanten der Flüssigkeit und ihrer Umgebung ist. Die Wellenlänge kommt bei diesen Fragen nicht in Betracht.

Nun haben Cohn und Zeemann[1]) in einem Steintrog, in welchem die Drähte $DD$ in 7 cm Distanz von einander und 10 cm über dem Boden verliefen, die Knotenlagen nicht merklich beeinflusst gefunden, wenn der Trog voll Wasser bis zur Höhe von 18 bis 28 cm über dem Boden gefüllt wurde. Für 18 cm Wasserhöhe ist $r$ an der Wasseroberfläche über den Drähten 8 bis 9 cm zu setzen. Daher

$$F : F_0 = 7^2 : 4(8{,}5)^2 = 0{,}17.$$

Wenn bei diesem Verhältniss $F : F_0$ die von Luft umgebene Wassermasse wie eine unendlich ausgedehnte sich verhält, so kann man bei 1,8 cm Axenabstand das kleinste $r$ schon als 2,2 cm, die Querdimensionen des Troges also als rund 5 bis 6 cm wählen, ohne merkliche Fehler in den Knotenlagen zu erhalten[2]). — Bei anderen Flüssigkeiten mit kleinerer Dielektricitätsconstante ist dies a fortiori der Fall.

Ich habe auch mit Hülfe eines sehr viel grösseren Thonkastens, für welchen die Entfernung $r$ 12 cm betragen konnte, die Abhängigkeit der Knotenlagen von $r$ im Wasser untersucht, indem ich, ohne an den Apparaten sonst irgend etwas zu ändern, das Wasser in ver-

1) E. Cohn u. P. Zeemann, Königl. Akad. d. Wiss. zu Amsterdam, Sept. 1895.

2) Für $a = 1$ cm braucht $r$ nur 1,2 cm zu sein, die Querdimensionen des Troges 3 cm. Deshalb braucht man weniger als den zehnten Theil der von mir benutzten Substanzmengen, um sie trotzdem noch mit derselben Genauigkeit untersuchen zu können.

schiedenen Höhen über den Drähten stehen liess. Der Bügel $B_2$ wurde auf den fünften im Wasser hinter der Vorderwand liegenden Knoten $k_5$ eingestellt, die Einstellungen sind (abgesehen von der letzten Beobachtung, bei der die Drähte nur vom Wasser berührt wurden) mindestens als auf 0,5 mm sicher anzusehen. Da $k_5$ von der Vorderwand um 20 cm entfernt lag, so kann dadurch eine Änderung der Knotenlagen um $\frac{1}{4}$% noch mit Sicherheit constatirt werden. Die Temperatur wurde fortwährend beobachtet. — Die Drähte befanden sich in 1,8 cm Axenabstand, in 20 cm Entfernung vom Boden des Troges, in 12 cm Entfernung von den Seitenwänden. Für diese ist daher $r$ als unendlich gross anzusehen. In der Tabelle bedeutet $r$ die Höhe des Wassers in cm über den Drähten, $\vartheta$ die Temperatur, $k_5$ den Abstand des 5. Knotens im Wasser von der Vorderwand, vermehrt um die Bügelverkürzung 5 mm im Wasser (vgl. die Besprechung der vierten Fehlerquelle, der Wasseranfang lag in einem wahren Knoten), $k_5'$ die auf gleiche Temperatur reducirten Knotenabstände $k_5$, berechnet von dem bei $r = 6,8$ cm beobachteten $k_5$ als Normalpunkt aus, und mit Hülfe des Heerwagen'schen[1]) Temperaturcoefficienten, den ich durch ausführliche Messungsreihen (die ich später mittheilen werde) sehr gut bestätigt gefunden habe. Die Differenz $k_5 - k_5'$ lässt also den Einfluss der Verkleinerung von $r$ erkennen. $\varepsilon$ bedeutet die Dielektricitätsconstante des Wassers, wie sie sich berechnet aus den Daten $\frac{1}{2}\lambda$ (Luft) $= 37,2$ cm, $\frac{1}{2}\lambda'$ (Wasser) $= k_5 : 5$; schliesslich ist $\varepsilon'$ die Dielektricitätsconstante des Wassers nach Heerwagen für die betreffenden Temperaturen.

| $r$ | $\vartheta$ | $k_5$ | $k_5'$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6,8 | 11,3 | 20,51 | 20,51 | 82,2 | 82,9 |
| 3,8 | 11,8 | 20,50 | 20,53 | 82,2 | 82,8 |
| 1,9 | 12,2 | 20,64 | 20,55 | 81,3 | 82,6 |
| 0,9 | 12,5 | 21,66 | 20,56 | 74,0 | 82,5 |
| 0,0 | 12,5 | 24,6 | 20,56 | 57,5 | 82,5 |

Diese Resultate sind in Einklang mit den vorigen Überlegungen, welche die Cohn'schen und Zeemann'schen Versuche verwertheten. Ein Einfluss von $r$ erscheint erst beim Werthe $r = 1,9$ cm, für

1) F. Heerwagen, Wied. Ann. 49, p. 279, 1893.

welche die Knotenlage $k_5 - k'_5$ um $\frac{1}{2}$ % grösser, die Dielektricitätsconstante $\varepsilon$ daher um 1 % kleiner ausfällt, als für grosses $r$.

Bei den Dimensionen des beschriebenen, hier angewandten kleinen Thontroges sind demnach keine Fehler durch die seitliche Begrenzung der Flüssigkeit zu erwarten.

Übrigens kann man in jedem Falle noch als directe Controlle zur Entscheidung, ob die endliche Begrenzung der Flüssigkeit Einfluss hat, oder nicht, die Knotenlage untersuchen, während die Flüssigkeit an Metall angrenzt[1]). Wenn die Flüssigkeit als praktisch unendlich gross anzusehen ist, so kann durch die Metallumgrenzung der Knotenabstand nicht geändert werden. — Wie unten angeführt ist, wurde ein solcher Versuch mit Aethylalkohol ausgeführt. In der That blieb der Knotenabstand unverändert.

## 2. Die Vernachlässigung des galvanischen Widerstandes der Kupferdrähte.

Die Theorie der elektrischen Drahtwellen lässt sich nur vollkommen durchführen, wenn man den galvanischen Widerstand der Drähte, längs welcher die elektrischen Wellen fortgepflanzt werden, vernachlässigen kann. Die elektrischen Kraftlinien stehen dann senkrecht auf den Oberflächen der Drähte[2]), die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen muss in einem Isolator umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus seiner Dielektricitätsconstante sein. — Es ist nun die Frage zu untersuchen, ob in der That der galvanische Widerstand der 1 mm dicken Kupferdrähte bei den hier benutzten Schwingungsdauern vernachlässigt werden kann.

Eine genauere theoretische Überlegung[3]) zeigt, dass die Vernachlässigung des galvanischen Widerstandes der Drähte gestattet ist, wenn die Grösse

$$\Phi = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu'}{\sigma'}} : \frac{4 \pi R \lg \operatorname{nat} \frac{a}{R}}{\sqrt{T}}$$

gegen 1 zu vernachlässigen ist.

1) Vgl. E. COHN u. P. ZEEMANN, l. c. p. 2. — Man kann auch zur Controle den Axenabstand $a$ der Drähte verkleinern.

2) Vgl. P. DRUDE, Phys. d. Äthers, p. 449.

3) Vgl. Phys. d. Äthers, pag. 387—389, 452.

Hierin bezeichnet $\varepsilon$ die Dielektricitätsconstante der Umgebung der Drähte, $\mu'$ die Magnetisirungsconstante der Drähte, $\sigma'$ ihre specifische galvanische Leitfähigkeit[1]) nach absolutem elektromagnetischem cgs-Maass (für Quecksilber ist $\sigma' = 1{,}063.10^{-5}$), $R$ den Radius der Drähte, $a$ ihren Axenabstand, $T$ die Schwingungsdauer der Welle. In unserem Falle, für Kupferdrähte, ist bei Wasserumgebung der Drähte:

$$\varepsilon = 80,\ \mu' = 1,\ \sigma' = 60\,.\,10^{-5}.\quad R = 0{,}05 \text{ cm},\ a = 1{,}8 \text{ cm},$$

$$T = \frac{74}{3\,.\,10^{10}} = 25\,.\,10^{-10} \text{ für den kleinen Erreger,}$$

$$T = \frac{200}{3\,.\,10^{10}} = 67\,.\,10^{-10} \text{ für den grossen Erreger.}$$

Daher wird die Grösse $\Phi$:

$$\Phi = 3{,}6 : 450 \text{ beim kleinen Erreger,}$$
$$\Phi = 3{,}6 : 280 \text{ beim grossen Erreger.}$$

Die Theorie lehrt ferner, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen erst durch das Quadrat von $\Phi$ beeinflusst wird, die Dämpfung der Wellen von $\Phi$ selbst. Das Quadrat von $\Phi$ ist nun aber unbedenklich gegen 1 zu vernachlässigen, die Dämpfung kann ebenfalls nur unmerkbar durch $\Phi$ beeinflusst werden. Für andere Substanzen, deren $\varepsilon$ kleiner als beim Wasser ist, liegen die Verhältnisse noch weit günstiger.

Wenn die, die Drähte $DD$ umgebende Substanz kein vollkommener Isolator ist, sondern die Leitfähigkeit $\sigma$ (nach gleichem Maasse gemessen, wie $\sigma'$) besitzt, so treten in ihr sowohl (Maxwell'sche) Verschiebungsströme, als Leitungsströme auf. Das Verhältniss der Stärke derselben hängt ab[2]) von

$$\Psi = 2c\sigma\lambda : \varepsilon,$$

wobei $\lambda$ die Wellenlänge der Schwingung in Luft, $c$ die Zahl $3\,.\,10^{10}$ bedeutet. Hiernach werden für die kurzen Wellen ($\lambda = 74$ cm) in wässrigen Lösungen

$$\Psi = 1 \text{ für } \sigma = 0{,}18\,.\,10^{-10},\ K = 17000\,.\,10^{-10},$$

---

1) Es ist nur die Leitfähigkeit der Drähte in der Nähe ihrer Oberfläche massgebend. Daher wurden die Drähte blank geschmirgelt.

2) Vgl. Phys. d. Äthers, p. 549.

für die langen Wellen ($\lambda = 200$ cm)

$$\Psi = 1 \text{ für } \sigma = 0{,}066 \,.\, 10^{-10},\ K = 6300 \,.\, 10^{-10}.$$

$K$ bedeutet die Leitfähigkeit bezogen auf Quecksilber.

Für Substanzen, für welche $\Psi > 1$ ist, würden die Leitungsströme in ihnen von grösserem Gewicht sein, als die Verschiebungsströme, um die hier discutirte Frage zu entscheiden, ob der galvanische Widerstand der Drähte $DD$ vernachlässigt werden kann. Es würde sich dann um Abschätzung der Grösse handeln:

$$\Phi' = \sqrt{\frac{2c\sigma\lambda\mu'}{\sigma'}} : \frac{4\pi R}{\sqrt{T}} \lg \text{nat} \frac{a}{R},$$

oder, da $T = \lambda : c$,

$$\Phi' = \sqrt{2\mu'\frac{\sigma}{\sigma'}} : \frac{4\pi R}{\lambda} \lg \text{nat} \frac{a}{R}.$$

Diese Fälle, für welche $\Psi$ wesentlich grösser als 1 ist, haben aber deshalb kein praktisches Interesse, weil man in Flüssigkeiten von dementsprechend hohem Leitungsvermögen keine Knoten oder Bäuche elektrischer Wellen mehr nachweisen kann[1]). Denn, wie ein Blick auf die oben Seite 17 mitgetheilte Tabelle lehrt, bilden die Leitfähigkeiten $K = 17000 \,.\, 10^{-10}$, bezw. $K = 6300 \,.\, 10^{-10}$ ungefähr die Grenzwerthe, für welche soeben noch der erste Bauch der elektrischen Welle in der Flüssigkeit erkannt werden kann.

Wir haben also zu schliessen, dass für alle überhaupt nach dieser Methode untersuchungsfähigen Flüssigkeiten die Leitungsströme wohl von ungefähr gleicher Stärke, wie die Verschiebungsströme sein können, aber nicht wesentlich stärker. — Daher ist die an die Verschiebungsströme anknüpfende Rechnung allgemein bindend, dass bei der getroffenen Anordnung ($a = 1{,}8$ cm, $R = 0{,}05$ cm) der galvanische Widerstand der Drahtleitung wirklich zu vernachlässigen ist, und die elektrischen Kraftlinien senkrecht zur Drahtoberfläche angenommen werden können.

Eine directe Controle, ob der Drahtwiderstand Einfluss hat, oder nicht, kann man dadurch ausüben, dass man die Dicke ($2\,R$) der Drahtleitung, oder auch ihren Axenabstand $a$ variirt. Ersteres ist von grösserer Entscheidung, als letzteres. Ich habe beides für Wasser ausgeführt, indem ich sowohl $a$ auf 1 cm verringerte, als

1) Ähnlich wie in einem Metall keine Newton'schen Ringe zu Stande kommen.

auch die Dicke der Drähte auf $\frac{1}{2}$ mm. Die Resultate der Versuche werde ich bei anderer Gelegenheit ausführlicher mittheilen; hier sei nur bemerkt, dass innerhalb $\frac{1}{3}$% der elektrische Brechungsexponent derselbe blieb.

Wie die Betrachtung der hier berechneten Grösse $\Phi$ ergiebt, empfiehlt es sich nicht, um den Einfluss des galvanischen Widerstandes der Drähte nicht zu erhöhen, den Abstand $a$ der Drähte zu klein zu machen (was sonst praktisch wäre, da man dann um so kleineren Querschnitt des Troges und um so geringere Substanzmengen anwenden kann). Ausserdem müssen bei zu kleinem Abstand $a$, der etwa kleiner als 0,3 cm ist, geringe Verbiegungen der Drähte merklich auf Unregelmässigkeit (verschiedene gegenseitige Abstände) der Knoten und Bäuche hinwirken. — Nach den hier ausgeführten Schätzungen ist aber $a = 1$ cm jedenfalls noch zulässig (vgl. Seite 24 Anm. 2 und Seite 10).

## 3. Die galvanische Leitfähigkeit der Flüssigkeit.

Dass diese (in den praktisch untersuchbaren Grenzen) nicht ein merklich schiefes Eintreten der elektrischen Kraftlinien in die Drahtoberfläche veranlasst, und dadurch die Theorie wesentlich complicirt und eventuell undurchführbar macht, habe ich soeben im vorigen Abschnitt besprochen. Hier möchte ich nur darauf hinweisen, dass bei grossem Absorptionscoefficienten der eigentliche elektrische Brechungsexponent nicht einfach als Verhältniss der Wellenlängen sich ergiebt. Die exacten Formeln zur Berechnung sollen in einem nachfolgenden theoretischen Theil gegeben werden.

## 4. Einfluss der Lage des Flüssigkeitsanfangs.

Es ist darauf zu achten, dass der Anfang der Flüssigkeit genau mit einem wahren Knoten der elektrischen Kraft (zweckmässig dem ersten hinter $B_1$) zusammenfällt. Durch die Bügelstellungen $B_2$ kann man nun wohl den gegenseitigen Abstand mehrerer Knoten, aber direct nicht diese selbst erhalten, weil wegen der endlichen Länge des Bügels (1,8 cm) die wahren Knoten, d. h. diejenigen Punkte, welche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$ etc. Wellenlängen hinter $B_1$ liegen, falls $B_2$ nicht

aufgelegt, oder weiter zurück aufgelegt wird, etwas hinter den Knotenlagen von $B_2$ liegen.

Dieser Punkt ist hauptsächlich von Wichtigkeit bei der Untersuchung von Flüssigkeiten mit grosser Dielektricitätsconstante, falls man dieselbe auf mindestens 1 % bestimmen will, z. B. beim Wasser. Ich habe mich durch directe Versuche davon überzeugt (die ich bei späterer Gelegenheit mittheilen werde), dass die Dielektricitätsconstante des Wassers, d. h. das Quadrat ihres elektrischen Brechungsexponenten, um etwa 1 % abweichend bestimmt wird, wenn der Wasseranfang einmal in die erste Knotenlage von $B_2$, andrerseits in den ersten wahren elektrischen Knoten verlegt wird. Den Grund dieser Erscheinung gedenke ich bei späterer theoretischer Auseinandersetzung anzugeben, hier mag genügen, dass, wie es von vornherein plausibel ist, die richtigen Werthe des Brechungsexponenten und der Dielektricitätsconstanten erhalten werden, wenn der Flüssigkeitsanfang in den wahren Knoten fällt.

Die Lage des wahren Knotens hinter der Knotenlage von $B_2$, oder, wie ich kurz sagen will: die Bügelverkürzung, habe ich in folgender Weise ermittelt:

Beim Beginn der Versuche mit dem kleinen Erreger wurden die Drähte $DD$ des Empfängers $1\frac{1}{2}$ m lang hinter dem Halter $H_1$ ausgespannt, ohne dass sie durch einen Zwischenhalter $H_2$ oder kleine Klemmschrauben (welche je nach ihrer Lage wegen ihrer Capacität die Knotenlagen um etwa 1—2 mm näher an $B_1$ heranrücken) störend beeinflusst waren. Es wurden zwei gleich gebaute Zehnder'sche Röhren $Z_1$ und $Z_2$, deren Resonatoren genau gleiche Eigenschwingungen besassen, über $DD$[1]) in correspondirenden Lagen hinter $B_1$ gelegt, d. h. mit einer halben Wellenlänge Abstand von einander. Für maximales Leuchten der ersten Röhre $Z_1$ hinter $B_1$ musste ein Bügel $B_2$ in 35,8 cm Abstand von $B_1$ aufgelegt werden. Wenn dann dieser Bügel $B_2$ hier liegen blieb, so musste hinter ihm in 71,5 cm Abstand von $B_1$ ein dritter Bügel $B_3$ aufgelegt werden, damit die zweite Röhre $Z_2$, die zwischen $B_2$ und $B_3$ lag, maximal leuchtete.

1) Es wurde darauf geachtet, dass die Röhren genau die gleichen Abstände und relativen Lagen zu den Drähten $DD$ besassen, damit auch ihre Capacitätswirkungen (die unter Umständen 1 cm Verkürzung der Knotenlagen bewirken) die gleichen waren.

Wurde $B_2$ fortgenommen, so musste $B_3$ um 2,1 cm nach hinten, d. h. in 73,6 cm Abstand von $B_1$ gerückt werden, damit beide Röhren, sowohl $Z_1$ als $Z_2$ maximal leuchteten. Aus Symmetrie muss in letzterem Falle der wahre Knoten in der Mitte zwischen $B_1$ und $B_3$ liegen, d. h. in 36,8 cm Abstand von $B_1$. Da die Knotenlage von $B_2$ 35,8 cm Abstand besass, so beträgt also die Bügelverkürzung in diesem Falle 1 cm.

Durch diesen Versuch wird experimentell gezeigt, dass, wenn man für eine zweite Röhre $Z_2$ die Knotenlagen eines hinteren Bügels $B_3$ mit und ohne Zwischenbügel $B_2$ untersucht, die Differenz der Knotenlagen $B_3$ die doppelte Bügelverkürzung von $B_2$ beträgt, was die Überlegung auch sofort ergiebt, da $B_2$ ebensowohl für die Drahtleitung vor $B_2$, als für die hinter $B_2$ gleich verkürzend wirkt.

Diese Überlegung zeigt auch, dass man am fertigen Apparat, bei welchem die Distanz des ersten wahren Knotens von $B_1$ in Folge der Capacitätswirkung der kleinen Klemmschrauben, des Ebonithalters $H_2$ und der Zehnder'schen Röhre $Z$ verkleinert sein kann (diese Verkleinerung beträgt in der That etwa 1 cm), die Bügelverkürzung dadurch bestimmen kann, dass hinter der ersten Knotenlage von $B_2$ eine Vacuumröhre über die Drähte gelegt wird (sie braucht nicht als Resonator benutzt zu werden), vermittelst deren man die Knotenlagen eines Bügels $B_3$ mit und ohne Zwischenbügel $B_2$ bestimmt. Die Differenz dieser Knotenlagen beträgt die doppelte Bügelverkürzung von $B_2$.

In dieser Weise habe ich aus mehreren späteren Versuchen 8 mm Bügelverkürzung für die kurzen Wellen des kleinen Erregers ($\frac{1}{2}\lambda = 37$ cm), 10 mm Bügelverkürzung für die längeren Wellen des grossen Erregers ($\frac{1}{2}\lambda = 1$ m) erhalten. Im letzteren Falle kommt es bei der Grösse der Wellen nicht darauf an, wenn die Bügelverkürzung um 2 mm falsch bestimmt sein sollte. Im ersteren Falle auch kaum, aber wohl würde es für Präcisionsmessungen am Wasser Einfluss haben, wenn der Wasseranfang ganz ohne Berücksichtigung der Bügelverkürzung in die erste Bügelknotenlage und nicht in die erste wahre Knotenlage verlegt würde. — Die Bügelverkürzung desselben Bügels nimmt bei derselben Periode mit abnehmender Wellenlänge ab, dies zeigt sich am Wasser, für welches die halbe Wellenlänge beim kleinen Erreger 4 cm beträgt, die Bügelverkürzung

(gemessen durch die Abstände der Bügelknotenlagen vom Wasseranfang, der nach den besprochenen Versuchen zum wahren Knoten gemacht wird) nur 5 mm beträgt. — Die Bügelverkürzung muss natürlich mit zunehmender Länge des Bügels zunehmen[1]).

Entsprechend diesen Versuchen lag also der Flüssigkeitsanfang (die Innenwand des Troges) um 8 mm hinter der ersten Bügelknotenlage[2]). Zu prüfen ist noch, ob nicht für die Drahtleitung, welche den Thontrog durchsetzt, der erste Knoten dadurch etwas verschoben wird, dass die Drähte, von Kork umgeben, die 1,1 cm dicke Wand des Troges durchsetzen, sowie vor den Korken kleine Metallplättchen (vergl. oben Seite 10) und 1 mm dicke Ebonitscheibchen tragen.

Ich habe dies direct an einem 50 cm langen, ebenfalls 1,1 cm Wandstärke haltenden Thontrog geprüft, für welchen die Drahtleitung genau ebenso befestigt war, wie für den kleineren Thontrog. Innerhalb des grossen, leeren Thontroges wurde die Lage des zweiten Knotens des Bügels $B_2$ ermittelt und mit der Lage dieses Knotens an der freien Luftleitung verglichen. Dadurch ergab sich, dass die Befestigungsart der Drähte eine kaum merkbare, jedenfalls unter 1,5 mm liegende Knotenverkürzung (Annäherung an $B_1$) hervorruft. Die hieraus fliessende Correction braucht daher nicht berücksichtigt zu werden.

## 5. Einfluss der Lage des Flüssigkeitsendes.

Bei Flüssigkeiten, welche, wie das Wasser, ein äusserst geringes Absorptionsvermögen und grosse Dielektricitätsconstante besitzen, kann zur Erzielung der grössten Genauigkeit der Messung die Lage des Flüssigkeitsendes von Bedeutung werden, wenn der Trog nicht genügend lang ist. Der Bügel $B_2$ reflectirt nämlich die elektrischen Wellen nicht total, sondern ein, allerdings sehr geringer, Bruchtheil ihrer Intensität gelangt über $B_2$ hinaus. Das ist von vornherein klar,

---

1) Theoretisch werden sich die Bügelverkürzungen wohl berechnen lassen. Nach den Versuchen von E. COHN und P. ZEEMANN (l. c.) sind bei grossen Wellenlängen die Bügelverkürzungen grösser als die halbe Bügellänge. Sie fanden 4,5 cm Verkürzung bei 7 cm Bügellänge und 4 bis 12 m Luftwellenlänge.

2) Wenn sich durch Veränderung am Erreger diese erste Bügelknotenlage etwas verschiebt, so kann sie durch geringes Verschieben des Bügels $B_1$ sofort wieder auf die ursprüngliche Lage gebracht werden. Dann ist aber für die neue Lage von $B_1$ wiederum $\frac{1}{2}\lambda$ zu bestimmen.

da die über den Bügel $B_1$ vom Erreger aus hinausgelangenden Wellen überhaupt erst das Leuchten der Vacuumröhre $Z$ veranlassen. — Man kann sich davon auch direct überzeugen, indem man mit $B_2$ einen zweiten, hinter ihm liegenden Bügel $B_3$ starr verbindet, und nun die Knotenlagen von $B_2$ ermittelt. Wenn die Distanz $B_3 B_2$ so gewählt wird, dass das zwischen ihnen liegende Drahtsystem nahe in Resonanz mit den untersuchten Schwingungen steht, so können dadurch die Knotenlagen und auch die relativen Knotenabstände von $B_2$ etwas (eventuell 1 %) beeinflusst werden. — Bei grosser Dielektricitätsconstante wirkt nun aber das Flüssigkeitsende nahezu wie ein übergelegter Metallbügel; wenn daher $B_2$ in die Nähe des Flüssigkeitsendes geschoben wird, so können je nach seiner Lage zum Wellensystem die Knotenlagen von $B_2$ etwas verschieden beeinflusst werden[1]. — Experimentell muss dieser Einfluss dadurch geprüft werden, dass in der Nähe des Flüssigkeitsendes in zu variirenden Abständen[2] von ihm ein Bügel $B_3$ aufgelegt und dann die Knotenlagen von $B_2$ ermittelt werden.

Für die freie Luftleitung von 2 m Länge habe ich keinen Einfluss eines hinteren Bügels $B_3$ auf die Knotenlagen von $B_2$ finden können.

---

Im Folgenden theile ich die mit der Methode der Leuchtwirkungen gemachten Messungen mit.

## Destillirtes Wasser.

Für destillirtes Wasser habe ich mit dem kleinen Erreger sehr viele Messungen vorgenommen, um die Frage nach etwa vorhandener Dispersion mit möglichster Schärfe beantworten zu können. Die Resultate stimmen unter einander sehr gut überein, ich will sie aber

1) Diese Correction ist auch bei den Methoden zu berücksichtigen, welche, wie die Cohn'sche, einen Metallbügel am Flüssigkeitsanfang fest liegen lassen, falls die zeitliche Dämpfung der Erregerwellen genügend klein und der Flüssigkeitstrog nicht sehr lang ist.

2) Diese Abstände sind womöglich im Intervall $\frac{1}{2}\lambda'$ zu variiren.

ausführlich später mittheilen, um dabei auch zugleich die Resultate, die ich für den Temperaturcoëfficienten des elektrischen Brechungsexponenten des Wassers erhalten habe, daran anschliessen zu können.

Hier theile ich nur zwei, mit den kurzen Wellen erhaltene Reihen mit, um die Präcision der Methode daran zeigen zu können. Zu den Beobachtungen ist ein grösserer Thontrog von 50 cm Länge, 34 cm Tiefe, 20 cm Breite, 1,1 cm Wandstärke benutzt worden. — Für die Wellen in Luft bedeuten die Zahlen die Entfernung der Knotenlagen des Bügels $B_2$ von der Hinterseite des Ebonithalters $H_2$ in Centimetern, für die Wellen in Wasser die Entfernungen der successiven Bäuche und Knoten vom Wasseranfang, welcher in einen wahren Knoten gelegt ist (vergl. oben Seite 32). Die erste Zahl entspricht einem Bauch.

Die Wellen in Luft sind sowohl vor, als nach den Wellen in Wasser beobachtet worden (vergl. oben Seite 13). — Für erstere sind die Zahlen die Mittel aus je 3 Beobachtungen (6 Einstellungen auf Übergang zu intensivem Leuchten, vergl. oben Seite 12), für letztere die Mittel aus 4 Beobachtungen (8 Einstellungen). Die Temperatur $\vartheta$ des Wassers wurde an zwei Thermometern abgelesen, von deren Gefässen sich das eine in Höhe der Drähte, das andere 1 cm unter der Wasseroberfläche befand. Die Temperatur schwankte nur um $\pm$ 0,2°. Die Leitfähigkeit des destillirten Wassers war verhältnissmässig hoch, nämlich $K = 21 \,.\, 10^{-10}$, weil es sich wohl durch einen Tag langes Stehen im (glasirten) Trog oder Aufnahme von Kohlensäure aus der Luft verunreinigt hatte. Indess wird hierdurch der elektrische Brechungsexponent sicher nicht merklich beeinflusst, wie mir die Übersicht der bei sehr verschiedenen $K$ erhaltenen Resultate zeigt. — Die Distanz $a$ der Drähte $DD$ betrug 1,8 cm. — $B_1$ war ein grader Bügel (2 cm lang).

Kleiner Erreger. $a = 1{,}8$ cm, $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Anfang: | | | |
| Beob. | 8,4 | 46,2 | 83,7 | 121,1 | 158,2 | |
| Ber. | 8,6 | 46,1 | 83,5 | 121,0 | 158,4, | $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}45$ |
| | | | Schluss: | | | |
| Beob. | 8,5 | 46,2 | 83,7 | 121,0 | 158,5 | |
| Ber. | 8,6 | 46,1 | 83,6 | 121,1 | 158,5, | $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}48$ |

Wellen in Wasser, $\vartheta = 17°$.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | $^{1,}53$ | $^{3,}58$ | $^{5,}72$ | $^{7,}76$ | $^{9,}88$ | $^{11,}97$ | $^{14,}01$ | $^{16,}21$ | $^{18,}24$ | $^{20,}34$ |
| Ber. | 51 | 60 | 69 | 78 | 88 | 97 | 06 | 15 | 24 | 34 |

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}184.$ $\boldsymbol{n = \frac{37{,}46}{4{,}184} = 8{,}953.}$ $\boldsymbol{n^2 = 80{,}16.}$ $\varepsilon_H = 80{,}88.$

$n$ bedeutet den elektrischen Brechungsexponenten, $\varepsilon_H$ die Dielektricitätsconstante des Wassers nach Heerwagen[1]) für die Beobachtungstemperatur. Die Zahlen (Ber.) sind aus den Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet worden. Sie schliessen sich sehr gut an die Beobachtungen an; nach den geringen Differenzen, welche zwischen Ber. und Beob. bestehen, ist sowohl $\lambda$ als $\lambda'$ jedenfalls auf 0,1 % genau bestimmt, $n^2$ daher auf mindestens 0,4 %.

In der That stimmen auch andere Bestimmungen von $\varepsilon$ mit obiger Zahl meist innerhalb $\frac{1}{2}$ % überein.

Bei Vermeidung der unter 4. und 5. (Seite 29 und 32) angeführten Fehlerquellen muss also die Methode die Dielektricitätsconstante des Wassers auf $\frac{1}{2}$% genau bestimmen können.

Der erste Bauch ist nur 1,53 cm vom Flüssigkeitsanfang (wahrem Knoten) entfernt. Dies giebt 0,5 cm Bügelverkürzung (vergl. oben Seite 32).

Um zu zeigen, dass noch mehr Knoten und Bäuche der Wellen im Wasser gut zu bestimmen sind, theile ich noch eine Beobachtungsreihe mit, für welche sowohl bei der Luftleitung, wie im Wasser die Distanz der Drähte $DD$ 1 cm betrug[2]). Entsprechend der kürzeren Länge von $B_2$ ist die Bügelverkürzung zu 4 mm in Luft angenommen, und der Wasseranfang in den hiernach zu berechnenden wahren Knoten verlegt. — Die Leitfähigkeit des destillirten Wassers war (für 13°) $15 \cdot 10^{-10}$.

Die Zahlen sind wiederum die Mittel aus 6, bezw. 8 Einstellungen.

Kleiner Erreger. $a = 1$ cm, $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft.

| | Anfang: | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 9,0 | 46,9 | 84,5 | 121,1 | 158,2 |
| Ber. | 9,4 | 46,7 | 83,9 | 121,2 | 158,4, $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}25$ |

1) F. Heerwagen, Wied. Ann. 49, 1893, p. 272.

2) Die Drähte waren erst hinter dem zweiten Halter $H_2$ auf 1 cm Distanz

Schluss:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 9,1 | 46,6 | 84,2 | 120,7 | 157,9 | |
| Ber. | 9,3 | 46,5 | 83,7 | 120,9 | 158,0, | $\frac{1}{2}\lambda = 37,17$ |

Wellen in Wasser. $\vartheta = 11,7$.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | $^{1,}72$ | $^{3,}80$ | $^{5,}82$ | $^{7,}86$ | $^{9,}94$ | $^{12,}00$ | $^{14,}01$ | $^{16,}07$ | $^{18,}14$ | $^{20,}19$ |
| Ber. | 72 | 77 | 82 | 87 | 93 | 98 | 03 | 08 | 14 | 19 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | $^{22,}25$ | $^{24,}25$ | $^{26,}35$ | $^{28,}40$ | $^{30,}52$ | $^{32,}46$ |
| Ber. | 24 | 29 | 34 | 40 | 45 | 50 |

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 4,104. \quad \boldsymbol{n = \frac{37,21}{4,104} = 9,067. \quad n^2 = 82,21.} \quad \varepsilon_H = 82,80.$$

$$\boldsymbol{n_{17}^2 = 80,29.}$$

$n_{17}$ ist der aus dem beobachteten $n^2$ mit dem Heerwagen'schen Temperaturcoëfficienten berechnete Werth für $\vartheta = 17°$.

Für die Luftwellen stimmt hier nicht so gut Rechnung und Beobachtung überein, als vorhin, offenbar weil die bei der langen Luftleitung unvermeidlichen Fehler ihrer Parallelität sich für den Drahtabstand $a = 1$ cm bemerklicher machen, als für $a = 1,8$ cm (vergl. oben Seite 29). — Aus der sehr guten Übereinstimmung dieser Zahl für $n_{17}^2$ mit der vorhin bestimmten ersieht man, dass der unter 1. angeführte Fehler (wegen der endlichen Ausdehnung des Wassers) hier sich jedenfalls nicht geltend macht (vergl. oben Seite 26 Anm. 1).

Grosser Erreger. $a = 1,8$ cm, $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Anfang: | 19,5 | 122,0 | $\frac{1}{2}\lambda = 102,5$ |
| Schluss: | 19,5 | 122,5 | $\frac{1}{2}\lambda = 103,0$ |

Wellen in Wasser. $\vartheta = 11,6$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Beob. | 5,57 | 11,23 | 16,94 | |
| Ber. | 5,56 | 11,25 | 16,93, | $\frac{1}{2}\lambda' = 11,37$ |

$$\boldsymbol{n = \frac{102,7}{11,37} = 9,03. \quad n^2 = 81,6.} \quad \varepsilon_H = 82,8. \quad \boldsymbol{n_{17}^2 = 79,7.}$$

Der Brechungsexponent ist bei diesem Versuch nicht als so genau bestimmt anzusehen, als vorhin mit den kurzen Wellen, da die

genähert, zwischen $H_1$ und $H_2$ war $a = 1,8$ cm. Deshalb konnte auch ein gerader Bügel $B_1$ von 2 cm Länge verwendet werden.

Zehnder'sche Röhre ohne die Benutzung der Resonanz und der kleine (31 cm lange) Thonkasten angewandt wurden, für welchen sich, bei diesen grossen Wellen, der unter 5. (Seite 32) angeführte Fehler bemerklich machen kann. — Ich werde bei anderer Gelegenheit über die mit Vermeidung dieses Fehlers zu erhaltenden zuverlässigsten Werthe $n^2$ für Wasser berichten; die hier mitgetheilten sind jedenfalls innerhalb 1 % als richtig anzusehen.

Die erhaltenen Werthe für $n^2$ sind etwas kleiner als die Heerwagen'schen $\varepsilon_H$. Sie stimmen mit dem von Nernst[1]) erhaltenen Werthe, den allerdings Nernst nur als vorläufigen bezeichnet, $\varepsilon = 79{,}6$ bei $\vartheta = 18{,}1$, d. h. $\varepsilon_{17} = 80{,}0$ sehr nahe überein. Diese Versuche beziehen sich auf Wechselzahlen, die im Vergleich mit den hier benutzten als unendlich langsam zu betrachten sind.

Für elektrische Schwingungen, deren $\frac{1}{2}\lambda = 6$ m zu schätzen[2]) ist, hat Thwing[3]) $\varepsilon_{17} = 74{,}8$ erhalten. Ich glaube, dass die Zahl mit ziemlich grossem Fehler behaftet ist; ich habe wenigstens hinsichtlich des Temperaturcoëfficienten auch durchaus das Heerwagen'sche und Franke'sche[4]) Resultat erhalten, dass die Temperatur 4° keinen ausgezeichneten Punkt für $n^2$ bildet, während Thwing ein Maximum dafür beobachtet hat.

Nach den citirten Versuchen von Cohn und Zeemann, aus denen $n^2$ mit einer Sicherheit von mindestens $\frac{1}{3}$ % folgt, ist zwischen den Wellenlängen:

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 155 \text{ cm bis } \tfrac{1}{2}\lambda = 562 \text{ cm}: \ \varepsilon = 79{,}4.$$

Den von diesen Forschern ausgesprochenen Satz, dass bis zu $\frac{1}{2}\lambda = 155$ cm keine merkliche Dispersion des Wassers vorhanden ist, kann man daher hier bis zu $\frac{1}{2}\lambda = 37$ cm ausdehnen.

Bis zu Schwingungen der Schwingungszahl 400 Millionen in der Secunde ist die Dielektricitätsconstante (Quadrat des Brechungsexponenten) des Wassers innerhalb 1 % constant.

---

1) W. Nernst, Ztsch. f. phys. Chem. 1894, **14**, p. 610.

2) Ich habe $\frac{1}{2}\lambda$ nach den von Thwing angegebenen Dimensionen seines Erregers berechnet.

3) Ch. B. Thwing, Ztsch. f. phys. Chem. 1894, **14**, p. 286.

4) A. Franke, Wied. Ann. **50**, 1893, p. 168.

Für das normale Verhalten des Wassers spricht auch das Fehlen jeglicher Absorption der hier benutzten Schwingungen[1]).

## Glycerin.

Dasselbe war käuflich reines, spec. Gewicht 1,26 bei 15°. Leitfähigkeit $K = 2{,}8 \,.\, 10^{-10}$. Bei den nun folgenden Versuchen ist stets der kleine Thontrog benutzt worden. Der Abstand $a$ der Drähte $DD$ betrug stets 1,8 cm.

Als Bügel $B_1$ sind zum Theil längere, gebogene Drahtstücke verwendet. Die Tabellen geben ihre Länge in Centimetern.

Kleiner Erreger. $B_1 = 4$ cm.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Luft: | 6,5 | 44,3 | $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}8$ |
| Flüssigkeit, $\vartheta = 15{,}2$: | 2,99 | 6,74 | $\frac{1}{2}\lambda' = 7{,}50$ |

In der Flüssigkeit ist die erste Zahl ein Bauch, die zweite ein Knoten. Es wurde direct auf maximale bezw. minimale Lichtentwickelung eingestellt, nicht auf Übergangspunkte der Leuchtintensität (vergl. oben Seite 12). Mehr Maxima bezw. Minima liessen sich nicht nachweisen. $\frac{1}{2}\lambda'$ ist die doppelte Differenz zwischen der Lage des Knotens und des Bauches. Dies würde eine Bügelverkürzung 0,76 cm im Glycerin ergeben, welche nach dem oben (Seite 35) am Wasser erhaltenen Resultat nicht unwahrscheinlich ist. Immerhin kann aber der Fehler in $\frac{1}{2}\lambda'$ wegen der sehr starken Dämpfung 0,2 cm sein.

Es wird sonach das Verhältniss der Wellenlängen:

$$n = \frac{37{,}8}{7{,}5} = 5{,}04; \; n^2 = 25{,}4.$$

$n^2$ ist mit einer Sicherheit von 5—6 % bestimmt anzusehen. Wegen der sehr starken Absorption muss zur theoretischen Verwendung von $n^2$ der Absorptionscoëfficient mit berücksichtigt werden (vergl. oben Seite 29). — Zur ungefähren Schätzung des letzteren kann dienen, dass eine wässrige Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit

---

1) Ich habe früher (P. Drude, Wied. Ann. 54, 1895, p. 367) für Schwingungen der Wechselzahl $20 \,.\, 10^6$ eine Absorption im Wasser zu bemerken geglaubt. Ich halte dieses Resultat jetzt nicht mehr für richtig, weiss aber vorläufig nicht die Ursache des damaligen Fehlers anzugeben. — Ich werde die früheren Versuche zur Entdeckung dieses Fehlers noch einmal wiederholen.

$K = 17000 \,.\, 10^{-10}$ ebenso starke Dämpfung ergab, nämlich den ersten Knoten mit derselben Undeutlichkeit zeigte, wie Glycerin. Die Wellen im Glycerin starben also nach Durcheilen von $\frac{3}{2}\lambda$ ab (vergl. oben Seite 18).

Zum experimentellen Beweise, dass ein mangelhafter Contact des Bügels $B_2$ die starke Dämpfung im Glycerin nicht verursachen kann (vergl. oben Seite 6), wurde Glycerin in einen 5 cm weiten, 20 cm langen Glascylinder gegossen. Die Drähte $DD$ setzten sich in eine rechtwinklig umgebogene, aus einem Stück bestehende Drahtleitung $D'$ fort, und zwar war die Länge derselben dadurch variabel, dass sie längs der Drähte $DD$ verschoben werden konnte, knapp durch übergeschobene kleine Metallringe gleitend, welche noch an Stellen lagen, die nicht vom Glycerin benetzt wurden. Die Oberfläche des Glycerins lag in einem wahren Knoten. Die Drahtleitung $D'$ führte frei senkrecht in das Glycerin. Falls $D'$ 1 cm tief in das Glycerin tauchte, leuchtete die Vacuumröhre $Z$ noch gut. Zwischen 2 und 3 cm Eintauchtiefe zeigte $Z$ minimale Lichtentwickelung, bei 5 cm Eintauchtiefe war das Leuchten wiederum merklich stärker, und blieb von dann an, bei beliebig tiefem Eintauchen von $D'$, nahezu constant.

Grosser Erreger. $B_1 = 9$ cm.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Luft: | | 19,4 | 125,0 | $\frac{1}{2}\lambda = 105{,}6$ |
| Flüssigk. | $\vartheta = 13{,}3$: | 7,1 | 15,7 | $\frac{1}{2}\lambda' = 17{,}2$ |
| | $\vartheta = 20{,}4$: | 7,1 | 15,4 | $\frac{1}{2}\lambda' = 16{,}6$ |

Für die Flüssigkeit bedeutet die erste Zahl einen Bauch, die zweite einen Knoten. Derselbe war deutlicher ausgebildet, als bei den Wellen des kleinen Erregers. Ein zweiter Bauch konnte aber ebenfalls nicht nachgewiesen werden. $\frac{1}{2}\lambda'$ (die doppelte Entfernung zwischen Bauch und Knoten) ergiebt eine Bügelverkürzung von 1,5 bezw. 1,2 cm. Diese ist wahrscheinlich etwas zu gross. Für 1,0 cm Bügelverkürzung würde $\frac{1}{2}\lambda'$ um 2—3 % kleiner nach den Beobachtungen zu berechnen sein.

Es wurde für zwei verschiedene Temperaturen beobachtet, um darüber sicher zu sein, dass die starke Dispersion des $n$ nicht durch enorm grossen Temperaturcoëfficienten veranlasst sein kann. Derselbe scheint nach den Beobachtungen positiv zu sein, ist aber nicht mit

Schärfe daraus zu entnehmen[1]). Das Mittel zwischen beiden $\lambda'$ kann von dem der Temperatur 15° entsprechenden Werthe jedenfalls nicht über 2—3 % verschieden sein. Es folgt daher für $\vartheta = 15°$:

$$n = \frac{105,6}{16,9} = 6,24 ;\ n^2 = 39,1.$$

$n^2$ ist als innerhalb 5—6 % bestimmt anzusehen.

Für einen kürzeren gebogenen Bügel $B_1 = 4$ cm, für den $\frac{1}{2}\lambda = 103,2$ war, wurde (sehr undeutlich) der erste Knoten bei 15,6 bestimmt. Dies würde bei 1 cm Bügelverkürzung $n^2 = 38,7$, — bei 0,8 cm Bügelverkürzung $n^2 = 39,7$ liefern.

Aus den Resultaten ergiebt sich eine sehr starke anomale Dispersion, $n$ wächst bedeutend mit zunehmender Wellenlänge $\lambda$. — Auch für die Absorption ergiebt sich eine starke Änderung, nämlich Abnahme mit Wachsen von $\lambda$, da der erste Knoten bei den langen Wellen deutlicher ausgebildet war, als bei den kurzen. Wie durch directe Vergleichung gefunden wurde, zeigt für diese Wellen eine Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit $K = 3400 . 10^{-10}$ ungefähr die gleiche Dämpfung wie Glycerin, eine Lösung der Leitfähigkeit $K = 4480 . 10^{-10}$ dagegen deutlich eine stärkere Dämpfung.

## Methylalkohol.

Derselbe war von Kahlbaum als acetonfrei bezogen. $K < 9 . 10^{-10}$, spec. Gew. 0,796 bei 15°.

Kleiner Erreger. $B_1 = 3$ cm.

Wellen in Luft.

Anfang:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 6,90 | 44,12 | 81,41 | 118,58 | |
| Ber. | 6,90 | 44,13 | 81,37 | 118,60, | $\frac{1}{2}\lambda = 37,23$ |

Schluss:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 6,66 | 44,32 | 81,04 | 118,35 | |
| Ber. | 6,76 | 43,94 | 81,12 | 118,30, | $\frac{1}{2}\lambda = 37,18$ |

---

1) Aus den Beobachtungen würde eine Zunahme von $n$ um $\frac{1}{2}$%—1% pro Grad folgen.

Wellen in Methylalkohol. $\vartheta = 16{,}5$ ($\pm$ 0,2).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | Beob. | 2,65 | 5,86 | 9,18 | 12,26 | 15,59 | 18,80 | 21,96 | 25,20 |
| | Ber. | 66 | 89 | 11 | 33 | 55 | 77 | 99 | 21 |

$\frac{1}{2}\lambda' = 6{,}441.$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II. | Beob. | 2,60 | 5,84 | 9,18 | 12,21 | 15,55 | 18,76 | 21,89 | 25,29 |
| | Ber. | 62 | 84 | 07 | 30 | 53 | 76 | 98 | 21 |

$\frac{1}{2}\lambda' = 6{,}456.$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| III. | Beob. | 2,72 | 5,85 | 9,07 | 12,30 | 15,55 | 18,80 | 22,13 | 25,31 |
| | Ber. | 64 | 87 | 11 | 35 | 59 | 82 | 06 | 30 |

$\frac{1}{2}\lambda' = 6{,}475.$

In der Reihe I ist das Flüssigkeitsende (bei 30,6) ohne Brücke $B_3$, in der Reihe II liegt dicht am Ende bei 30,4 ein Bügel $B_3$, d. h. bei 6 mm Bügelverkürzung (die aus den Versuchen folgt), auf einem Knoten. In der Reihe III liegt $B_3$ bei 27,2, d. h. auf einem Bauch. Die Reihen zeigen, dass durch die verschiedene Begrenzung der Flüssigkeit nur die beiden letzten beobachteten Bäuche bezw. Knoten beeinflusst werden. Wenn man aber, wie es in der Tabelle geschehen ist, trotzdem aus sämmtlichen Beobachtungen $\lambda'$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so erhält man nur $\frac{1}{2}$ % maximale Differenz. Wenn man die beiden zuletzt beobachteten Knoten und Bäuche nicht mit zur Berechnung heranzieht, so ergiebt sich nur $\frac{1}{4}$ % Abweichung für die $\lambda'$ der drei Reihen. Das Mittel derselben weicht von dem Mittel der in der Tabelle berechneten $\lambda'$, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 6{,}457$$

nur um 0,1 % ab. Jedenfalls kann man also den Brechungsexponenten $n$ auf $\frac{1}{4}$ %, das Quadrat desselben auf $\frac{1}{2}$ % als sicher bestimmt ansehen. Diese Grössen sind:

$$n = \frac{37{,}21}{6{,}457} = \mathbf{5{,}76}, \; n^2 = \mathbf{33{,}21}.$$

Absorption war nicht zu bemerken.

## Aethylalkohol.

Spec. Gewicht = 0,795 bei 15°, d. h. 99,5 — 99,6 procentig. $K < 2 . 10^{-10}$.

Kleiner Erreger. $B_1 = 3$ cm.

Wellen in Luft.

Anfang:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 6,83 | 44,25 | 81,55 | 118,85 | |
| Ber. | 6,86 | 44,21 | 81,55 | 118,89, | $\frac{1}{2}\lambda = 37,34$ |

Schluss:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 6,77 | 44,30 | 81,35 | 118,72 | |
| Ber. | 6,85 | 44,14 | 81,43 | 118,72, | $\frac{1}{2}\lambda = 37,29$ |

Wellen in Aethylalkohol. $\vartheta = 16,4$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | Beob. | 3,52 | 7,38 | 11,24 | |
| | Ber. | 3,52 | 7,38 | 11,24, | $\frac{1}{2}\lambda' = 7,72$ |
| II. | Beob. | 3,62 | 7,57 | 11,39 | |
| | Ber. | 3,64 | 7,53 | 11,41, | $\frac{1}{2}\lambda' = 7,77$ |
| III. | Beob. | 3,59 | 7,43 | 11,36 | |
| | Ber. | 3,58 | 7,46 | 11,35, | $\frac{1}{2}\lambda' = 7,77$ |
| IV. | Beob. | 3,48 | 7,41 | 11,29 | |
| | Ber. | 3,49 | 7,39 | 11,30, | $\frac{1}{2}\lambda' = 7,81$ |
| V. | Beob. | 3,52 | 7,39 | 11,32 | |
| | Ber. | 3,51 | 7,41 | 11,31, | $\frac{1}{2}\lambda' = 7,80$ |
| VI. | Beob. | 3,51 | 7,40 | 11,27 | |
| | Ber. | 3,51 | 7,39 | 11,27, | $\frac{1}{2}\lambda' = 7,78$ |

In diesen Reihen wurde beobachtet

in I: ohne hinteren Bügel $B_3$,

- II: mit $B_3$, mit $B_2$ im Abstand 7 cm fest verbunden (Seite 33),
- III: mit $B_3$, mit $B_2$ im Abstand 6 cm fest verbunden,
- IV: mit $B_3$, mit $B_2$ im Abstand 3 cm fest verbunden,
- V: ohne $B_3$,
- VI: $DD$ von Kupferhülse in Abstand 3,5 cm umgeben (vergl. oben Seite 26).

Das Mittel von I und V, nämlich 7,76, unterscheidet sich von II, III und IV nur sehr wenig. Ein irgendwo, selbst dicht hinter

$B_2$ liegender Bügel $B_3$ übt also keinen deutlich erkennbaren Einfluss aus. Dies ist verständlich wegen der ziemlich beträchtlichen Dämpfung im Alkohol. Die oben Seite 32 unter 5. angeführte Fehlerquelle ist also nicht vorhanden. Ebenso nicht die Seite 23 unter 1. angeführte Fehlerquelle, nach dem Resultat der Reihe VI.

Die Zahlen sind durch Einstellung auf (nahe benachbarte) Übergangspunkte in der Leuchtintensität der Vacuumröhre gewonnen, zum Theil auch auf maximales, bezw. minimales Leuchten selbst[1]).

Das Mittel aus sämmtlichen Beobachtungen: $\frac{1}{2}\lambda' = 7{,}775$ ist als auf 0,2 % sicher anzusehen. Daher folgt $n$ zu $\frac{1}{4}$ %, $n^2$ zu $\frac{1}{2}$ % Sicherheit:

$$n = \frac{37{,}32}{7{,}775} = \mathbf{4{,}80}\,,\ n^2 = \mathbf{23{,}04}.$$

Absorption ist ziemlich beträchtlich, da der zweite Knoten sich nicht mehr einstellbar, nur so eben andeutungsweise, kennzeichnete. Nach der oben Seite 17 mitgetheilten Tabelle verhält sich Aethylalkohol bei diesen Wellen etwa wie Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit $K = 7500 \,.\, 10^{-10}$.

Grosser Erreger.

Wellen in Luft. $B_1 = 4$ cm.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Anfang: | 14,2 | 113,0 | $\frac{1}{2}\lambda = 98{,}8$ |
| Schluss: | 14,0 | 112,7 | $\frac{1}{2}\lambda = 98{,}7$ |

$B_1 = 9$ cm.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Anfang: | 14,1 | 115,2 | $\frac{1}{2}\lambda = 101{,}1$ |
| Schluss: | 13,9 | 114,8 | $\frac{1}{2}\lambda = 100{,}9$ |

Wellen in Aethylalkohol. $\vartheta = 18{,}4$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. Beob. | 9,32 | 19,56 | $\frac{1}{2}\lambda' = 20{,}48$ |
| II. Beob. | 9,37 | 19,40 | $\frac{1}{2}\lambda' = 20{,}06$ |
| III. Beob. | 9,13 | 19,27 | $\frac{1}{2}\lambda' = 20{,}28$ |

Die Reihen I und II wurden bei $B_1 = 4$ cm, Reihe III bei $B_1 = 9$ cm angestellt. Bei Reihe II liegt am Flüssigkeitsende (30,6) ein Bügel $B_3$, bei I und III nicht. Die Lage des Endes der Flüssigkeit

1) Letztere Lagen unterschieden sich innerhalb der Fehler der einzelnen Beobachtung nicht von dem Mittel der Übergangslagen.

kann hier kaum Einfluss gewinnen, da es nahezu in einen Bauch fällt, also Schwingungen von etwas Intensität hinter $B_2$ nicht zu Stande kommen können. Die Differenz zwischen I und II schiebe ich daher auf Beobachtungsfehler, und nach der Reihe III, für welche $\frac{1}{2}\lambda' = 20{,}28$ ist, ist es auch sehr wahrscheinlich, dass die Reihe I ein zu grosses $\frac{1}{2}\lambda'$ ergeben hat, da für diese die Luftwellen um 2 % kleiner sind, als für Reihe III.

Es würde daher aus Reihe I und II folgen:

$$n = \frac{98{,}75}{20{,}27} = 4{,}87\,, \quad n^2 = 23{,}74,$$

aus Reihe III:

$$n = \frac{101{,}0}{20{,}28} = 4{,}98\,, \quad n^2 = 24{,}80.$$

Das Mittel ist:

$$\boldsymbol{n = 4{,}92\,, \quad n^2 = 24{,}3\,.}$$

$n^2$ kann auf 2 % als sicher angesehen werden. Dass die Zahlen hier weniger genau bestimmt sind, liegt nicht an der Absorption, sondern an der Kürze des Thonkastens. Deshalb war es nicht mehr möglich, den zweiten Bauch einzustellen[1]), auch konnte die Absorption nicht festgestellt werden. Jedenfalls war sie noch kleiner, als bei den kurzen Wellen, da bei Lage von $B_2$ am Kastenende (30,6) die Vacuumröhre vollkommen dunkel und dieser zweite Bauch besser ausgebildet war, als bei den kurzen Wellen.

Die Beobachtungen ergeben eine deutliche, über die Beobachtungsfehler hinausfallende anomale Dispersion[2]), $n^2$ wird für längere Wellen grösser, die Absorption kleiner. Die Beobachtungen beziehen sich allerdings auf zwei verschiedene Temperaturen, $\vartheta = 16{,}4$ und $18{,}4$.

---

1) Zur genauen Einstellung muss nämlich $B_2$ auch ein Stück über den Bauch (29,4) herausgleiten können. Dies verhinderten aber schon die hinten an die Kupferdrähte angelötheten dickeren Messingdrähte (vgl. oben pag. 10).

2) Ich habe früher (Wied. Ann. **54**, 1895, p. 364) für sehr lange Wellen ($\frac{1}{2}\lambda = 700$ cm bis $\frac{1}{2}\lambda = 1000$ cm) eine geringe (1,7 % Änderung) normale Dispersion des Aethylalkohols gefunden. Dies würde dem hier gefundenen Resultat nicht widerstreiten, da auch nach der Theorie die Dispersion vor dem Eintreten in Absorptionsgebiete normal ist. Indess halte ich es doch für wünschenswerth, da es sich nur um ganz kleine Differenzen handelt, dass noch nach anderen Methoden, die genügende Sicherheit verbürgen können, die Dispersion für sehr lange Wellen untersucht wird.

Indess kann dies jedenfalls die Differenz des $n^2$ nicht erklären. Nach Nernst[1]) ist der Temperaturcoefficient von $n^2$ (= Dielektricitätsconstante) negativ (0,4 % pro Grad). Auf 16,4° bezogen würde also $n^2$ für die langen Wellen einen Werth haben, der noch grösser als 24,3 (nämlich 24,5) wäre, d. h. die Differenz gegen den Werth $n^2$ = 23,04 für die kurzen Wellen wäre noch vergrössert.

## Amylalkohol.

Von Kahlbaum bezogen. Spec. Gew. 0,812 bei 16° C. $K < 1{,}6 \,.\, 10^{-10}$.

Kleiner Erreger. $B_1 = 4$ cm.

Wellen in Luft.

Anfang:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 6,72 | 44,72 | 82,60 | 120,45 | |
| Ber. | 6,76 | 44,67 | 82,57 | 120,48, | $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}91$ |

Schluss:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 6,75 | 44,70 | 82,60 | 120,33 | |
| Ber. | 6,80 | 44,66 | 82,53 | 120,39, | $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}86$ |

Wellen in Amylalkohol. $\vartheta = 18{,}5$.

7,28 15,85

$\frac{1}{2}\lambda'$ I: 17,14, II: 16,74, III: 16,16.

$\frac{1}{2}\lambda'$ I bedeutet die doppelte Differenz zwischen der Lage des beobachteten Bauches und Knotens. Dann ergiebt sich aber $\frac{1}{4}\lambda'$ — 7,28 = 1,29 cm Bügelverkürzung. Dies ist unwahrscheinlich gross, vielmehr ist 0,8 cm Bügelverkürzung bei diesen langen Wellen wahrscheinlich (das ist derselbe Werth wie für die Luftwellen, cf. oben Seite 31). Berechnet man mit Zugrundelegung dieses Werthes die Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so entsteht $\frac{1}{2}\lambda'$ II.

1) W. Nernst, l. c. p. 661. — Der von Nernst mit sehr langsamen Wechselzahlen erhaltene Temperaturcoefficient ist jedenfalls dem Sinne nach hier anzuwenden, auch wohl ziemlich genau quantitativ, da zwischen sehr langsamen Wechselzahlen und den hier benutzten langen Wellen die Dispersion nur gering ist (vgl. weiter unten).

Indess giebt auch diese Berechnung nicht das wahrscheinlichste Resultat, weil dann die Differenz zwischen dem beobachteten und berechneten Bauch —0,2 cm wird, was unwahrscheinlich ist, da dieser Bauch als Mittel von 6 Beobachtungen (12 Einstellungen auf Übergangspunkte, die 4—6 cm von einander entfernt liegen) ziemlich sicher bestimmt ist, während der Knoten undeutlich und unsicher ist.

$\frac{1}{2}\lambda'$ III ist die doppelte Entfernung des Bauches inclusive 8 mm Bügelverkürzung vom Wasseranfang, d. h.

$$\tfrac{1}{2}\lambda' \text{ III} = 2(7{,}28 + 0{,}8),$$

und dieser Werth ist der wahrscheinlichste. Fehlerquelle 5 kann sich bei der starken Absorption nicht bemerklich machen.

Es folgt

$$n = \frac{37{,}9}{16{,}2} = \mathbf{2{,}34},\ n^2 = \mathbf{5{,}49}.$$

Bei Benutzung von $\frac{1}{2}\lambda'$ I würde $n^2 = 4{,}9$ folgen. Jedenfalls ist daher $n^2$ nicht wesentlich grösser als 5,5 und der Fehler kann jedenfalls nicht grösser als 10% sein. Die Zahl 5,5 kann aber wohl als auf 4% sicher angesehen werden, da die Unsicherheit vom Bauch höchstens 1 mm ist.

Die Absorption ist sehr stark, noch etwas stärker als bei Glycerin für diese Wellen. $K = 18000 \,.\, 10^{-10}$ ist etwa die Leitfähigkeit einer für diese Wellen sich gleich verhaltenden Kupfersulfatlösung.

Grosser Erreger. $B_1 = 9$ cm.

Wellen in Luft vgl. beim Aethylalkohol.

Wellen in Amylalkohol. $\vartheta = 17{,}3$.

1. Bauch 14,50, $\frac{1}{2}\lambda' = 30{,}6$.

Der erste Knoten war wegen der Kürze des Thonkastens nicht einzustellen. Die Unsicherheit der Einstellung 14,5 ist höchstens 2 mm, daher folgt mit einer Sicherheit von 1,5% bezw. 3%:

$$n = \frac{101}{30{,}6} = \mathbf{3{,}03},\ n^2 = \mathbf{10{,}9}.$$

Die Beobachtungen ergeben sehr starke anomale Dispersion. Nimmt man nach NERNST den Temperaturcoefficienten

negativ zu —0,7% pro Grad, so folgt $n^2 = 10,8$ für $\vartheta = 18,5$. Für die kurzen Wellen ist also $n^2$ nahezu nur halb so gross.

### Essigsäure.

Eisessig, von Kahlbaum bezogen.

$K < 1,7 . 10^{-10}$. Spec. Gewicht 1,055 bei 15°,5.

Kleiner Erreger.

Wellen in Luft. $B_1 = 2$ cm.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 6,76 | 43,88 | 80,55 | 118,02 | |
| Ber. | 6,74 | 43,78 | 80,82 | 117,87, | $\frac{1}{2}\lambda = 37,05$ |

$B_1 = 3$ cm.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Beob. | 6,66 | 43,85 | 81,45 | 118,30 | |
| Ber. | 6,69 | 43,94 | 81,19 | 118,44, | $\frac{1}{2}\lambda = 37,25$ |

Wellen in Essigsäure. $\vartheta = 19,5$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B_1 = 2$ cm | 7,35 | 14,03 | |
| $B_1 = 3$ cm | 6,95 | 13,99, | 21,76 |

Der erste, bezw. zweite Bauch ist als Mittel der Einstellungen auf Einsetzpunkte des Leuchtens gewonnen worden; diese hatten einen Abstand $h$ von 8—11 cm. Der Knoten ist das Mittel der Einstellungen auf Übergangspunkte zum maximalen Leuchten, diese hatten nur 2 cm Abstand. Bei diesem geringen Abstand $h$ ist die Lage des Knotens als richtig bestimmt anzusehen, die Lage der Bäuche wegen des grossen $h$ dagegen nicht. Denn das Mittel von Einsetzpunkten, die durch einen Bauch von einander entfernt sind, wird bei Dämpfung der Wellen um so grösser gefunden, je grösser ihr Abstand $h$ ist. Man kann dies gut aus der Curve der Tafel I entnehmen, welche dem $K = 4730$ entspricht, und welche noch eine geringere Dämpfung als Essigsäure hat, da nach der Curve der zweite Knoten noch ausgebildet ist, für die Essigsäure dagegen nicht. Bestimmt man nach dieser Curve das Mittel von Punkten gleicher Intensität (von gleichem $y$), welche vom 1. bezw. 2. Bauch, die bei 4,0 bezw. 6,0 liegen, getrennt werden, so erhält man, falls $y$ die Ordinaten der Curve, $x$ ihre Abscissen bedeuten:

| $y$ | $x_1$ | $x_2$ | $\frac{x_1+x_2}{2}$ | $x_2-x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{x_3+x_4}{2}$ | $x_4-x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,7 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 0,00 | — | — | — | — |
| 0,8 | 1,72 | 2,32 | 2,02 | 0,60 | — | — | — | — |
| 0,9 | 1,61 | 2,45 | 2,03 | 0,84 | — | — | — | — |
| 1,0 | 1,53 | 2,60 | 2,06 | 1,07 | — | — | — | — |
| 1,1 | 1,46 | 2,76 | 2,11 | 1,30 | — | — | — | — |
| 1,2 | 1,41 | 2,95 | 2,18 | 1,54 | 5,50 | 6,50 | 6,00 | 1,00 |
| 1,3 | 1,32 | 3,16 | 2,24 | 1,84 | 5,00 | 7,50 | 6,25 | 2,50 |
| 1,4 | 1,22 | 3,50 | 2,36 | 2,28 | 4,58 | 8,30 | 6,44 | 3,72 |

Man sieht, dass $\frac{x_1 + x_2}{2}$ mit $x_2 - x_1$ zunimmt, ebenso $\frac{x_3 + x_4}{2}$ mit $x_4 - x_3$; dagegen ist die Distanz der Mittel $\frac{x_3 + x_4}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2}$ ziemlich constant 4,0, falls nicht $x_2 - x_1$ grösser ist, als $x_4 - x_3$. Der Knoten (4,0) muss also näher zum vorderen Bauch $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, als zum hinteren Bauch $\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)$ liegen, wenn letztere als Mittel weit entfernter Einsetzpunkte gewonnen werden.

Dies ist nun in der That bei der Essigsäure der Fall, denn für $B_1 = 3$ cm liegt der 1. Bauch um 7,05 vor dem 1. Knoten, der 2. Bauch dagegen um 7,77 dahinter. Es war nun:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| für $B_1 = 3$ cm: | 2,92 | 10,98 | 16,80 | 26,72 |
| für $B_1 = 2$ cm: | 1,93 | 12,77 | | |

Daher ist für $B_1 = 3$ cm $x_2 - x_1 = 8,06$ nicht grösser als $x_4 - x_3 = 9,92$. Folglich muss die Differenz der Bäuche, nämlich 14,81, nahezu die halbe Wellenlänge ergeben. Andrerseits ist der 1. Bauch für $B_1 = 2$ cm grösser bestimmt, als für $B_1 = 3$ cm, weil im ersteren Falle (wegen der geringeren Intensität der Wellen) $x_2 - x_4 = 10,84$ grösser war, als im zweiten Falle ($x_2 - x_1 = 8,08$)[1]).

1) Derartige Complicationen können gerade bei Flüssigkeiten mit mässiger Absorption eintreten, bei solchen mit sehr starker nicht, da dann im Bauch, oder nahe dabei, die Röhre $Z$ leuchtet und auf das Minimum entweder direct eingestellt werden kann, oder auf nahe benachbarte Einsetzpunkte. — Beim Amylalkohol war daher diese Complication nicht vorhanden, wie auch aus den mitgetheilten Zahlen hervorgeht, da der 1. Bauch (7,28) nicht über $\frac{1}{4}\lambda'$ vom $0^{\text{ten}}$ Knoten (— 0,8) entfernt liegt.

Die Knoten sind für $B_1 = 2$ cm und $B_1 = 3$ cm ziemlich übereinstimmend gefunden, obgleich die Wellenlängen in Luft um $\frac{1}{2}$% verschieden sind. Dieser hiervon herrührende Unterschied versteckt sich in den Beobachtungsfehlern, es ist daher das Mittel der Knoten, nämlich 14,01, als wahrscheinlichster Werth für die mittlere halbe Wellenlänge in Luft 37,15 anzusehen. Bei 8 mm Bügelverkürzung fällt der sich dann ergebende Werth $\frac{1}{2}\lambda' = 14,81$ (zufällig) genau zusammen mit dem oben aus der Distanz der Bäuche sich ergebenden.

Die Fehlerquelle 5 macht sich bei der starken Absorption nicht bemerkbar. Es sind auch direct die Einstellungen vom Vorhandensein eines hinteren Bügels $B_3$ unabhängig gefunden worden. — Es folgt

$$n = \frac{37,15}{14,81} = 2,51, \; n^2 = 6,29.$$

$n^2$ ist mit 1% Sicherheit bestimmt anzusehen.

Die Absorption ist ziemlich bedeutend; ein zweiter Knoten war nicht einstellbar.

Nach der oben Seite 17 mitgetheilten Tabelle verhält sich eine Salzlösung der Leitfähigkeit $K = 8000 \cdot 10^{-10}$ etwa gleich dämpfend.

Grosser Erreger. $B_1 = 4$ cm und 9 cm.

Wellen in Luft vgl. beim Aethylalkohol.

Wellen in Essigsäure. $\vartheta = 17,0$.

$B_1 = 4$ cm: 18,50, $h = 21$ cm
$B_1 = 9$ cm: 18,55, $h = 8$ -
19,42, $h = 12$ -

Die Zahlen geben den Abstand des 1. Bauches vom Flüssigkeitsanfang. Der 1. Knoten war wegen der Kürze des Troges nicht zu erreichen. $h$ bedeutet die Distanz der Einstellpunkte, deren Mittel als Bauch bezeichnet ist. — Wie wir aber nach den vorigen Erörterungen wissen, liegt dies Mittel hinter dem eigentlichen Bauch (der $h = 0$ entspricht). In der That ist bei $B_1 = 9$ cm das Mittel der Einstellungen mit wachsendem $h$ grösser geworden. — Auch die erste Zahl (18,50) ist zu gross, da für die 2% kleineren Wellen des $B_1 = 4$ cm der erste Bauch von 18,55 auf 18,16 sich hätte nähern müssen.

Da der 1. Knoten nicht bestimmt ist, so kann man daher aus

diesen Beobachtungen mit Sicherheit nur untere Grenzwerthe des $n$ angeben. Es ist (Bügelverkürzung zu 8 mm) angenommen:

$$\frac{1}{4}\lambda' < 18,55 + 0,8 = 19,35,$$

$$\text{d. h. } \boldsymbol{n} > \frac{101}{38,7} = \mathbf{2,61},\ \boldsymbol{n}^2 > \mathbf{6,81}.$$

Näherungsweise kann man $\frac{1}{2}\lambda'$ dadurch berechnen, dass man die Resultate der oben auf Seite 48 berechneten Curve verwerthet, welche ungefähr gleiche Dämpfung hat, wie Essigsäure bei diesen Wellen. Die Distanz $h = 8$ cm der Einstellpunkte macht etwa den 4,7ten Theil der halben Wellenlänge in Essigsäure aus. Obige Curve ergiebt eine halbe Wellenlänge 4 cm, der 4,7te Theil ist 0,85 cm. Obige Tabelle ergiebt dafür 0,3 mm (wahrscheinlicher ist 0,4 mm) Verschiebung des Mittels $\frac{x_1 + x_2}{2}$ d. h. 2 % des Bauchabstandes. Folglich müsste die oben für die Essigsäure benutzte Zahl $\frac{1}{4}\lambda' = 19,35$ um 2 %, d. h. auf 19,0 zu verkleinern sein, um den wahren Werth von $\frac{1}{4}\lambda'$ zu finden. Dies ergiebt

$$\boldsymbol{n} = \frac{101}{38,0} = \mathbf{2,66},\ \boldsymbol{n}^2 = \mathbf{7,07}.$$

Aus den Beobachtungen ist mit Sicherheit eine, allerdings nicht sehr bedeutende, anomale Dispersion der Essigsäure zu entnehmen, da für die kurzen Wellen $n^2 = 6,29$ ($\pm$ 1 %), für die langen $n^2 > 6,8$ gefunden ist. — Auch die Absorption ist anomal, der Leitfähigkeit $K$ der Essigsäure nicht entfernt entsprechend.

## Anilin.

Von KAHLBAUM bezogen, $K < 1,7 \cdot 10^{-10}$. Spec. Gewicht 1,03 bei 15°.

Kleiner Erreger. $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Anfang | 6,78 | 43,76 | 80,77 | 117,99 | |
| Ber. | 6,73 | 43,79 | 80,86 | 117,92, | $\frac{1}{2}\lambda = 37,06$ |
| Schluss | 6,70 | 43,81 | 80,78 | 117,46 | |
| Ber. | 6,80 | 43,73 | 80,65 | 117,57, | $\frac{1}{2}\lambda = 36,93$ |

Wellen in Anilin. $\vartheta = 13{,}9$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. Beob. | 6,77 | 13,41 | 20,59 | 27,22, | $\frac{1}{2}\lambda' = 13{,}81$ |
| II. Beob. | 6,60 | 13,33 | 20,55 | 27,18, | $\frac{1}{2}\lambda' = 13{,}85$ |
| $h$ | 9 | 2 | 10 | 2 | |

Die Reihe I ist angestellt mit hinterem Bügel $B_3$, Reihe II ohne hinteren Bügel $B_3$. Beide Reihen geben nahezu dasselbe $\frac{1}{2}\lambda'$. Letzteres ist berechnet als Differenz der Knotenlagen. Diese sind als richtig bestimmt anzusehen, da für sie die Differenz $h$ der Einstellungspunkte nur klein ist. Für die Bäuche macht sich bei dem beträchtlichen Werthe von $h$ das oben bei der Essigsäure besprochene Verhalten bemerklich, dass dieselben etwas zu gross bestimmt erscheinen. Indess tritt dies hier bei der geringeren Dämpfung im Anilin nicht so stark hervor. Die Differenz der Bäuche stimmt nahezu (in der Reihe I bis auf 0,01, in der Reihe II bis auf 0,10) mit der Differenz der Knoten überein. — Der Mittelwerth 13,83 ist bis auf 0,4 % als sicher anzusehen.

Es folgt

$$n = \frac{37{,}0}{13{,}83} = \mathbf{2{,}67},\ n^2 = \mathbf{7{,}14}.$$

$n^2$ ist auf 1 % sicher.

Die Absorption ist im Anilin gering, aber deutlich bemerkbar anomal, d. h. grösser, als es seiner Leitfähigkeit $K$ entspricht. Der zweite Knoten hat etwa dieselbe Deutlichkeit, wie der fünfte bis sechste Knoten im Wasser; dies zeigt Anomalie, da im Wasser die Deutlichkeit des sechsten Knotens vom $K$ unabhängig ist innerhalb gewisser Grenzen, die die Leitfähigkeit des Anilins um mehr als das hundertfache übertreffen können.

## Aethyläther.

Von Kahlbaum als wasserfrei bezogen. $K < 1{,}7 \cdot 10^{-10}$. Spec. Gew. 0,722 bei 12°.

Kleiner Erreger. $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft vgl. beim Anilin.

Wellen im Äther. $\vartheta = 17,8$.

Wegen der Kürze des Kastens konnte nur der erste Bauch und ein Knoten ermittelt werden. Letzterer folgte:

ohne hintere Brücke $B_3$: 16,91
mit hinterer - - : 16,71.

Bei 8 mm Bügelverkürzung ergiebt sich hieraus $\frac{1}{2}\lambda' = 17,71$ bezw. 17,51. Der erste Bauch wurde (mit hinterer Brücke $B_3$) bei Abstand $h = 13$ cm der Einstellungspunkte zu 8,31 gefunden. Da dieses etwas näher als $\frac{1}{4}\lambda'$ zum ersten Knoten liegt, so ist (vgl. bei Essigsäure) das Vorhandensein einer, allerdings nur sehr geringen Dämpfung dadurch wahrscheinlich gemacht. Direct konnte letztere wegen der Kürze des Thonkastens (er hätte mindestens doppelt so lang sein müssen) nicht bestimmt werden.

Die beiden Einstellungen mit und ohne $B_3$ unterscheiden sich um 1,1 % von einander. Die Fehlerquelle 5. kann daher für den Mittelwerth

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 16,81$$

noch einen Einfluss von vielleicht $\frac{1}{2}$% besitzen.

Es wird daher $n^2$ nur auf 1 % sicher.

$$\boldsymbol{n = \frac{37,0}{17.6} = 2,10,\ n^2 = 4,42.}$$

## Benzol.

Von KAHLBAUM als thiophenfrei bezogen. $K < 1,7 \,.\, 10^{-10}$. Spec. Gew. 0,885 bei 14°.

Kleiner Erreger. $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft vgl. beim Anilin.

Wellen in Benzol. $\vartheta = 19,4$.

| | | |
|---|---|---|
| I. | erster Knoten | 23,84 |
| II. | - | 23,58 |
| III. | - | 23,75 |
| IV. | - | 23,75 |

Bei I und III liegt keine Brücke $B_3$ hinter $B_2$, bei II ist 1,2 cm vor dem Benzolende (bei 30,6) ein Bügel $B_3$ aufgelegt, bei IV sind

die aus dem Kasten ragenden Enden der Drahtleitung an der Aussenwand des Troges (hinter dem Benzolende) mit $B_3$ überbrückt. — Die Beobachtung II scheint durch die Nähe des $B_2$ etwas zu klein ausgefallen zu sein, das Mittel aus I, III, IV 23,78 halte ich für wahrscheinlicher, als das Mittel 23,73 aller Beobachtungen. Die Differenz ist aber unerheblich in Anbetracht der Thatsache, dass die Bügelverkürzung einen Fehler von 0,5 mm wohl enthalten kann. Es folgt, die Bügelverkürzung zu 8 mm angenommen:

$$n = \frac{37,0}{24,6} = 1,504, \; n^2 = 2,262.$$

$n^2$ ist als auf 1% sicher anzusehen.

Absorption war nicht bemerkbar, wenigstens nicht für den ersten Knoten, der allein in Betracht gezogen werden konnte.

## Zusammenfassung.

Im Folgenden stelle ich die hier gewonnenen Resultate zusammen und vergleiche sie mit den Werthen der Dielektricitätconstante, welche andere Beobachter mit langsameren Wechselzahlen erhalten haben. Ich benutze dazu die Beobachtungen von Heerwagen[1]), Franke[2]), Nernst[3]), Tereschin[4]), Thwing[5]), Cohn und Zeemann[6]). Erstere vier Beobachter haben Wechselzahlen benutzt, die als sehr klein zu bezeichnen sind ($N$ sehr klein), bei Thwing war die Wechselzahl, wie ich aus den Dimensionen seines Erregers berechnet habe, etwa $N = 25 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ($\lambda = 12$ m), bei Cohn und Zeemann lag $N$ zwischen $27 \cdot 10^6$ und $100 \cdot 10^6$. Ihre Beobachtungen, die sich nur auf Wasser beziehen, sind zum Ersatz der (wahrscheinlich unrichtigen) Zahl von Thwing benutzt. Für meine Versuche ist $N$ berechnet aus $N = 3 \cdot 10^{10} : \lambda$.

1) F. Heerwagen, Wied. Ann. **49**, 1893, p. 272.
2) A. Franke, Wied. Ann. **50**, 1893, p. 163.
3) W. Nernst, Ztschf. f. phys. Chem. **14**, 1894, p. 622.
4) S. Tereschin, Wied. Ann. **36**, 1889, p. 792.
5) Ch. B. Thwing, Ztsch. f. phys. Chem. **14**, 1894, p. 286.
6) E. Cohn u. P. Zeemann, Akad. d. Wiss. zu Amsterdam, Spt. 1895.

Die Zahlen der anderen Beobachter sind auf die Temperatur meiner Beobachtungen, die in der mit $\vartheta$ überschriebenen Colonne angegeben ist, umgerechnet für folgende Flüssigkeiten unter Annahme folgender Temperaturcoefficienten:

| | | |
|---|---|---|
| Wasser | $d\varepsilon = -0{,}45\,\%$ | pro Grad |
| Aethylalkohol | - $-0{,}4\,\%$ | - |
| Amylalkohol | - $-0{,}7\,\%$ | - |
| Aether | - $-0{,}3\,\%$ | - |
| Benzol | - $-0{,}09\,\%$ | - |
| Anilin | - $-0{,}5\,\%$ | - |

Den Temperaturcoefficienten für Wasser (den ich auch für kurze Wellen sehr gut bestätigt gefunden habe) entnehme ich der Arbeit von HEERWAGEN, die anderen Temperaturcoefficienten der Arbeit von NERNST. — Für Glycerin war eine Umrechnung nicht nöthig, da auch THWING bei 15° beobachtet hat, für Essigsäure und Methylalkohol habe ich keine Reduction vorgenommen, da bisher keine Messungen über den Temperaturcoefficienten vorliegen. Die in Klammern dabei gesetzten Zahlen beziehen sich auf die Beobachtungstemperatur bei diesen Flüssigkeiten. Die Indices der in der Colonne »$N$ klein« angeführten Zahlen beziehen sich auf die Beobachter HEERWAGEN: 1), FRANKE: 2), NERNST: 3), TERESCHIN: 4), die Thwing'schen Zahlen sind (mit Ausnahme der Zahl für Wasser, cf. oben) in der Colonne »$N = 25 \cdot 10^6$« enthalten. — Die dritte Colonne enthält das Molekulargewicht $M$, die vierte das Quadrat des optischen Brechnungsexponenten für rothes Licht. In der Colonne »$N = 150 \cdot 10^6$« bezw. »$N = 400 \cdot 10^6$« sind meine Beobachtungen angeführt, und zwar das Quadrat des Verhältnisses der Wellenlängen in Luft und Flüssigkeit. In den Colonnen »Abs.« (Absorption) ist entweder die Leitfähigkeit $K$ einer sich gleich verhaltenden Kupfersulfatlösung, multiplicirt mit $10^{10}$, angegeben, oder, falls keine genaueren Bestimmungen vorliegen, durch ein — das Fehlen, durch + das Vorhandensein von Absorption gekennzeichnet.

Dispersions-Tabelle.

| Substanz | Formel | $M$ | $n^2$ opt. | $N$ klein | $N$ $25.10^6$ | $N=150.10^6$ $n^2$ | Abs. | $N=400.10^6$ $n^2$ | Abs. | $\vartheta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wasser | $H_2O$ | 18 | 1,8 | 80,9[1] 80,0[3] | 79,4 | 80,2 | — | 79,7 | — | 17 |
| Glycerin | $C_3H_8O_3$ | 92 | 2,1 | | 56,2 | 39,1 | 3400 | 25,4 | 17000 | 15 |
| Methylalkoh. | $CH_4O$ | 32 | 1,8 | 32,7[4]$_{(14)}$ | 34,0$_{(15)}$ | | | 33,2 | — | 16 |
| Aethylalkoh. | $C_2H_6O$ | 46 | 1,8 | 25,9[3] 25,5[4] | 24,8 | 24,4 | + | 23,0 | 7500 | 17 |
| Amylalkohol | $C_5H_{12}O$ | 88 | 1,9 | 16,05[3] 15,4[4] | 14,3 | 10,8 | + | 5,51 | 18000 | 18 |
| Essigsäure | $C_2H_4O_2$ | 60 | 1,9 | 9,7[2]$_{(18)}$ | 10,3$_{(15)}$ | 7,07$_{(17)}$ | + | 6,29$_{(19)}$ | 8000 | 17 bis 19 |
| Anilin | $C_6H_7N$ | 93 | 2,5 | 7,38[3] 7,5[4] | | | | 7,14 | + | 14 |
| Aethyläther | $C_4H_{10}O$ | 74 | 1,9 | 4,25[3] | | | | 4,42 | + (?) | 18 |
| Benzol | $C_6H_6$ | 78 | 2,23 | 2,251[3] | | | | 2,262 | — | 19 |

Diese Zusammenstellung bestätigt die von mir gemachten Beobachtungen insofern, als für alle diejenigen Substanzen, für welche deutlich anomale Absorption und durch Vergleich des mit dem kleinen und dem grossen Erreger gefundenen Resultates deutlich anomale Dispersion nachgewiesen ist, das ist Glycerin, Aethylalkohol, Amylalkohol, Essigsäure, die Dielektricitätsconstante für kleinere Schwingungszahlen $N$ zum Theil wesentlich grösser ist, als das Quadrat des Wellenlängenverhältnisses bei den von mir benutzten Schwingungen. Die Substanzen sind in der Reihenfolge geordnet, wie sie der Differenz:

Dielektricitätsconstante $\varepsilon$ gegen $n^2$ optisch

entspricht. Im Allgemeinen nimmt in derselben Reihenfolge die Stärke der anomalen Dispersion ab, indess macht sich ein bedeutender Einfluss des Molekulargewichtes geltend, wie man an der fehlenden Dispersion im Wasser und Methylalkohol, an der starken beim Glycerin und Amylalkohol erkennt. Auch beim Aethylalkohol ist die

für kleines $N$ erhaltene Dielektricitätsconstante deutlich grösser, als $n^2$ für schnelle Schwingungen. Es ist zwar zu berücksichtigen, dass die Beobachtungen mit Präparaten angestellt sein können, die etwas verschieden sind von den von mir benutzten. So ist der von NERNST angewandte Aethylalkohol höher concentrirt (99,8 %), als meiner (99,5 %). Indess wächst die Dielektricitätsconstante durch Wassergehalt, die Differenz meines $n^2$ beim Aethylalkohol gegen den NERNST-schen Werth[1]) wird also noch vergrössert, wenn man die NERNST-sche Zahl auf einen 99,5 %-Alkohol reduciren würde. — Die Verschiedenheit des $n^2$ und der Dielektricitätsconstante bei den übrigen anomalen Substanzen ist aber so gross, dass sie nicht entfernt durch Verunreinigungen erklärt werden kann.

Für Wasser, Methylalkohol, Benzol ist keine Dispersion nachgewiesen. Für letztere Substanz war sie auch nicht zu erwarten, weil $n^2$ optisch nahezu mit der Dielektricitätsconstante übereinstimmt.

Für Äther scheint bei den kürzesten Wellen etwas Absorption (vergl. oben Seite 52) vorhanden zu sein. Anomale Dispersion ergiebt sich aber aus der Zusammenstellung nicht; ob eine sehr geringe normale Dispersion vorhanden ist, kann man mit Sicherheit nach den bisherigen Resultaten wohl noch kaum sagen. — Beim Anilin scheint eine geringe anomale Dispersion vorhanden zu sein, wofür besonders die Andeutung anomaler Absorption für kleine Wellen spricht; auch die Verschiedenheit des $n^2$ und $\varepsilon$ scheint grösser zu sein, als sie eventuellen Verunreinigungen zugeschoben werden könnte.

---

Von hohem Interesse ist die Untersuchung mit noch schnelleren elektrischen Schwingungen, als die hier angewandten, um die Dispersionscurve weiter fortzusetzen und auch die wichtige Frage zu erörtern, ob innerhalb der experimentell erreichbaren schnellsten elektrischen Schwingungen die Absorption der anomal sich verhaltenden Substanzen mit zunehmender Schwingungszahl wiederum ab-

1) Der Werth von TERESCHIN ist etwas kleiner, als der Werth von NERNST. Indess sind letztere Zahlen wegen der Compensation der Leitfähigkeit wohl als die zuverlässigeren anzusehen, wie auch schon der Umstand zeigt, dass TERESCHIN für Wasser einen unwahrscheinlich hohen Werth (82,6) erhalten hat.

nimmt. Da Dank der erfolgreichen Arbeiten von Righi und Lebedew die Schwingungszahl sehr hoch getrieben werden kann, und (wie ich früher zeigte) schon mit Drahtwellen eine sehr hohe Schwingungszahl zu erreichen ist, so scheinen mir derartige Untersuchungen Erfolg zu versprechen.

Man erhält dann vollkommeneren Aufschluss über die Natur und Lage der Hauptabsorptionsgebiete der Substanzen, und durch die Ausführung dieser elektrischen Spectralanalyse werden sich, da sie die Grundschwingungen der Körper, und zwar der (vielleicht gegenseitig beeinflussten) Moleküle, ergiebt, vermuthlich directere Beziehungen zur chemischen Constitution der Körper ergeben, als sie bisher mit Hülfe der optischen Spectralanalyse ermittelt sind, die vielleicht nur auf hohe Oberschwingungen, oder auf die Grundschwingungen der Atome Schlüsse ziehen lässt.

Schon die bisherigen Resultate locken zu einer Deutung von chemisch-theoretischem Standpunkte aus. Dass es nahe liegt, das Fehlen der Dispersion im Wasser mit der Einfachheit des Molekülbaus und dadurch bedingter hoher Schwingungszahl der Grundschwingung in Beziehung zu setzen, habe ich schon oben Seite 4 angedeutet. Dass Benzol und Anilin trotz hohen Molekulargewichtes tiefer Grundschwingungen entbehren, kann mit der ringförmigen Constitution des Moleküls in Zusammenhang stehen. Denn ein Ring hat einerseits höhere Eigenschwingungen, als ein gestreckter Körper gleicher Länge, andererseits ist er auch weniger fähig, die Energie äusserer elektrischer Wellen in Eigenschwingungen umzusetzen.

Indess entsteht dann die Frage, weshalb für andere Kohlenwasserstoffe und überhaupt sehr viele Körper die Dielektricitätsconstante, wie sie für kleine Schwingungszahlen gefunden wird, nahezu mit dem Quadrat des optischen Brechungsexponenten zusammenfällt. Nach der Dispersionstheorie ist zwar für diese die Existenz langsamer Eigenschwingungen nicht unmöglich[1]), aber allerdings sehr unwahrscheinlich.

---

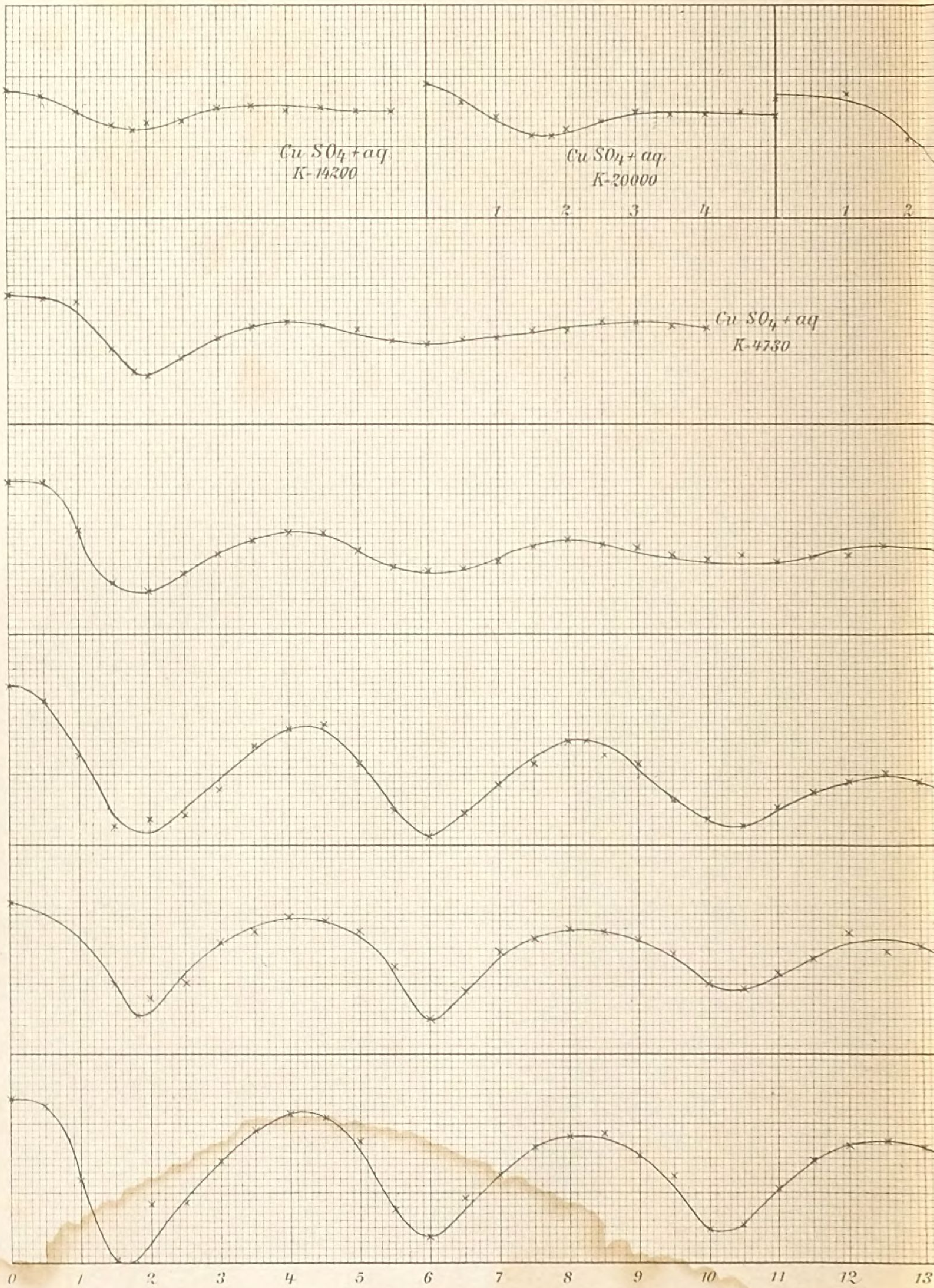
1) Die Dispersionstheorie zieht nur mit Nothwendigkeit den umgekehrten Schluss, dass, falls die Dielektricitätsconstante grösser als das Quadrat des optischen Brechungsexponenten (für rothes Licht) ist, langsamere Eigenschwingungen vorhanden sein müssen.


Die Beantwortung solcher Fragen kann mit Erfolg erst durch Anwendung der elektrischen Spectralanalyse auf viele Substanzen gewonnen werden. Dass diese schon mit verhältnissmässig langen Wellen und einfachen Hülfsmitteln überhaupt möglich ist, möchte ich als Hauptresultat des Mitgetheilten bezeichnen. — Das speciellere Resultat lautet:

1) Glycerin, Aethylalkohol, Amylalkohol, Essigsäure besitzen für schnelle elektrische Schwingungen anomale Dispersion, d. h. Abnahme des elektrischen Brechungsexponenten mit wachsender Schwingungszahl, und (mit Einschluss von Anilin) anomale Absorption, d. h. eine solche, welche viel grösser ist, als sie ihrer Leitfähigkeit für constante Ströme entsprechen würde.

2) Die Dielektricitätsconstante, welche diese Flüssigkeiten für langsame Wechselzahlen besitzen, ist grösser als das Quadrat ihres elektrischen Brechungsexponenten für sehr schnelle Wechselzahlen.

3) Für Wasser, Methylalkohol, Benzol gelten diese Anomalien innerhalb der benutzten Schwingungszahlen nicht, für Äther nur insofern, als er etwas anomale Absorption zu besitzen scheint.


Cu SO4 + aq. K-14200
Cu SO4 + aq. K-20000
Cu SO4 + aq. K-4730
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13




Lith. Anst. v. E. A. Funke Leipzig

# ZUR THEORIE

# STEHENDER ELEKTRISCHER DRAHTWELLEN

VON

**P. DRUDE,**

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

---

Des XXIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ II.

MIT EINER TAFEL.

---

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1896.

Das Manuscript eingeliefert am 15. Juni 1896.
Der Abdruck vollendet am 1. August 1896.

# ZUR THEORIE

# STEHENDER ELEKTRISCHER DRAHTWELLEN

VON

**P. DRUDE,**

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MIT EINER TAFEL.

# INHALT.


Seite

Einleitung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

**I. Theil. Wellen in Drähten, die überall von Luft umgeben sind** . 64

A. Der Leitungswiderstand der Drähte soll gleich Null angenommen werden . . . . . . . . . . . . . . . . 64

1) Aufstellung der Differentialgleichungen . . . . . . . . . 64

2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke . . 67

3) Vorhandensein zweier Brücken . . . . . . . . . . . . 73

4) Einfluss des Wellenindicators . . . . . . . . . . . . 84

5) Oberschwingungen des Erregers . . . . . . . . . . . . 84

B. Berücksichtigung des Leitungswiderstandes der Drähte 86

1) Integration der Differentialgleichungen . . . . . . . . . . 86

2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke . . 88

3) Vorhandensein zweier Brücken . . . . . . . . . . . . 90

C. Beliebiger Abstand beider Brücken . . . . . . . . . 100

**II. Theil. Wellen in Drähten, die theilweise von leitenden Körpern umgeben sind** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105

A. Der umgebende Körper verhält sich normal . . . . . 105

1) Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen . . 105

2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke . . 112

3) Reflexion und Übergang der Wellen an der Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit . . . . . . . . . . . . . . . . . 117

4) Vorhandensein einer Brücke in Luft und einer Grenze Luft-Flüssigkeit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 122

5) Vorhandensein einer Brücke in Luft, einer Grenze Luft-Flüssigkeit und einer Brücke in Flüssigkeit . . . . . . 130

6) Vorhandensein dreier Brücken . . . . . . . . . . . . 152

B. Der die Drähte umgebende Körper zeigt Dispersion und anomale Absorption . . . . . . . . . . . . . 152

Zusammenfassung der Hauptresultate . . . . . . . . . . . . . . 167

In zwei früheren Arbeiten[1]) habe ich mit Hülfe stehender elektrischer Drahtwellen den elektrischen Brechungsexponenten und die Absorption der Wellen in verschiedenen Flüssigkeiten bestimmt. Besonders die letztere erfordert zu ihrer präcisen quantitativen Berechnung einige ausführlichere theoretische Betrachtungen, die im Folgenden behandelt werden sollen. Diese Betrachtungen haben aber auch einiges, über die hier zunächst erwähnten experimentellen Zwecke hinaus gehendes Interesse, da sie die Theorie der an einer Metallbrücke reflectirten Wellen vollständiger behandeln sollen, als es bisher geschehen ist und auch Antwort geben sollen auf die Frage:

Wie vertheilt sich die elektrische und die magnetische Kraft längs eines Systemes zweier paralleler Drähte, an deren Enden eine schnell wechselnde elektromotorische Kraft besteht, welche ferner in ihrem Verlauf verschiedene Körper von verschiedenem Brechungs- und Absorptionsvermögen durchsetzen, und welche schliesslich an mehreren Stellen metallische Überbrückungen besitzen?

Wenn auch die vollständige Berechnung der in dieser allgemeinsten Gestalt gestellten Frage nicht gegeben werden soll, da sie zu complicirt ausfallen würde, um übersichtlich zu sein, so sollen doch die experimentell wichtigen und interessanten Specialfälle behandelt werden. Es werden sich dadurch einfache experimentelle Methoden zur numerischen Bestimmung sowohl der zeitlichen, als der räumlichen Dämpfung der Wellen ergeben.

---

1) »Über die anomale elektrische Dispersion«, Abhandl. d. mathem.-phys. Kl. der sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 23, p. 1, 1896. Im Folgenden citirt als »Arbeit I«; und »Der elektrische Brechungsexponent von Wasser und wässrigen Lösungen«, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. Juni 1896. p. 315. Im Folgenden citirt als »Arbeit II«.

## I. Wellen in Drähten, die überall von Luft umgeben sind.

### A. Der Leitungswiderstand der Drähte soll gleich Null angenommen werden.

#### 1) Aufstellung der Differentialgleichungen.

Bei Kleinheit des Leitungswiderstandes der Drähte führt sowohl die Kirchhoff'sche Behandlung des Problems, welche an die Vorgänge in den Drähten anknüpft, wie die Integration der Maxwell'schen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte zu der gleichen einfachen Lösung[1]). Gehen wir z. B. den Kirchhoff'schen Weg: $i$ sei die elektromagnetisch gemessene Stromstärke in einem der Drähte in einem Punkte $\mathfrak{P}$, der von einem willkürlichen, im Draht liegenden Anfangspunkte an die Entfernung $z$ besitze, $\mathfrak{e}$ sei die (scheinbare) elektrostatische Ladung der Längeneinheit des Drahtes in $\mathfrak{P}$, d. h. die Anzahl elektrischer Stromlinien, welche in der unmittelbaren Umgebung von $\mathfrak{P}$ aus der Oberfläche der Längeneinheit des Drahtes austreten und in den umgebenden Luftraum sich als elektrische Kraftlinien fortsetzen (und zugleich als Stromlinien der Verschiebungsströme nach Maxwell'scher Auffassung).

Vernachlässigt man zunächst den Widerstand der Drähte noch nicht, sondern bezeichnet man den Widerstand der Längeneinheit eines der Drähte mit $w$, so ist nach dem Ohm'schen Gesetze, welches sich bisher für Metalle bis zu den schnellsten, eigentlichen elektrischen, d. h. mit elektrischen Hülfsmitteln herstellbaren (nicht optischen) Wellen bewährt hat:

$$(1) \qquad iw = E_1 + E_2,$$

wobei rechts die gesammte, pro Längeneinheit wirkende elektromotorische Kraft (nach elektromagnetischem Maasse gemessen) steht. Diese zerfällt in zwei Theile: in die durch zeitliche Stromänderungen hervorgerufene Inductionskraft[2]):

$$(2) \qquad E_1 = -2 \lg \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial i}{\partial t},$$

1) Letzteren Weg ist zuerst Hertz gegangen.

2) Betreffs der näheren Herleitung der Formeln (2), (3) und (5) vgl. Kirchhoff, ges. Abhandl. p. 131, 154, 182 oder auch die »Phys. des Äthers« vom Verf. p. 374 u. ff.

wobei $d$ den gegenseitigen Abstand der Drähte, $R$ ihren Radius bedeutet (es soll $R$ klein gegen $d$ sein), und in die von der scheinbaren elektrostatischen Ladung $\mathfrak{e}$ herrührenden elektrischen Kraft $E_2$. Die Ladung $\mathfrak{e}$ erzeugt ein Potential

$$(3) \qquad V = 2 \log \frac{d}{R} \cdot \mathfrak{e},$$

die von $\mathfrak{e}$ herrührende elektrische Kraft in Richtung der Drahtaxe $z$ ist: $-\frac{\partial V}{\partial z}$. Da aber $E_2$ elektromagnetisch gemessen werden soll, während $\mathfrak{e}$ und $V$ elektrostatisch definirt sind, so ist

$$(4) \qquad E_2 = -c \frac{\partial V}{\partial z} = -2c \lg \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial z},$$

wobei $c$ das Verhältniss der elektrostatisch gemessenen zu der elektromagnetisch gemessenen Elektricitätsmenge bedeutet[1]).

Zur Gültigkeit der Formeln (2) und (3) ist vorausgesetzt, dass in gegenüberliegenden Theilen des Drahtsystems stets gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Ströme fliessen, was man durch völlige Symmetrie der ganzen Anordnung experimentell leicht realisiren kann.

Da nun der Stromverlust im Draht pro Längeneinheit, d. h. die Grösse $-\frac{\partial i}{\partial z}$, ganz ersetzt werden soll durch Anhäufung scheinbarer Ladung $\mathfrak{e}$, so gelangt man, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $i$ elektromagnetisch, $\mathfrak{e}$ elektrostatisch gemessen ist, zu der Beziehung:

$$(5) \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}.$$

Durch Differentiation von (1) nach der Zeit $t$ und Einsetzen der Werthe (2), (4), (5) ergiebt sich nun

$$(6) \qquad w \frac{\partial i}{\partial t} = 2 \lg \frac{d}{R} \left\{ -\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \right\};$$

derselben Differentialgleichung genügt wegen (5) auch $\mathfrak{e}$.

Wird nun der galvanische Widerstand $w$ des Drahtes vernachlässigt, so folgt aus (6), wenn man $\mathfrak{e}$ statt $i$ schreibt:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{e}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{e}}{\partial z^2},$$

$$(7) \qquad \text{d. h. } \mathfrak{e} = f_1(z - ct) + f_2(z + ct),$$

---

1) $c$ ist gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vacuum.

worin $f_1$ und $f_2$ zwei willkürliche Functionen bedeuten. — Durch (7) ist die wellenartige Ausbreitung der Ladungen $\mathfrak{e}$ (oder des Stromes $i$) gekennzeichnet, $c$ ist die Geschwindigkeit, mit der sich irgend welche elektrische Gleichgewichtsstörungen im Drahte fortpflanzen.

Liegt an einer Stelle $z = b$ eine metallische Brücke $B$ über den Drähten, so tritt dort eine Stromverzweigung ein, indem der zufliessende Strom $i$ zum Theil sich als Brückenstrom $i'$, zum Theil als Strom $i''$ in den Paralleldrähten fortsetzt. Bezeichnet man die Länge der Brücke $B$ durch $l$, ferner den Widerstand der ganzen Brücke (nicht auf die Längeneinheit bezogen) durch $w'$, so muss nach dem Ohm'schen Gesetze sein

$$(8) \qquad i'w' = E'_1 + E'_2,$$

wobei $E'_1$ die (längs $l$ summirte) Inductionskraft, welche durch Änderungen des Stromes $i'$ entsteht, bedeutet, während $E'_2$ die elektrische Kraft bedeutet, die durch die scheinbaren Ladungen $\mathfrak{e}$ der Paralleldrähte an den Stellen $z = b$ in der Brücke hervorgerufen wird. — Es wird dabei abgesehen von scheinbaren Ladungen $\mathfrak{e}'$ auf der Brücke $B$, d. h. $i'$ wird in der ganzen Brücke als von einerlei Grösse angenommen, was gestattet ist, wenn $l$ nicht sehr gross ist.

Bezeichnet man den Coëfficienten der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke mit $L$, so ist

$$(9) \qquad E'_1 = - L \cdot \frac{\partial i'}{\partial t} \cdot l.$$

Der Coëfficient der Selbstinduction $L$ der Brücke ist im Allgemeinen schwer angebbar. Wenn in der kleinen Entfernung $d'$ von $B$ eine zweite Brücke $B'$ liegt, in welcher ein Rückstrom $i'$ bestände, so wäre gemäss (2) näherungsweise zu setzen:

$$(10) \qquad L = 2 \lg \frac{d'}{R'},$$

falls $R'$ den Radius der Brückendrähte bezeichnet. Wenn in der Nähe keine zweite Brücke $B'$ liegt, so findet ein Rückstrom von $i'$ doch statt als Verschiebungsstrom in dem Luftraume zwischen den Drähten, d. h. um so näher an $B$, je kürzer die Wellenlänge $\lambda$ ist. Es wird daher näherungsweise zu setzen sein

$$(11) \qquad L = 2 \lg \frac{\frac{1}{4}\lambda}{R'}.$$

Im Allgemeinen wird man erwarten, dass $L$ grösser als die Selbstinduction auf den Paralleldrähten, d. h. $L > 2 \lg \frac{d}{R}$, ist, jedoch wegen der geringen Änderung des lg mit seinem Argument wird jedenfalls $L$ und $2 \log \frac{d}{R}$ von etwa gleicher Grössenordnung sein. Eine strenge Berechnung erscheint wohl kaum möglich. Von Bedeutung ist es aber, dass $L$ als constant angesehen werden muss, falls keine zweite Brücke $B'$ näher als $\frac{1}{4}\lambda$ an die Brücke $B$ heranrückt.

Die elektrische Kraft $E'_2$, welche durch die Ladungen $\mathfrak{e}$ der Paralleldrähte längs der ganzen Länge $l$ der Brücke hervorgerufen wird, ist gleich dem Unterschiede des Potentiales $V$ an den Enden der Brücke, d. h. nach (3) in elektromagnetischem Maasse:

(12) $$E'_2 = c \cdot 4 \mathfrak{e} \lg \frac{d}{R} \cdot$$

Es ist daher nach (8), wenn der Widerstand der Brücke $w'$ vernachlässigt wird:

(13) $$L \cdot l \cdot \frac{\partial i'}{\partial t} = 4 c \mathfrak{e} \cdot \lg \frac{d}{R}, \quad (z = b).$$

Diese Gleichung in Verbindung mit

(14) $$i = i' + i'', \quad (z = b),$$

sowie

(15) $$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}'' \ (z = b),$$

stellen die Bedingungen dar, welche bei einer Brücke zu erfüllen sind; $\mathfrak{e}''$ bedeutet die elektrische Ladung der Längeneinheit der Drähte hinter der Brücke. Man erkennt aus (13), dass bei kurzen Brückenlängen $l$ (die Länge $l$ kann man beliebig vergrössern, wenn man gebogene Brücken verwendet; nur ist die untere Grenze $l \geqq d$ vorgeschrieben) die Bedingung an einer Brücke näherungsweise lautet:

(16) $$\mathfrak{e} = 0 \text{ für } z = b.$$

In dieser Form ist die Brückenbedingung bisher behandelt worden.

### 2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke.

Es soll der Fall betrachtet werden, dass periodische Störungen, die eine zeitliche Dämpfung besitzen, in dem Drahtsystem vor der Brücke vorhanden sind. Wir setzen demgemäss

$$(17)\qquad \mathfrak{e} = A\cdot e^{-\gamma\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right).$$

Dabei bedeutet $T$ die Periode der Schwingung, $\lambda$ die Wellenlänge, $\gamma$ die (zeitliche) Dämpfungsconstante. Nach (7) muss sein

$$(18)\qquad \lambda = cT.$$

Die Gleichung (17) sagt aus, dass eine, an einer Stelle des Drahtsystems auftretende Störung

$$(19)\qquad \mathfrak{e} = A\cdot e^{-\gamma\frac{t}{T}}\cdot\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

ungeschwächt, d. h. ohne räumliche Dämpfung (Absorption) nach den positiven $z$ längs der Drähte fortgepflanzt wird. — Man kann $\mathfrak{e}$ nach (17) durch den reellen Theil einer Exponentialfunction complexen Argumentes darstellen. Wir wollen $\mathfrak{e}$ dieser Exponentialfunction selbst gleichsetzen, und am Schlusse der Rechnung die physikalische Bedeutung durch Benutzung des reellen Theiles allein hervortreten lassen. Dieser Weg ist gestattet, da alle Gleichungen linear und homogen sind, d. h. da für alle Gleichungen das Superpositionsprincip gilt; er bietet gewisse Vortheile rechnerischer Einfachheit. Wir setzen demgemäss:

$$(20)\qquad \mathfrak{e} = A\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)},$$

wobei nach (17) ist

$$(21)\qquad \alpha = -\gamma + 2\pi\sqrt{-1}.$$

Aus (5) folgt

$$(22)\qquad i = A\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Diese Gleichungen stellen Wellen dar, welche sich nur nach der positiven $z$-Axe fortpflanzen; wir wollen sie **einfallende** Wellen nennen.

Wenn die Wellen auf eine Brücke treffen (bei $z = b$), so werden sie dort theilweise **reflectirt**, als

$$(23)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{e}_r &= A_r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{z}{\lambda}+\Delta\right)} \\ i_r &= -A_r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{z}{\lambda}+\Delta\right)}, \end{aligned}$$

theilweise pflanzen sie sich über die Brücke hinaus fort, als

$$(24)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{e}'' &= A'' \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \varDelta''\right)} \\ i'' &= A'' \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \varDelta''\right)}, \end{aligned}$$

theilweise gehen sie in die Brücke $B$ selbst hinein. Ohne solche reflectirten Antheile würde man nämlich nicht die Brückenbedingungen (13), (14), (15) erfüllen können. Das negative Vorzeichen in (23) für $i_r$ muss deshalb gesetzt werden, weil nach (5) sein muss

$$-\frac{\partial i_r}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}_r}{\partial t}.$$

Von der Zeit an, in welcher die Wellen die Brücke erreicht haben, ist also zu setzen:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{e} &= A \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} + A_r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} + \varDelta\right)} \\ i &= A \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} - A_r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} + \varDelta\right)}. \end{aligned}$$

Infolge der dritten Brückenbedingung (15) muss sein:

$$(26)\qquad A \cdot e^{-\alpha\frac{b}{\lambda}} + A_r \cdot e^{\alpha\left(\frac{b}{\lambda} + \varDelta\right)} = A'' \cdot e^{\alpha\left(-\frac{b}{\lambda} + \varDelta''\right)}.$$

Ferner ist nach (14)

$$i' = i - i'' = A \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda}\right)} - A_r e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{b}{\lambda} + \varDelta\right)} - A'' e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} + \varDelta''\right)},$$

d. h. wenn man $A''$ mit Hülfe der vorigen Gleichung eliminirt:

$$(27)\qquad i' = -\,2A_r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{b}{\lambda} + \varDelta\right)}.$$

Daher wird die Brückenbedingung (13):

$$-A_r \cdot L\,l\frac{\alpha}{\lambda} e^{\alpha\left(\frac{b}{\lambda} + \varDelta\right)} = 2\lg\frac{d}{R}\left\{A e^{-\alpha\frac{b}{\lambda}} + A_r e^{\alpha\left(\frac{b}{\lambda} + \varDelta\right)}\right\},$$

oder

$$(28)\qquad A_r \cdot e^{\alpha\varDelta} = -\frac{A \cdot e^{-2\alpha\frac{b}{\lambda}}}{1 + \dfrac{\alpha l L}{2\lambda\lg\frac{d}{R}}}.$$

Aus (26) folgt dann gemäss (28):

$$(29)\qquad A'' \cdot e^{\alpha\varDelta''} = A \cdot \frac{\alpha l L : 2\lambda\lg\frac{d}{R}}{1 + \dfrac{\alpha l L}{2\lambda\lg\frac{d}{R}}}.$$

Durch (28) und (29) ist die reflectirte, sowie die über die Brücke hinaus gelangende Welle vollkommen aus der einfallenden bestimmt.

Wenn $\alpha l L$ vernachlässigt wird gegen $2\lambda \lg \frac{d}{R}$, so würde aus (28) folgen

$$A_r = -A, \quad \varDelta = -\frac{2b}{\lambda},$$

d. h. die Wellen werden bei sehr kurzer Brückenlänge an der Brücke mit Umkehr ihrer Amplitude reflectirt, und die reflectirte Welle hat dieselbe Amplitude, wie die einfallende. Aus (29) folgt dann $A'' = 0$, d. h. es pflanzt sich gar keine Welle über die Brücke hinaus fort.

Wenn nicht jene Vernachlässigung eintritt, so soll zunächst zur Abkürzung das Verhältniss der Selbstinduction der Längeneinheit auf der Brücke und auf einem der Paralleldrähte mit $\zeta$ bezeichnet werden, d. h.

(30) $$\zeta = L : 2 \lg \frac{d}{R} \cdot$$

Ferner sollen vier (reelle) Hülfsgrössen $\varrho$, $\varphi$, $\varrho''$, $\varphi''$ eingeführt werden durch die Gleichungen:

(31) $$\frac{1}{1 + \alpha\zeta\frac{l}{\lambda}} = \varrho \cdot e^{-\alpha\varphi},$$

(32) $$-\alpha = \varrho'' \cdot e^{-\alpha\varphi''},$$

d. h. nach Bedeutung des $\alpha$ gemäss (21):

(33) $$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\pi\varphi &= \frac{2\pi\zeta\frac{l}{\lambda}}{1 - \gamma\zeta\frac{l}{\lambda}}, \\ \varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} &= \frac{1}{\left(1 - \gamma\zeta\frac{l}{\lambda}\right)^2 + \left(2\pi\zeta\frac{l}{\lambda}\right)^2}, \\ \operatorname{tg} 2\pi\varphi'' &= \frac{2\pi}{\gamma}, \\ \varrho''^2 \cdot e^{2\gamma\varphi''} &= \gamma^2 + 4\pi^2 \cdot \end{aligned}\right.$$

Dann wird (28) zu:

(34) $$A_r \cdot e^{\alpha\varDelta} = -A\varrho \cdot e^{-\alpha\left(\varphi + 2\frac{b}{\lambda}\right)},$$

woraus folgt

(34') $$A_r = -A\varrho, \quad \varDelta = -2\frac{b}{\lambda} - \varphi;$$

während (29) wird zu:

$$(35) \qquad A'' \cdot e^{\alpha \varDelta''} = - A \varrho \varrho'' \zeta \frac{l}{\lambda} e^{-\alpha(\varphi + \varphi'')},$$

woraus folgt

$$(35') \qquad A'' = - A \varrho \varrho'' \zeta \frac{l}{\lambda}, \quad \varDelta'' = - \varphi - \varphi''.$$

Aus (33) folgt, dass $\varrho . e^{\gamma\varphi} < 1$ ist, falls $\gamma < 2\pi^2 \zeta \frac{l}{\lambda}$ ist. Da $\gamma$ wohl stets kleiner als 0,5 ist (bei meinen Experimenten war es 0,15 cf. unten), so ist diese Relation bei nicht zu kleinen Brückenlängen $l$ erfüllt. Aus (34) ergiebt sich, dass durch $\varrho . e^{\gamma\varphi}$ das Verhältniss der Amplituden der einfallenden und reflectirten Welle gemessen wird. Die Amplitude der reflectirten Welle ist daher kleiner, als die der einfallenden Welle, und zwar um so mehr, je länger die Brücke ist.

Aus (35') folgt, dass die Amplitude $A''$ der über die Brücke weiter gehenden Welle mit der Länge $l$ der Brücke beständig wächst, und dass sie für kurze Brückenlängen $l$ dieser Länge $l$ proportional ist. — Auf diese Thatsache bin ich zunächst durch das Experiment aufmerksam geworden und habe sie an früherer[1]) Stelle hervorgehoben.

Bei kurzen Brücken ist $\varphi$ sehr klein. $\varphi''$ ist nach (33) nahezu $\frac{1}{4}$, da $\gamma$ meist klein gegen $2\pi$ ist (z. B. bei den von mir angestellten Experimenten ist $\gamma = 0{,}15$. Wohl sehr selten kommt $\gamma$ über den Werth 0,5). Daher folgt aus (35'), dass die Phase der weiter gehenden Welle um fast $\frac{\pi}{2}$ von der der einfallenden Welle verschieden ist.

Was die Phase der reflectirten Welle anbelangt, so kann man sich eine anschauliche Vorstellung von ihr machen, wenn man die Wirkung der thatsächlich vorhandenen Brücke $B$ von der endlichen Länge $l$ auf die Phase der reflectirten Wellen ersetzt denkt durch die Wirkung einer idealen Brücke der Länge $l = 0$, welche nicht an der Stelle $z = b$, sondern an einer anderen Stelle $z = b'$ liegen müsste. Diese Brücke würde die Wellen einfach mit Umkehr ihrer Amplitude reflectiren, und (nach pag. 70) die Phase

$$\varDelta = - 2b' : \lambda$$

---

1) Wied. Ann. 54, p. 360, 1895. — Ber. der sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse, Mai 1895, p. 333. — Wied. Ann. 55, p. 637, 1895. — Arbeit I, p. 14.

hervorbringen. Identificirt man dieses $\Delta$ mit dem nach (34') durch die wirkliche Brücke hervorgebrachten $\Delta$, so müsste also sein:

$$-\frac{2b'}{\lambda} = -\frac{2b}{\lambda} - \varphi,$$

oder

(36) $$b' - b = \varphi \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Diese Differenz $b' - b$ habe ich in den eingangs citirten experimentalen Arbeiten die Bügelverkürzung oder Brückenverkürzung genannt. Nach (36) ist sie stets positiv, d. h. die ideale Brücke würde stets hinter der wirklichen liegen.

Für kurze Brücken, bei denen es gestattet ist, $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$ zu setzen, ist nach (33) und (36)

(37) $$b' - b = \tfrac{1}{2} l \cdot \zeta,$$

d. h. die Brückenverkürzung ist der Brückenlänge proportional und wächst langsam mit der Wellenlänge der Schwingung (da nach (11) $\zeta$ den Summand $\lg\lambda$ enthält). — Diese Sätze werden durch die Erfahrung bestätigt. Für verhältnissmässig kurze Wellen ($\lambda = 75$ cm) habe ich gefunden[1]), dass die Brückenverkürzung bei $l = 1{,}8$ cm etwa 8 mm betrug, d. h. $\zeta$ ist ein wenig kleiner als 1. — Für sehr viel längere Wellen ($\lambda = 4$ m bis 12 m) fanden Cohn und Zeemann[2]) bei $l = 7$ cm $b' - b = 4{,}5$ cm, d. h. $\zeta$ ist dann grösser als 1. — Roh geschätzt wird die Bügelverkürzung (bei Drahtwellen in Luft) die halbe Brückenlänge betragen.

Wenn, wie es meist der Fall ist, $\gamma$ klein gegen $2\pi$ ist, so folgt aus (33), dass das Amplitudenverhältniss $\varrho . e^{\gamma\varphi}$ der einfallenden und reflectirten Welle nur um zweite Ordnung von 1 verschieden ist, wenn die Bügelverkürzung von erster Ordnung klein ist. Wenn also $\left(2\pi\zeta\frac{l}{\lambda}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, wie es meist nahezu der Fall ist, so kann die Brückenverkürzung merklich sein, die Schwächung bei der Reflexion aber unmerklich.

Nach (33) kann die Amplitudenschwächung durch Reflexion $\varrho e^{\gamma\varphi}$ ausgedrückt werden durch die Brückenver-

1) »Arbeit I«, p. 31. Der Drahtabstand $d$ betrug 1,8 cm, $R = \frac{1}{2}$ mm.

2) E. Cohn u. P. Zeemann, Königl. Akad. d. Wiss. zu Amsterdam, Sept. 1895. Der Drahtabstand $d$ betrug 7 cm.

kürzung $b' - b = \delta b$. Benutzt man die Formel (37), d. h. setzt $l$ sehr klein voraus, und vernachlässigt man $\gamma$ gegen $2\pi^2\zeta\frac{l}{\lambda}$, so wird nach (33)

$$\varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = \frac{1}{1 + \left(4\pi\frac{\delta b}{\lambda}\right)^2}.$$

Da ich bei einer Brückenlänge von 1,8 cm 8 mm Bügelverkürzung beobachtete bei $\lambda = 75$ cm, so würde folgen:

$$\varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = \frac{1}{1{,}018}, \quad \text{d. h. } \varrho \cdot e^{\gamma\varphi} = 1 - 0{,}009.$$

Für 6 cm Bügellänge würde folgen $\varrho \cdot e^{\gamma\varphi} = 0{,}91$.

Ebenso drückt sich nach (35) die Amplitude der weitergehenden Welle durch $\delta b$ aus. Sie ist

$$\frac{4\pi\frac{\delta b}{\lambda}}{1 + \left(4\pi\frac{\delta b}{\lambda}\right)^2}.$$

Für $l = 1{,}8$ cm ergiebt sie sich zu 0,132; für $l = 6$ cm zu 0,372, wobei die Amplitude der einfallenden Welle $= 1$ gesetzt ist.

### 3) Vorhandensein zweier Brücken.

Es soll jetzt der Fall näher betrachtet werden, wie er experimentell vorliegt, wenn man die Wellenlänge der elektrischen Schwingungen bestimmen will, welche in dem Drahtsystem durch irgend einen Erreger einer schnell oscillirenden elektrischen Kraft (einerlei ob es Lecher'scher oder Blondlot'scher Erreger ist) hervorgerufen werden. Der Erreger befindet sich vor einer festliegenden Brücke $B_1$, die bei $z = 0$ auf den Drähten liegt; dahinter wird eine Brücke $B_2$ verschoben, deren Entfernung von $B_1$ mit $z = b$ bezeichnet werden soll; jenseit $B_2$ sollen die Paralleldrähte ins Unendliche verlaufen. Es handelt sich um die Bestimmung der Stromstärke $i$ und scheinbaren Ladung $\mathfrak{e}$ in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$, welcher zwischen beiden Brücken liegen soll. Seine Entfernung von $z = 0$ sei $z = p.\lambda$.

Knüpfen wir die Rechnung nur an die scheinbare Ladung $\mathfrak{e}$ der Drähte an. Die Stromstärke $i$ ergiebt sich gemäss der Gleichung (5).

Von $\mathfrak{e}$ hängt die Wirkung der Wellen auf die Lichterscheinung in einer über die Drähte gelegten Vacuumröhre ab; ebenso, wenn

die Röhre zwei, durch einen (als Resonator wirkenden) Draht verbundene Elektroden hat, falls die Ebene dieses Drahtes senkrecht zu den Paralleldrähten steht[1]). Wie eine ausführlichere Analyse[2]) ergiebt, hängt nämlich dann die Leuchtwirkung von der elektrischen Kraft $P$ im Luftraume zwischen den Drähten ab, und $P$ ist zu $\mathfrak{e}$ proportional (da es durch Differentiation des Potentiales $V$ (Formel (3)) entsteht). — Wir wollen jetzt einfach $P$ für $\mathfrak{e}$ schreiben.

Es möge nun von der Zeit $t = 0$ an durch den Erreger über die erste Brücke $B_1$ die Welle

$$(38) \qquad P = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}$$

herüber gesandt werden[3]). Diese erreicht den Punkt $z = p\lambda$ zur Zeit $t = pT$. Es bestehen also in diesem Punkte $\mathfrak{P}$ einfallende Wellen $P_1$, welche das Gesetz befolgen:

$$(39) \qquad P_1 = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - p\right)} \quad \text{von } t = pT \text{ bis } t = \infty.$$

Die einfallenden Wellen gelangen nun an die Brücke $B_2$, welche sich in der Entfernung $z = b = \beta\lambda$ von der ersten Brücke $B_1$ befinde, zur Zeit $t = \beta T$. Der Effect der Reflexion ist nach der ersten der Formeln (23) der, dass zu der einfallenden Welle

$$P_1 = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}$$

der Factor $A_r \cdot e^{\alpha\Delta}$ hinzutritt, und das Vorzeichen von $z$ umgekehrt wird. Bezeichnen wir diesen complexen Factor kurz als Reflexionsfactor $r$, so ist nach (34), da hier $A = 1$ angenommen ist:

$$(40) \qquad A_r \cdot e^{\alpha\Delta} = r = -\varrho \cdot e^{-\alpha(\varphi + 2\beta)}.$$

Die an der Brücke reflectirten Wellen sind also:

$$P = r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Sie erreichen den Punkt $\mathfrak{P}$ ($z = p\lambda$) zur Zeit $t = \beta T + (\beta - p)T$.

---

1) Vgl. Fig. 3 in Ber. d. sächs. Ges. math.-phys. Kl. 1895, p. 339. — Wied. Ann. 55, p. 643, 1895.

2) Wied. Ann. 53, p. 721, 1894.

3) Die Amplitude wird also gleich 1 gesetzt. — In Wirklichkeit wird der zeitliche Verlauf von $P$ complicirter sein. Jedoch wird $P$ um so eher obiges Gesetz befolgen, je näher $B_1$ nach dem Erreger zu liegt. Bei den Experimenten war $B_1$ etwa nur $\frac{1}{8}$ Wellenlänge vom Erreger entfernt.

Von dieser Zeit an bis zu $t = \infty$ bestehen also in $\mathfrak{P}$ reflectirte Wellen nach dem Gesetz:

$$(41)\qquad P_2 = r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)} \quad \text{für } (2\beta - p)T < t < \infty.$$

Diese reflectirten Wellen gelangen zur Zeit $t = 2\beta T$ an die erste Brücke $B_1$ (bei $z = 0$), und werden an ihr reflectirt. Der Reflexionsfactor $r'$ an $B_1$ ist dadurch von $r$ verschieden, dass die Brücke bei $z = 0$ liegt. Es ist demnach

$$(42)\qquad r' = -\varrho \cdot e^{-\alpha\varphi}.$$

Die an der Brücke $B_1$ reflectirten Wellen haben also den Werth:

$$P = rr'e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Sie gelangen zur Zeit $t = (2\beta + p)T$ zum Punkte $\mathfrak{P}$. Von dieser Zeit an bestehen also in $\mathfrak{P}$ auch Wellen des Werthes

$$(43)\qquad P_3 = rr'e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)} \quad \text{für } (2\beta + p)T < t < \infty.$$

Diese Wellen kommen zur Zeit $t = 3\beta T$ zur Reflexion an der Brücke $B_2$, werden dort reflectirt zu

$$P = r^2r'e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{z}{\lambda}\right)}$$

und erreichen den Punkt $\mathfrak{P}$ zur Zeit $t = (4\beta - p)T$. Von dieser Zeit an kommen also in $\mathfrak{P}$ Wellen hinzu

$$(44)\qquad P_4 = r^2r'e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)} \quad \text{für } (4\beta - p)T < t < \infty.$$

In dieser Weise ist die Betrachtung fortzusetzen. Wenn man den Werth der elektrischen Kraft $P$ im Punkte $\mathfrak{P}$ zu irgend einer Zeit erfahren will, so ist die Summe aller derjenigen Einzelkräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ etc. zu bilden, welche von Wellen herrühren, die zu dieser Zeit den Punkt $\mathfrak{P}$ schon erreicht haben.

Für die gesammte elektrische Kraft $P$ erhalten wir daher folgenden Verlauf:

$$
(45)\begin{cases}
p<\frac{t}{T}<2\beta-p:\ P=e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)}, \\
2\beta-p<\frac{t}{T}<2\beta+p:\ P=e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)}+r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)}, \\
2\beta+p<\frac{t}{T}<4\beta-p:\ P=e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)}(1+rr')+r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)}, \\
4\beta-p<\frac{t}{T}<4\beta+p:\ P=e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)}(1+rr')+r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)}(1+rr'), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2h\beta+p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\left\{e^{-\alpha p}[1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^h]+r\cdot e^{+\alpha p}[1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^{h-1}]\right\}, \\
2(h+1)\beta-p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta+p: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\left\{e^{-\alpha p}+re^{+\alpha p}\right\}\left\{1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^h\right\}.
\end{cases}
$$

Nun ist

$$
(46)\qquad 1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^h=\frac{(rr')^{h+1}-1}{rr'-1}.
$$

Daher wird

für $2h\beta+p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p$:

$$
(47)\quad P_{\mathrm{I}}=\frac{e^{\alpha\frac{t}{T}}}{rr'-1}\left\{e^{-\alpha p}\left[(rr')^{h+1}-1\right]+r\cdot e^{+\alpha p}\left[(rr')^h-1\right]\right\},
$$

für $2(h+1)\beta-p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta+p$:

$$
(48)\quad P_{\mathrm{II}}=\frac{e^{\alpha\frac{t}{T}}}{rr'-1}\left[e^{-\alpha p}+r\cdot e^{+\alpha p}\right]\left[(rr')^{h+1}-1\right].
$$

Es sind an $P$ die Indices I und II angehängt, um die für beide Zeitintervalle formal verschieden gestalteten $P$ kurz im Folgenden unterscheiden zu können.

Nach (40) und (42) ist nun

$$
(49)\qquad rr'=\varrho^2\cdot e^{-2\alpha(\varphi+\beta)}=\varrho^2\cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)}\cdot e^{4\pi(\varphi+\beta)\sqrt{-1}}.
$$

Der gemeinsame Nenner von $P_{\mathrm{I}}$ und $P_{\mathrm{II}}$, d. h. der Modul der complexen Grösse $rr'-1$, wird möglichst klein, wenn

$$
e^{-4\pi(\varphi+\beta)\sqrt{-1}}=+1
$$

ist, d. h. wenn ist

$$
(50)\qquad \varphi+\beta=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{4}{2}\ \text{etc.}
$$

Für diese Werthe von $\beta$, d. h. für diese Lagen der Brücke $B_2$, werden $P_{\mathrm{I}}$ und $P_{\mathrm{II}}$ möglichst gross, es sind die Knotenlagen des Bügels $B_2$. Man erkennt leicht, dass in diesen Knotenlagen durch die beiden Brücken $B_1$ und $B_2$ eine geschlossene Drahtleitung abgegrenzt wird, deren Eigenschwingungsdauern den Werth $T$ entweder als Grundton oder als Oberton besitzen. In den Knotenlagen der Brücke $B_2$ findet also Resonanz des abgegrenzten Theiles der Paralleldrähte mit dem Erreger statt.

Führt man die Entfernung $b = \beta\lambda$ des Bügels $B_2$ vom Bügel $B_1$ ein, so ist für:

(51)
$$\begin{aligned} &1.\ \text{Knoten}\ b_1 = \frac{\lambda}{2} - \lambda\varphi, \\ &2.\ \text{Knoten}\ b_2 = 2\frac{\lambda}{2} - \lambda\varphi, \\ &3.\ \text{Knoten}\ b_3 = 3\frac{\lambda}{2} - \lambda\varphi, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Der Knotenabstand ist also $\frac{1}{2}\lambda$; da nach (36) $\lambda\varphi$ gleich der doppelten Brückenverkürzung ist, so liegt die erste Knotenlage der Brücke $B_2$ um die doppelte Brückenverkürzung näher, als $\frac{1}{2}\lambda$, an die Brücke $B_1$ heran.

$P_{\mathrm{I}}$ und $P_{\mathrm{II}}$ werden Minima für

$$e^{-4\pi(\varphi+\beta)\sqrt{-1}} = -1,$$

d. h. für

(52)
$$\varphi + \beta = \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{5}{4}\ \text{etc.}$$

Hierdurch sind die Bauchlagen des Bügels $B_2$ bestimmt. Sie liegen mitten zwischen den Knotenlagen und werden:

(53)
$$\begin{aligned} &1.\ \text{Bauch}\ {}_1b = \frac{\lambda}{4} - \lambda\varphi, \\ &2.\ \text{Bauch}\ {}_2b = \frac{3\lambda}{4} - \lambda\varphi, \\ &3.\ \text{Bauch}\ {}_3b = \frac{5\lambda}{4} - \lambda\varphi, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt näher die Werthe von $P_{\mathrm{I}}$ und $P_{\mathrm{II}}$ für die Knoten-, bezw. Bauchlagen berechnen. Das Charakteristische für diese Lagen ist, dass $rr'$ reell ist, und zwar

$$(54)\qquad \begin{aligned} rr' &= +\,\varrho^2\cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \text{ für Knoten,}\\ rr' &= -\,\varrho^2\cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \text{ für Bauch.}\end{aligned}$$

Setzt man für das Zeitintervall I:

$$(55)\qquad \frac{t}{T} = 2h\beta + p + \eta,$$

wobei

$$(55')\qquad 0 < \eta < 2\beta - 2p,$$

für das Zeitintervall II:

$$(56)\qquad \frac{t}{T} = 2(h+1)\beta - p + \vartheta,$$

wobei

$$(56')\qquad 0 < \vartheta < 2p,$$

so wird nach (47) und (48), wenn man noch zur Abkürzung setzt

$$(57)\qquad \varrho^2 e^{2\gamma\varphi} = f,\quad e^{+2\gamma\beta} = g,\quad i = \sqrt{-1},$$

für eine Knotenlage des $B_2$:

$$rr' = fg,\quad r = -\,g\sqrt{f}\cdot e^{i2\pi\varphi},$$

$$(58)\quad P_{\text{I}} = e^{i2\pi(2h\beta+\eta)}\cdot e^{-\gamma\eta}\frac{g}{fg-1}\left\{f^{h+1} - g^{-(h+1)} - \left(f^h - g^{-h}\right)e^{-2p\gamma}\sqrt{f}\cdot e^{i2\pi(2p+\varphi)}\right\},$$

$$(58')\quad P_{\text{II}} = e^{i2\pi(2h\beta+\vartheta+2\beta-2p)}\cdot e^{-\gamma\vartheta}\frac{g}{fg-1}\left[e^{-2\gamma(\beta-p)} - \sqrt{f}\cdot e^{i2\pi(2p+\varphi)}\right]\left(f^{h+1} - g^{-h+1}\right).$$

Dagegen ist für eine Bauchlage des $B_2$:

$$rr' = -\,fg,\quad r = +\,g\sqrt{f}\cdot e^{i2\pi\varphi},$$

$$(59)\quad {}_{\text{I}}P = e^{i2\pi(2h\beta+\eta)}\cdot e^{-\gamma\eta}\frac{g}{fg+1}\left\{(-1)^h f^{h+1} + g^{-(h+1)} - \left((-1)^h f^h - g^{-h}\right)e^{-2p\gamma}\sqrt{f}\cdot e^{i2\pi(\varphi+2p)}\right\},$$

$$(59')\quad {}_{\text{II}}P = e^{i2\pi(2h\beta+\vartheta+2\beta-2p)}\cdot e^{-\gamma\vartheta}\frac{g}{fg+1}\left[e^{-2\gamma(\beta-p)} + \sqrt{f}\cdot e^{i2\pi(2p+\varphi)}\right]\left((-1)^h f^{h+1} + g^{-(h+1)}\right).$$

Da nach (33) und (57) $f < 1$, $g > 1$ ist, so erkennt man aus den Formeln (58) bis (59'), dass die elektrische Kraft $P$ für $h = \infty$ verschwindet. Sie erreicht also für eine gewisse Zeit einen Maximalwerth, und dieser wird gefunden, wenn man

$$(60)\qquad \frac{\partial P}{\partial h} = 0$$

macht. Die Gleichungen (58) bis (59') beantworten die Frage, wie $P$ längs des Drahtsystems variirt, d. h. die Abhängigkeit des $P$ von $p$. Von besonderem Interesse ist die Untersuchung der elektrischen Kraft an demjenigen Punkte $\mathfrak{P}$ des Drahtsystems, für welchen bei Knoten-

lagen des $B_2$ $P$ ein Maximum ist. Wie aus (58) und (58') hervorgeht, tritt dies ein für

$$e^{i\,2\pi(2p+\varphi)} = -1, \tag{61}$$

$$\text{d. h. } 2p = \tfrac{1}{2} - \varphi\,.$$

Die Entfernung dieses Punktes $\mathfrak{P}$ von der ersten Brücke $B_1$ ist also

$$p\lambda = \tfrac{1}{4}\lambda - \tfrac{1}{2}\lambda \cdot \varphi;$$

dieser Punkt liegt also nach (51) in der Mitte zwischen $B_1$ und der ersten Knotenlage von $B_2$. Bei den von mir angestellten Experimenten ist an diesem Punkte die Vacuumröhre aufgestellt. Ihre Leuchtwirkung hängt also ab von der elektrischen Kraft an diesem Punkte.

Fassen wir diesen Punkt jetzt ins Auge, so lässt sich für ihn die Amplitude der elektrischen Kraft nach den Formeln (58) bis (59') sofort hinschreiben, da nur der erste Factor in jenen Formeln eine complexe Grösse ist, während die anderen Factoren infolge (61) sämmtlich reell sind. Die Amplituden der elektrischen Kraft werden daher für diesen Punkt $\mathfrak{P}$, wenn man die unwesentlichen Factoren $e^{-\gamma\eta}$ und $e^{-\gamma\vartheta}$ fortlässt:

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{I}} &= \frac{g}{fg-1}\left\{f^{h+1} - g^{-(h+1)} + \left(f^h - g^{-h}\right)\sqrt{f}\cdot e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})}\right\},\\
A_{\mathrm{II}} &= \frac{g}{fg-1}\left\{e^{-\gamma(\varphi-\frac{1}{2}+2\beta)} + \sqrt{f}\right\}\cdot\left\{f^{h+1} - g^{-(h+1)}\right\},\\
{}_{\mathrm{I}}A &= \frac{g}{fg+1}\left\{(-1)^h f^{h+1} + g^{-(h+1)} + \left((-1)^h f^h - g^{-h}\right)\sqrt{f}\cdot e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})}\right\},\\
{}_{\mathrm{II}}A &= \frac{g}{fg+1}\left\{e^{-\gamma(\varphi-\frac{1}{2}+2\beta)} - \sqrt{f}\right\}\cdot\left\{(-1)^h f^{h+1} + g^{-(h+1)}\right\}.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Der Maximalwerth, den diese Amplituden im Laufe der Zeit annehmen können, ist zu berechnen, wenn man nach (60) den Differentialquotienten nach $h$ gleich Null setzt. Es ist klar, dass für die Knotenlagen diese Maxima in einer um so späteren Zeit, d. h. für um so grösseres $h$ eintreten, je mehr $f$ sich dem Werthe 1 nähert. Nach (57) bedeutet $\sqrt{f}$ das Verhältniss der Amplituden der an der Brücke reflectirten Welle zu der der einfallenden. Nach pag. 73 ist $\sqrt{f} = 1 - 0{,}009$ für die in meinen Experimenten gewählten Anordnungen, d. h. für $l = 1{,}8$ cm und $\lambda = 75$ cm. Man erhält daher schon ein sehr nahe richtiges Bild der Amplituden $A$, wenn man $f = 1$ setzt. Dann treten die Maxima der $A_{\mathrm{I}}$ und $A_{\mathrm{II}}$ für $h = \infty$

ein, d. h. nach unendlich langer Zeit. Dies ist auch von vornherein klar, denn bei $f = 1$ geht durch Reflexion keine Energie verloren und es gelangt fortwährend Zufuhr über $B_1$ in das Drahtsystem.

Für $h = \infty$ ergiebt sich, falls man in (62) auch $\varphi = 0$ setzt, was bei $f = 1$ annäherungsweise gestattet ist:

$$\text{Max. } A_{\text{I}} = \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} - 1}\left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right) = \frac{e^{2\gamma\beta} + e^{\gamma(2\beta - \frac{1}{2})}}{e^{2\gamma\beta} - 1},$$

$$\text{Max. } A_{\text{II}} = \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} - 1}\left(1 + e^{\gamma(\frac{1}{2} - 2\beta)}\right) = \frac{e^{2\gamma\beta} + e^{\frac{\gamma}{2}}}{e^{2\gamma\beta} - 1}.$$

Nun ist $2\beta > 1$ für die Knotenlagen (vgl. (50)), daher ist

$$\text{Max. } A_{\text{I}} > \text{Max. } A_{\text{II}}.$$

Ausserdem ist, zumal für die weiteren Knotenlagen, wo $\beta$ grössere Werthe annimmt, das Zeitintervall I (vgl. (47)) grösser, als das Zeitintervall II (vgl. (48)). Das Leuchten einer Vacuumröhre, die an dem betrachteten Punkte $\mathfrak{P}$ aufgestellt ist, wird also wesentlich von dem Werthe des Max. $A_{\text{I}}$ abhängen, dem absoluten Maximum. Wir wollen dieses jetzt kurz als Knotenstärke $K$ bezeichnen, und erhalten also:

$$(63) \qquad K = \left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)\frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} - 1}.$$

Da nach pag. 76 für die Knoten näherungsweise, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird, $2\beta$ die Werthe hat:

$$2\beta = 1, 2, 3, \cdots k \cdots,$$

o ist also die Stärke des $k^{\text{ten}}$ Knotens:

$$(63') \qquad K_k = \left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)\frac{e^{k\gamma}}{e^{k\gamma} - 1} = \frac{1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}}{1 - e^{-k\gamma}}.$$

Für die Bauchlagen wird nach (62):

$$_{\text{I}}A = \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} + 1}\left\{(-1)^h\left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right) - g^{-h}\left(e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-2\gamma\beta}\right)\right\},$$

$$_{\text{II}}A = \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} + 1}\left\{e^{\gamma(\frac{1}{2} - 2\beta)} - 1\right\}\left\{(-1)^h + g^{-(h+1)}\right\}.$$

Da stets $e^{-\frac{\gamma}{2}} > e^{-2\gamma\beta}$, so nimmt $_{\text{I}}A$ den absoluten grössten Werth an für $h = 1$ und wird dann

$$\text{Max. }{}_{\text{I}}A = -\frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta}+1}\left[1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} + e^{-2\gamma\beta}\left(e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-2\gamma\beta}\right)\right].$$

Dagegen nimmt ${}_{\text{II}}A$ den absoluten grössten Werth an für $h = 0$ und wird

$$\text{Max. }{}_{\text{II}}A = -\frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta}+1}\left(1 - e^{\gamma(\frac{1}{2}-2\beta)}\right)\left(1 + e^{-2\gamma\beta}\right).$$

Auch hier ergiebt sich, dass stets ist

$$\text{Max. }{}_{\text{I}}A > \text{Max. }{}_{\text{II}}A.$$

Das absolute Maximum für die Bauchlagen der Brücke $B_2$ (sie möge Bauchstärke $B$ genannt werden), ist also (auf das Vorzeichen kommt es nicht an):

$$(64)\qquad B = e^{-\frac{\gamma}{2}} + \frac{e^{2\gamma\beta} + e^{-2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta}+1} = 1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-2\gamma\beta}.$$

Da nach pag. 77 für die Bäuche näherungsweise, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird, $2\beta$ die Werthe hat:

$$2\beta = \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{2}, \cdots k + \tfrac{1}{2} \cdots,$$

so ist also die Stärke des $k^{\text{ten}}$ Bauches:

$$(64')\qquad B_k = 1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot e^{-k\gamma} = 1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\left(1 - e^{-k\gamma}\right).$$

Ob die in $\mathfrak{P}$ aufgestellte Vacuumröhre nicht leuchtet, wird davon abhängen, dass die Bauchstärke $B$ einen gewissen Betrag, der grade zum Einsetzen des Leuchtens der Röhre genügt, nicht überschreitet.

Die Anzahl der durch Verschiebung der Brücke $B_2$ beobachtbaren Knoten und Bäuche auf dem Drahtsystem ergiebt sich aus demjenigen Werthe von $k$, für welchen die Knotenstärke $K_k$ um einen gewissen Procentsatz, der von der Empfindlichkeit des Wellenindicators (der Vacuumröhre) abhängt, grösser ist, als die Bauchstärke $B_k$. — Man erkennt aus den Formeln (63) und (64), dass für sehr grosse Werthe von $\beta$ sowohl $K$ wie $B$ sich dem Werthe $1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}$ nähern, und dass dieses um so eher eintritt, je grösser die zeitliche Dämpfung $\gamma$ ist. Je kleiner diese Dämpfung $\gamma$ ist, um so grösser wird die Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten und Bäuche; man kann nach diesen Betrachtungen nicht quantitativ genau, aber wohl schätzungsweise $\gamma$ aus $\bar{k}$ finden.

In folgender Tabelle stelle ich die nach (63) und (64) berechneten Knoten- bezw. Bauchstärken für verschiedene Werthe von $\gamma$ zusammen.

**Knoten- und Bauchstärken für verschiedene zeitliche Dämpfung.**

$\gamma = 0,4$:

| Knoten | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bäuche | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 |
| $K$ | 5,52 | | 3,32 | | 2,60 | | 2,27 | | 2,10 | | 2,00 | | 1,94 | | 1,90 | |
| $B$ | | 1,27 | | 1,45 | | 1,57 | | 1,66 | | 1,71 | | 1,75 | | 1,77 | | 1,80 |

$\gamma = 0,2$:

| Knoten | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bäuche | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 |
| $K$ | 10,50 | | 5,76 | | 4,21 | | 3,46 | | 3,00 | | 2,72 | | 2,52 | | 2,38 | |
| $B$ | | 1,16 | | 1,29 | | 1,40 | | 1,49 | | 1,57 | | 1,63 | | 1,68 | | 1,72 |

Bei sehr kleinen Werthen von $\gamma$ kann man für die anfänglichen Knoten und Bäuche $e^{k\gamma} = 1 + k\gamma$ setzen. Dann wird (63′) und (64′):

$$K_k = \frac{2}{k\gamma}, \quad B_k = 1 + k\gamma. \tag{65}$$

Der Index $k$ bezeichnet die Ordnungszahl des Knotens bezw. Bauches.

Bei einiger Empfindlichkeit des Wellenindicators und geringen Werthen von $\gamma$ müssen sehr viele Knoten und Bäuche zu beobachten sein. So wäre für $\gamma = 0,10$ und $k = 30$:

$$K_{30} = 2,11\,; \quad B_{30} = 1,95\,.$$

Es müssten also 30 Knoten zu constatiren sein, wenn der Wellenindicator einen Unterschied von 10% in den Amplituden erkennen lässt. — Für $\gamma = 0,05$ würde folgen:

$$K_{30} = 2,57; \quad B_{30} = 1,78\,.$$

Man kann leicht aus der Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten die Dämpfung $\gamma$ berechnen, wenn man die Empfindlichkeit des Wellenindicators kennt. Er möge so empfindlich sein, dass das Verhältniss von $K$ zu $B$ mindestens den Werth $1 + \nu$ haben muss, falls

der Unterschied der Stärke noch gerade wahrgenommen werden kann. $\nu$ ist ein quantitatives Maass für die Empfindlichkeit. Dann bestimmt sich $\gamma$ nach (63') und (64') aus:

$$(66) \qquad \frac{K_{\bar{k}}}{B_{\bar{k}}} = \frac{1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}}{(1 - e^{-\bar{k}\gamma})\left[1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}(1 - e^{-\bar{k}\gamma})\right]} = 1 + \nu\,.$$

Hieraus ist $\gamma$ zu berechnen. Wenn die Empfindlichkeit bedeutend ist, so ist $\nu$ so klein, dass man $\nu^2$ gegen 1 vernachlässigen kann. Mit $\nu$ ist die Zahl $e^{-\bar{k}\gamma} = \mu$ von gleicher Grössenordnung, wie aus (66) folgt. Man kann daher auch $\mu^2$ gegen 1 vernachlässigen. Es ergiebt sich dann aus (66):

$$(66') \qquad e^{-\bar{k}\gamma}\,\frac{1 + 2e^{-\frac{\gamma}{2}}}{1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}} = \nu\,,$$

oder näherungsweise, da $\gamma$ meist klein ist, falls man $\frac{\gamma}{4}$ gegen 3 vernachlässigt:

$$\tfrac{3}{2}e^{-\bar{k}\gamma} = \nu\,,$$

$$(66'') \qquad \gamma = \frac{-\lg\text{nat}\,\frac{2}{3}\nu}{\bar{k}}\,.$$

Nun war für die von mir in den eingangs citirten Arbeiten gewählte Versuchsanordnung $\bar{k} = 31$. Nimmt man $\bar{k} = 30$ an, um ganz sicher zu sein, so folgt:

$$\begin{aligned}
\text{für } \nu &= \phantom{0}1\,\% = 0{,}01 : \gamma = 0{,}167\\
\nu &= \phantom{0}2\,\% = 0{,}02 : \gamma = 0{,}144\\
\nu &= \phantom{0}3\,\% = 0{,}03 : \gamma = 0{,}131\\
\nu &= \phantom{0}4\,\% = 0{,}04 : \gamma = 0{,}121\\
\nu &= \phantom{0}5\,\% = 0{,}05 : \gamma = 0{,}113\\
\nu &= 10\,\% = 0{,}10 : \gamma = 0{,}090
\end{aligned}$$

Wie man hieraus ersieht, ändert sich $\gamma$ nur wenig mit $\nu$, und man könnte schon hiernach $\gamma$ zwischen den Grenzen 0,1 und 0,2 bestimmt ansehen.

Wenn jedoch ein solcher Schluss auf $\gamma$ aus der Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten zulässig sein soll, so müssen die bisherigen Betrachtungen vervollständigt werden, da bei grossem $\beta$ der galvanische Widerstand der Paralleldrähte zu berücksichtigen ist. Es ergiebt sich aus ihm eine örtliche Dämpfung (Absorption) der Wellen.

Weiter unten soll der Einfluss des galvanischen Widerstandes mit berücksichtigt werden. Zunächst aber mögen noch zwei andere Dinge besprochen werden.

### 4) Einfluss des Wellenindicators.

In den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, dass der Wellenindicator (die Vacuumröhre) die Wellen gar nicht störe. Streng genommen kann das nie der Fall sein, denn ein geringer Theil der Energie der Wellen geht nothwendig auf den Indicator über, wenigstens wenn man nicht gerade, wie in den Bauchlagen der Brücke $B_2$, das Fehlen der Wellenanzeige benutzen will. Bei den Wellenindicatoren, welche, wie die hier angewandte Zehnder-sche Röhre (ebenso ein angelegtes Elektrometer, oder Bolometer mit Rubens'schen Flaschen) auf die elektrische Kraft ansprechen, äussert sich ihr Einfluss dadurch, dass an der Stelle ihres Anlegens eine gewisse Capacität an die Paralleldrähte geschaltet ist. Man kann den Einfluss einer solchen berechnen. Die Capacität bewirkt, dass die erste Knotenlage der Brücke $B_2$ noch näher an die feste Brücke $B_1$ heranrückt. Durch eine solche Beobachtung hat man daher ein Mittel, die Grösse der Beeinflussung der Wellen durch den Wellenindicator festzustellen. Bei der als Resonator gebrauchten Zehnder'schen Röhre, welche mit allen Theilen um mindestens mehrere mm von den Paralleldrähten entfernt war, war dieser Einfluss sehr gering, die Entfernung der ersten Knotenlage der Brücke $B_2$ von der Brücke $B_1$ war nahezu gleich $\frac{1}{2}\lambda$, vermindert um die doppelte Brückenverkürzung. Im Folgenden ist daher eine etwaige Beeinflussung der Wellen durch den Indicator nicht weiter berücksichtigt. — Es ist eben beim Gebrauch einer Vacuumröhre sehr günstig, dass die Leuchterscheinung wenig Energie verbraucht; bei Anwendung eines, selbst möglichst klein construirten Elektrometers ist eine viel grössere Capacität an die Drähte angelegt und die Beeinflussung der Wellen nicht zu vernachlässigen.

### 5) Oberschwingungen des Erregers.

Es ist eine oft discutirte Streitfrage, ob ein Hertz'scher Erreger Wellen von einheitlicher Periode aussendet oder nicht. Letzteres

glaubten SARASIN und DE LA RIVE[1]) annehmen zu müssen, um die Erscheinung der multiplen Resonanz zu erklären, d. h. des Umstandes, dass verschiedene Resonatoren, die von demselben Erreger erregt werden, Schwingungsdauern aufweisen, welche sich fast nur nach den Abmessungen des jeweiligen Resonators richten, während POINCARÉ[2]) und BJERKNESS[3]) darauf hingewiesen haben, dass die Erscheinung der multiplen Resonanz erklärt werden kann durch die Annahme, dass der Erreger eine Schwingung von einheitlicher Periode entsendet, die aber viel stärker gedämpft ist, als die Resonatorschwingung. In der That kann man ja auch mit Hülfe der Darstellung durch eine Fourier'sche Reihe eine Schwingung der Form $e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cos 2\pi\frac{t}{T}$ als eine Superposition von ungedämpften Schwingungen continuirlich verschiedener Perioden und Amplituden auffassen. — Durch die von mir ausgeführten Versuche[4]) lässt sich nun, wie ich glaube, die POINCARÉ-BJERKNESS'sche Ansicht dahin ergänzen[5]), dass der Erreger zwar nicht continuirlich verschiedene Perioden entsendet, aber wohl eine Reihe harmonischer Obertöne besitzt, sodass seine Schwingung mathematisch darstellbar ist als:

$$P = A_1 \cdot e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cos 2\pi\frac{t}{T} + A_2 \cdot e^{-2\gamma'\frac{t}{T}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} + \delta'\right)$$
$$+ A_3 \cdot e^{-3\gamma''\frac{t}{T}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{3}T} + \delta''\right) + \cdots$$

Denn wenn der Wellenindicator[6]) um $\frac{1}{8}\lambda$ hinter der festen Brücke $B_1$ angebracht wurde, so zeigte die Brücke $B_2$ Knotenlagen nahezu bei $2\beta = \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$; falls der Wellenindicator bei $\frac{1}{12}\lambda'$ hinter $B_1$ angebracht wurde, so waren die Knotenlagen von $B_2$: $2\beta = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ Dies wäre nicht möglich, wenn der Erreger nur gedämpfte Schwin-

1) SARASIN et DE LA RIVE, Arch. de Genève (3) **23**, p. 113, 1890.

2) H. POINCARÉ, Arch. de Genève (3) **25**, p. 609, 1891. — Elektricität und Optik, deutsch von JÄGER und GUMLICH, Berlin 1891, II. Bd. Note V, p. 201.

3) V. BJERKNESS, Wied. Ann. **44**, p. 92, 1891. — **54**, p. 58, 1895.

4) P. DRUDE, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1895, p. 332. — Wied. Ann. **55**, p. 636, 1895. — »Arbeit I«, p. 13.

5) Diese Ergänzung ist von BJERKNESS selbst in Wied. Ann. **54**, p. 61, 1895 als möglich hingestellt.

6) Er wurde als Vacuumröhre ohne Resonanz verwendet.

gungen der Periode $T$ entsendet. Er muss auch Schwingungen der Periode $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T$ entsenden. Diese Schwingungen nehmen bei der von mir gewählten Form des Erregers sehr schnell an Intensität ab, sie lassen sich nur durch Zuhülfenahme längerer[1]) Brücken $B_1$ beobachten und über die zweite Oberschwingung hinaus habe ich bisher nicht beobachten können. Deshalb brauchen sie bei unseren Betrachtungen nicht weiter berücksichtigt zu werden, zumal noch der günstige Umstand hinzukommt, dass bei der gewählten Lage des Wellenindicators ($\frac{1}{4}\lambda$ hinter $B_1$) der erste Oberton gar nicht auf den Indicator wirken kann, da für ihn der Indicator in einem Knoten elektrischer Kraft liegt.

### B. Berücksichtigung des Leitungswiderstandes der Drähte.

#### 1) Integration der Differentialgleichungen.

Den Ausgangspunkt bildet die Gleichung (6) auf pag. 65, in welcher für $w$ der Widerstand der Längeneinheit der Drähte einzusetzen ist. Dabei ist zu berücksichtigen, dass derselbe für schnelle Schwingungen höher ist, als für constante Ströme, da sich erstere vorzugsweise nach der Oberfläche des Drahtes zusammendrängen. Nach den Entwickelungen von RAYLEIGH[2]) und STEFAN[3]) ist

$$w = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{\sigma T}} \tag{67}$$

für einen sehr schnellen Wechselstrom der Periode $T$. Dabei bedeutet $R$ den Radius des Drahtes, d. h. seine halbe Dicke, $\sigma$ seine specifische Leitfähigkeit gemessen nach absolutem elektromagnetischem Maasse. ($\sigma = 1{,}063 \cdot 10^{-5}$ für Quecksilber.)

Setzt man daher

$$\frac{1}{2R\,\lg\frac{d}{R}\sqrt{\sigma T}} = \psi,$$

so wird die Differentialgleichung (6):

---

1) Aus dem oben p. 71 erörterten Grunde wird die Intensität grösser, je länger die Brücke $B_1$ ist.

2) LORD RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **21**, p. 369, 1886.

3) J. STEFAN, Wied. Ann. **41**, p. 421, 1890. Vgl. auch das Buch »Physik d. Äthers« vom Verf. p. 244, 388.

(68) $$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \psi \frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \, .$$

Das Integral derselben lautet für periodische gedämpfte Schwingungen, d. h. wenn

$$i = e^{\alpha \frac{t}{T}} f(z):$$

(69) $$i = A_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}} + A_2 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}} ,$$

wobei $\lambda = cT$, $\alpha'^2 = \alpha^2 + \psi \alpha T$ ist.

$\alpha'$ ist also bestimmt durch

(69') $$\alpha' = \alpha \sqrt{1 + \frac{\psi T}{\alpha}} \, .$$

Nun ist zu berücksichtigen, dass der Modul der complexen Grösse $\psi T : \alpha$ klein gegen 1 ist. So ist z. B. bei den von mir angestellten Versuchen, die mit Kupferdrähten ($\sigma = 60 \, . \, 10^{-5}$) von $R = \frac{1}{2}$ mm und der Distanz $d = 1{,}8$ cm bei $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = 25 \, . \, 10^{-10}$ angestellt sind:

$$\psi T = 0{,}0057 \, .$$

Das Quadrat dieser Grösse ist sehr klein gegen den Modul von $\alpha$, d. h. $\gamma^2 + 4\pi^2$. Man kann daher (69') schreiben als

(69'') $$\alpha' = \alpha + \frac{\psi T}{2} = \alpha + \tau \, .$$

Daher ist das Integral von (68):

(70) $$\begin{cases} i = A_1 \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} \cdot e^{-\tau \frac{z}{\lambda}} + A_2 \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)} \cdot e^{+\tau \frac{z}{\lambda}} , \\ \text{wobei ist:} \\ \tau = \dfrac{\sqrt{T}}{4 R \lg \frac{d}{R} \sqrt{\sigma}} \, . \end{cases}$$

Für meine Versuche ist $\tau = 0{,}00285$. Der erste Term in (70) entspricht Wellen, die sich nach der positiven $z$-Axe fortpflanzen, der zweite Wellen, die sich nach der negativen $z$-Axe fortpflanzen. Man erkennt aus (70), dass die Wellen einer örtlichen Dämpfung (Absorption) unterliegen, die zu $\tau$ proportional ist. Dies ist der einzige Einfluss des galvanischen Widerstandes der Drähte, die Wellenlänge $\lambda$ bleibt von ihm unbeeinflusst, so lange der Widerstand so gering ist, d. h. die Drähte eine so hohe specifische

Leitfähigkeit besitzen, dass $\tau$ klein ist gegen $\alpha$. Bei allen Versuchen, bei denen schnelle Schwingungen in Kupferdrähten fortgeleitet werden, ist diese Bedingung erfüllt. — Man erkennt zugleich aus (69′), dass für wesentliche grössere Drahtwiderstände, bei denen

$$\sqrt{1 + \frac{\psi T}{\alpha}} \text{ nicht gleich } 1 + \frac{\psi T}{2\alpha} \text{ zu setzen ist,}$$

$\alpha'$ sich auch im imaginären Bestandtheil von $\alpha$ unterscheiden würde. Dies würde aber eine Aenderung der Wellenlänge der Schwingungen bedeuten, und zwar würde, wie eine nähere einfache Untersuchung ergiebt, die Wellenlänge durch Vorhandensein eines starken galvanischen Drahtwiderstandes verkleinert.

Wir müssen jetzt alle unsre bisherigen Rechnungen einer Revision unterwerfen, inwieweit sie durch die Existenz des Widerstandes, d. h. der Grösse $\tau$, modificirt werden.

2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke.

Die Brückenbedingungen (14) und (15) (pag. 67) bleiben natürlich hier erhalten, nur wird die erste Brückenbedingung (13), die aus der Gleichung (8) floss, unter Berücksichtigung des endlichen galvanischen Widerstandes $w'$ der Brücke:

$$i'w' + Ll\frac{\partial i'}{\partial t} = 4c\,\mathfrak{e}\lg\frac{d}{R}. \tag{71}$$

Dabei bezeichnet $w'$ den Widerstand der Brücke. Ist dieselbe von Draht des Radius $R'$ gebildet, so ist für Schwingungen gemäss (67), da sich $w'$ nicht auf die Längeneinheit beziehen sollte:

$$w' = \frac{l}{R'\sqrt{\sigma' T}}.$$

$\sigma'$ ist die specifische Leitfähigkeit des Materials der Brücke.

Gemäss (69) schreiben wir die elektrische Ladung $\mathfrak{e}_e$ der einfallenden Welle in der Form:

$$\mathfrak{e}_e = \alpha' A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{z}{\lambda}},$$

$\alpha' A$ würde die Amplitude der einfallenden Ladungswelle sein. Infolge der Gleichung (5) (pag. 65), welche natürlich bestehen bleibt, ergiebt sich die einfallende Stromwelle zu

$$i_e = \alpha A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}}.$$

Durch Reflexion an der Brücke möge der complexe Reflexionsfactor $r$ entstehen (der oben auf pag. 68 in der Form $A_r \cdot e^{\alpha \Delta}$ geschrieben ist). Dann ist die reflectirte Ladungswelle:

$$\mathfrak{e}_r = (\alpha' A)\, r \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}},$$

die reflectirte Stromwelle nach (5):

$$i_r = -(\alpha A)\, r \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}}.$$

Schliesslich sollen die über die Brücke weitergehenden Wellen in der Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{e}'' = (\alpha' A)\, \delta \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}}$$

$$i'' = (\alpha A)\, \delta \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}}.$$

Die Gleichung (15) $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_e + \mathfrak{e}_r = \mathfrak{e}''$ für $z = b = \beta\lambda$ ergiebt:

$$e^{-\alpha'\beta} + r \cdot e^{+\alpha'\beta} = \delta \cdot e^{-\alpha'\beta},$$

die Gleichung (14) $i' = i - i''$ für $z = \beta\lambda$:

$$i' = \alpha A \left(e^{-\alpha'\beta} - r \cdot e^{+\alpha'\beta} - \delta \cdot e^{-\alpha'\beta}\right) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}},$$

d. h. wenn man $\delta \cdot e^{-\alpha'\beta}$ mit Hülfe der vorigen Gleichung eliminirt:

$$i' = -2r \cdot \alpha A \cdot e^{+\alpha'\beta} \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}}.$$

Die Brückenbedingung (71) ergiebt daher:

$$-w' \cdot 2r\alpha \cdot e^{+\alpha'\beta} - Ll \cdot 2r\alpha \cdot \frac{\alpha}{T} \cdot e^{+\alpha'\beta} = 4c \lg \frac{d}{R}\, \alpha' \left(e^{-\alpha'\beta} + r \cdot e^{+\alpha'\beta}\right).$$

Dividirt man diese Gleichung durch $4c \lg \frac{d}{R}$, setzt nach (69) $\lambda = cT$, ferner nach (30) $\zeta = L : 2 \lg \frac{d}{R}$, führt schliesslich für $w'$ seinen oben angegebenen Werth ein, und setzt

$$\tau' = \frac{\sqrt{T}}{4R' \lg \frac{d}{R} \sqrt{\sigma'}},$$

so entsteht:

$$- r \cdot e^{+\alpha'\beta} \cdot \alpha \left(2\tau' \frac{l}{\lambda} + \alpha\zeta \frac{l}{\lambda}\right) = \alpha' \left(e^{-\alpha'\beta} + r \cdot e^{+\alpha'\beta}\right)$$

oder:

$$r \cdot e^{+\alpha'\beta} \left(\alpha' + \alpha \cdot \alpha\zeta \frac{l}{\lambda} + \alpha \cdot 2\tau' \frac{l}{\lambda}\right) = - \alpha' \cdot e^{-\alpha'\beta}.$$

Nun ist $\frac{l}{\lambda}$ eine kleine Grösse (z. B. bei $l = 1,8$ cm, $\lambda = 75$ cm, wie es bei den Versuchen vorlag, ist $l : \lambda = 0,024$). Daher ist es durchaus unbedenklich, für $\alpha \,.\, \alpha\zeta \frac{l}{\lambda}$ zu schreiben $\alpha' \,.\, \alpha\zeta \frac{l}{\lambda}$, da $\alpha'$ nach (69″) sich von $\alpha$ nur um die kleine Grösse $\tau$ unterscheidet. Das dritte Glied in der Klammer auf der linken Seite obiger Gleichung ist aber unbedenklich fortzulassen, da es das Product zweier kleiner Grössen, nämlich $\tau'$ und $\frac{l}{\lambda}$, ist. Daher wird schliesslich:

$$(72) \qquad r = - \frac{e^{-2\alpha'\beta}}{1 + \alpha\zeta \frac{l}{\lambda}}.$$

Ein Vergleich dieser Formel mit der oben auf pag. 69 ohne Berücksichtigung des galvanischen Drahtwiderstandes für $r$ abgeleiteten Formel (28) lehrt, dass in beiden Formeln nur der Exponent von $e$ verschieden ist. Er ist nämlich hier: $-2\alpha'\beta$, während er dort $-2\alpha\beta$ war. Der Widerstand $w'$ der Brücke kommt also gar nicht in Betracht, selbst wenn der der Drähte berücksichtigt wird.

Unter Benützung der oben durch (31) oder (33) definirten Hilfsgrössen $\varrho$ und $\varphi$ wird also jetzt:

$$(72') \qquad r = - \varrho \cdot e^{-\alpha\varphi - 2\alpha'\beta}.$$

Wie leicht zu ersehen ist, bleibt $\delta$ gegen früher unverändert, [vgl. die frühere Formel (29)].

### 3) Vorhandensein zweier Brücken.

Die früher angestellten Betrachtungen lassen sich leicht modificiren. Es treten zwei Reflexionsfactoren auf: $r$ an der Brücke $B_2$, wobei dann der Werth (72′) zu benutzen ist an Stelle des früheren (40), und der Factor $r'$ an der Brücke $B_1$, der denselben Werth, wie in (42) besitzt, nämlich:

$$(73) \qquad r' = - \varrho e^{-\alpha\varphi}.$$

Bei Benutzung der gleichen Bezeichnungen, wie oben auf pag. 75, wird jetzt [vgl. die dortigen Formeln (39), (41), (43), (44)]:

$$P_1 = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \quad \text{von } t = pT \text{ bis } t = \infty,$$

(74)
$$P_2 = r \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha' p} \quad \text{von } t = (2\beta - p)\,T \text{ bis } \infty,$$

$$P_3 = rr' \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \quad \text{von } t = (2\beta + p)\,T \text{ bis } \infty,$$

$$P_4 = r^2 r' \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha' p} \quad \text{von } t = (4\beta - p)\,T \text{ bis } \infty,$$

etc. etc.

Für die gesammte elektrische Kraft erhält man daher folgenden Verlauf [vgl. die früheren Formeln (45)]:

(75)
$$p < \frac{t}{T} < 2\beta - p : P = e^{\alpha\frac{t}{T}} \,.\, e^{-\alpha' p},$$

$$2\beta - p < \frac{t}{T} < 2\beta + p : P = e^{\alpha\frac{t}{T}} \cdot \left\{ e^{-\alpha' p} + r \cdot e^{+\alpha' p} \right\},$$

$$2\beta + p < \frac{t}{T} < 4\beta - p : P = e^{\alpha\frac{t}{T}} \cdot \left\{ e^{-\alpha' p}(1 + rr') + r \,.\, e^{+\alpha' p} \right\},$$

$$4\beta - p < \frac{t}{T} < 4\beta + p : P = e^{\alpha\frac{t}{T}} \cdot \left\{ e^{-\alpha' p}(1 + rr') + r \cdot e^{+\alpha' p}(1 + rr') \right\},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$2h\beta + p < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta - p :$$

$$P = e^{\alpha\frac{t}{T}} \left\{ e^{-\alpha' p} \left[ 1 + rr' + (rr')^2 + \cdots + (rr')^h \right] + r \cdot e^{+\alpha' p} \left[ 1 + rr' + (rr')^2 + \cdots + (rr')^{h-1} \right] \right\},$$

$$2(h+1)\beta - p < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta + p :$$

$$P = e^{\alpha\frac{t}{T}} \left\{ e^{-\alpha' p} + r \cdot e^{+\alpha' p} \right\} \cdot \left\{ 1 + rr' + (rr')^2 + \cdots + (rr')^h \right\} \cdot$$

Die Summation liefert für das erste Zeitintervall I:

$$(76) \qquad P_{\mathrm{I}} = \frac{e^{\alpha\frac{t}{T}} \cdot e^{-\alpha' p}}{rr' - 1} \left\{ (rr')^{h+1} - 1 + r \cdot e^{2\alpha' p} \left[ (rr')^h - 1 \right] \right\},$$

für das zweite Zeitintervall:

$$(77) \qquad P_{\mathrm{II}} = \frac{e^{\alpha\frac{t}{T}} \cdot e^{-\alpha' p}}{rr' - 1} \left( 1 + r \cdot e^{2\alpha' p} \right) \left( (rr')^{h+1} - 1 \right) \cdot$$

Dabei ist nach (72') und (73):

$$(78) \quad rr' = \varrho^2 \cdot e^{-2\alpha\varphi - 2\alpha'\beta} = \varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi + \beta) - 2\tau\beta} \,.\, e^{-4\pi(\varphi + \beta)\sqrt{-1}} \,.$$

Maxima der $P$ ergeben sich für diejenigen Brückenlagen $\beta$, für welche $rr'$ reell und positiv ist (Knotenlagen), Minima für diejenigen $\beta$, für welche $rr'$ reell und negativ ist (Bauchlagen). Wie aus (78) hervorgeht, stimmen die Knoten- und Bauchlagen mit den früher durch die Formeln (50) und (52) bestimmten überein. Es tritt aber hier an Stelle der früheren Formeln (54):

$$(79)\qquad \begin{aligned} rr' &= +\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \cdot e^{-2\tau\beta} \text{ für Knoten,} \\ rr' &= -\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \cdot e^{-2\tau\beta} \text{ für Bauch.} \end{aligned}$$

Nach (72') und (78) ist ferner:

$$r = -\varrho \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\tau\beta} \cdot e^{\alpha\varphi} = -\varrho \cdot e^{\gamma(\varphi+2\beta)-2\tau\beta} \cdot e^{i2\pi\varphi} \text{ für Knoten,}$$

$$r = +\varrho \cdot e^{\gamma(\varphi+2\beta)-2\tau\beta} \cdot e^{i2\pi\varphi} \text{ für Bauch.}$$

Daher wird

$$r \cdot e^{2\alpha' p} = \mp \varrho \cdot e^{\gamma(\varphi+2\beta-2p)+2\tau(p-\beta)} \cdot e^{i2\pi(\varphi+2\pi)}.$$

Gerade wie oben [vgl. Formel (61)] gezeigt wurde, sind die Maxima von $P$ für diejenigen Punkte $\mathfrak{P}(p)$ zu erwarten, für welche

$$e^{i2\pi(\varphi+2p)} = -1,$$

d. h.

$$(80)\qquad 2p = \tfrac{1}{2} - \varphi$$

ist. Dann wird also

$$(81)\qquad r \cdot e^{2\alpha' p} = \pm \varrho \cdot e^{\gamma(2\varphi+2\beta-\frac{1}{2})} \cdot e^{\tau(\frac{1}{2}-\varphi-2\beta)}.$$

Es ergiebt sich gerade wie oben, dass in dem (zugleich länger dauernden) Zeitintervall I die absoluten Maxima der $P$ liegen. Für diese folgt daher aus (76), (79), (81):

für Knoten:

$$(82)\qquad P_{\mathrm{I}} = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cdot e^{(\gamma-\tau)p}.$$

$$e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-p\right)} \frac{[\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\tau\beta}]^{h+1} - 1 + \varrho \cdot e^{\gamma(2\varphi+2\beta-\frac{1}{2})+\tau(\frac{1}{2}-\varphi-2\beta)} \{[\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\tau\beta}]^h - 1\}}{\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \cdot e^{-2\tau\beta} - 1},$$

für Bauch:

$$(83)\qquad {}_{\mathrm{I}}P = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cdot e^{(\gamma-\tau)p}.$$

$$e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-p\right)} \frac{(-1)^h[\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\tau\beta}]^{h+1} + 1 + \varrho \cdot e^{\gamma(2\varphi+2\beta-\frac{1}{2})+\tau(\frac{1}{2}-\varphi-2\beta)} \{(-1)^h[\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\tau\beta}]^h - 1\}}{\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \cdot e^{-2\tau\beta} + 1}.$$

Führt man wiederum für dieses Zeitintervall I wie nach (55) ein

$$\frac{t}{T} = 2h\beta + p + \eta\,,$$

so wird, wenn man von dem unwesentlichen[1]) Factor $e^{-\gamma\eta-\tau p}$ absieht, und die Abkürzungen einführt [vgl. die früheren Formeln (57)]:

$$(84) \qquad \varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = f, \quad f \cdot e^{-2\tau\beta} = f', \quad e^{2\gamma\beta} = g\,,$$

die Amplitude in den Knoten:

$$(85) \quad A_{\mathrm{I}} = \frac{g}{f'g-1}\left\{f'^{h+1} - g^{-(h+1)} + [f'^h - g^{-h}]\frac{f'}{\varrho}\cdot e^{-\frac{\gamma}{2}+2p\tau}\right\},$$

die Amplitude in den Bäuchen:

$$(86) \quad {}_{\mathrm{I}}A = \frac{g}{f'g+1}\left\{(-1)^h f'^{h+1} + g^{-(h+1)} + [(-1)^h f'^h - g^{-h}]\frac{f'}{\varrho}\cdot e^{-\frac{\gamma}{2}+2p\tau}\right\}.$$

Der Unterschied dieser Formeln gegen die früheren analogen (62) liegt im wesentlichen darin, dass das frühere $f$ hier ersetzt ist durch $f'$. Dieser Unterschied ist von Wichtigkeit, denn die in den früheren Formeln (63) und (64) erreichte Einfachheit ist dadurch gewonnen, dass man $f$ gleich 1 setzen konnte, und dass dann das Maximum der Amplitude $A_{\mathrm{I}}$ für $h = \infty$ eintrat. Wie aus (84) hervorgeht, kann man $f'$ für einigermassen grosse $\beta$, d. h. für höhere Knotenlagen der Brücke $B_2$, nicht gleich 1 setzen, sondern $f'$ ist stets kleiner als 1. Daher tritt auch das Maximum von $A_{\mathrm{I}}$ nicht für $h = \infty$ ein, sondern für eine frühere Zeit, die sich ergiebt, wenn man $\frac{\partial A_{\mathrm{I}}}{\partial h} = 0$ setzt. Der Klammerausdruck in $A_{\mathrm{I}}$ lässt sich schreiben, wenn man noch für $2p\tau$ schreibt $\frac{\tau}{2}$, was gestattet ist, da $\tau\varphi$ zu vernachlässigen ist (cf. oben pag. 90):

$$f'^{h+1}\left(1 + \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho}\right) - g^{-(h+1)}\left(1 + f'g\frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(87) \qquad 1 + \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} = a, \quad 1 + f'g\frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} = a',$$

so ergiebt $\frac{\partial A_{\mathrm{I}}}{\partial h} = 0$ die Gleichung:

$$(88) \qquad a \cdot \lg f' \cdot f'^{h+1} + a' \cdot \lg g \cdot g^{-(h+1)} = 0\,,$$

---

1) Dieser Factor ist deshalb unwesentlich, weil für Knoten und Bauch das Maximum zu gleicher Zeit $\eta$ (nahezu $\eta = 0$) erreicht wird.

d. h. wenn man setzt

$$(87') \qquad -\frac{a' \cdot \lg g}{a \cdot \lg f'} = a'',$$

so folgt

$$(89) \qquad h + 1 = \lg a'' : \lg (f'g).$$

Vermöge der Gleichungen (88) und (89) schreibt sich daher das absolute Maximum von $A_{\mathrm{I}}$, die sogenannte Knotenstärke:

$$(90) \qquad K = \frac{g}{f'g - 1}\, a\, f'^{\lg a'' : \lg (f'g)} \cdot \left(1 + \frac{\lg f'}{\lg g}\right).$$

Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass $h$ seiner Bedeutung nach eine ganze Zahl ist, während es hier so behandelt ist, als ob es eine continuirlich Veränderliche wäre. Die Formel (90) ist daher nur ein Näherungswerth (der allerdings recht genau ist); wenn man den exacten Werth für $K$ berechnen will, so ist für $h$ diejenige positive ganze Zahl zu wählen, welche dem in Gleichung (89) bestimmten Werthe von $h$ möglichst nahe kommt, und dann mit Hülfe dieses $h$ der Werth von $A_{\mathrm{I}}$ nach (85) zu berechnen.

Die Amplitude ${}_{\mathrm{I}}A$ der Bauchlage lässt sich schreiben:

$${}_{\mathrm{I}}A = \frac{g}{f'g + 1}\left\{(-1)^h f'^{h+1}\left(1 + \frac{e^{\frac{\tau - \gamma}{2}}}{\varrho}\right) - g^{-h}\left(f' \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} - \frac{1}{g}\right)\right\}.$$

Da nun $\beta > \frac{1}{2}$, so ist der Factor von $g^{-h}$ positiv. Das absolute Maximum wird also erhalten, wenn $h = 1$ ist. Daher folgt für die Bauchstärke:

$$B = \frac{g}{f'g + 1}\left\{f'^2\left(1 + \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho}\right) + \frac{1}{g}\left(f' \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} - \frac{1}{g}\right)\right\}$$

oder

$$(91) \qquad B = f'\left(1 + \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho}\right) - \frac{1}{g}.$$

Dies wird aber nur richtig sein, wenn $f'$ nicht zu klein ist. Denn wenn $f'$ genügend klein, d. h. $\beta\tau$ genügend gross ist, kann der Werth, den ${}_{\mathrm{I}}A$ für $h = 0$ annimmt, der absolut grösste sein. Dann ist also die Bauchstärke:

$$(91') \qquad B = \frac{g}{f'g + 1}\left\{f' + \frac{1}{g}\right\} = 1.$$

Bei der Discussion der Frage: Wieviel Knoten bezw. Bäuche lassen sich bei bekannter zeitlicher Dämpfung durch Ver-

schiebung der Brücke $B_2$ erkennen? sind wir hier in besserer Lage, als früher, wo wir zur exacten Beantwortung die Empfindlichkeit ($\nu$) des Wellenindicators schätzen mussten. Nach den früheren Betrachtungen war nämlich die Knotenstärke unter allen Umständen, d. h. für alle Werthe von $\beta$, grösser als die Bauchstärke; nach den jetzigen Betrachtungen ist das nicht der Fall. Denn wenn $\beta$ sehr gross ist, so ist die Bauchstärke nach (91') $= 1$, während die Knotenstärke auch nur den Werth 1 besitzt, indem nämlich die an der Brücke $B_2$ reflectirten Wellen selbst nach einmaliger Reflexion schon so starke örtliche Dämpfung erlitten haben, dass sie die durch zeitliche Dämpfung herbeigeführte Amplitudenschwächung der einfallenden Wellen nicht zu compensiren vermögen. Wenn ein Knoten noch erkennbar sein soll, so muss offenbar die Knotenstärke $K > 1$ sein, weil er sich sonst vom benachbarten Bauch an Wirkung nicht unterscheiden würde. Hieraus lässt sich eine obere Grenze $\bar{\bar{k}}$ der Maximalzahl der beobachtbaren Knoten exact bestimmen.

Bei Beantwortung der umgekehrten Frage: Wie bestimmt sich aus der Anzahl $\bar{k}$ wirklich beobachtbarer Knoten die zeitliche Dämpfung $\gamma$? kann man eine Schätzung der Empfindlichkeit $\nu$ des Wellenindicators auch hier nicht entbehren, weil die thatsächliche Anzahl $\bar{k}$ beobachtbarer Knoten unter jenem soeben erwähnten, theoretisch ohne Kenntniss von $\nu$ bestimmten, oberen Grenzwerth $\bar{\bar{k}}$ liegt.

Die Berechnung eines Experimentes soll dies illustriren. Es ist zunächst zu bemerken, dass die Formel (90) wohl anzuwenden ist, wenn $f'$ nahezu gleich 1 ist, d. h. wenn die Brücke $B_2$ nicht sehr weit (etwa bis 10 halbe Wellenlängen) von $B_1$ entfernt liegt. Denn dann wird die volle Knotenstärke $K$ erst für grosses $h$, d. h. zu später Zeit nach Einsetzen des Erregers, erreicht. — Für grosse $\beta$, d. h. weite Entfernungen zwischen den Brücken $B_2$ und $B_1$, für welche $f'$ merklich kleiner als 1 ist, ist es praktischer, nach den Formeln (75) die $P$ direct für die einzelnen Zeitintervalle zu berechnen, wobei man die Rechnung durch Aufstellung gewisser Recursionsformeln sehr bequem gestalten kann. Dies soll zunächst im Folgenden geschehen, und zwar sollen auch die Bauchlagen in dieser Weise mit behandelt werden, obgleich für sie die Formel (91)

bequem ist. Man gewinnt aber so die beste Anschauung über den zeitlichen Verlauf der $P$.

Für einen Knoten

$$2\beta = k - 2\varphi, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

werden nach (75) die Amplituden der $P$ für die dort angeführten Zeitintervalle, wenn man die Factoren $e^{-\gamma\eta-\tau p}$, bezw. $e^{-\gamma\vartheta-\tau p}$ fortlässt[1]), wobei $\eta$ und $\vartheta$ nach den Gleichungen (55), (55') und (56), (56') definirt sind:

$$A_1 = 1,$$

$$A_2 = e^{\varphi\gamma}\left\{e^{-k\gamma}\cdot e^{\frac{\gamma}{2}} + e^{-k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot\varrho\right\},$$

$$A_3 = e^{2\varphi\gamma}\left\{e^{-k\gamma} + e^{-k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot\varrho e^{-\frac{\gamma}{2}} + \varrho^2\cdot e^{-k\tau}\right\} = e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})}\cdot A_2 + e^{-k\tau}\cdot\varrho^2 e^{2\varphi\gamma},$$

$$A_4 = e^{3\varphi\gamma}\left\{e^{-2k\gamma}\cdot e^{\frac{\gamma}{2}} + \varrho\cdot e^{-k\gamma}\cdot e^{-k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}} + \varrho^2\cdot e^{\frac{\gamma}{2}}\cdot e^{-k\gamma}\cdot e^{-k\tau} + \varrho^3\cdot e^{-2k\tau} + e^{\frac{\tau}{2}}\right\}$$

$$= e^{\gamma(\varphi+\frac{1}{2})}\cdot e^{-k\gamma}\cdot A_3 + e^{-2k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot\varrho^3 e^{3\varphi\gamma},$$

$$A_5 = e^{4\varphi\gamma}\left\{e^{-2k\gamma} + \varrho e^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot e^{-k\gamma}\cdot e^{-k\tau} + \varrho^2\cdot e^{-k\gamma}\cdot e^{-k\tau} + \varrho^3\cdot e^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot e^{-2k\tau} + \varrho^4\cdot e^{-2k\tau}\right\}$$

$$= e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})}\cdot A_4 + \varrho^4\cdot e^{4\varphi\gamma}\cdot e^{-2k\tau},$$

$$A_6 = e^{\gamma(\varphi+\frac{1}{2})}\cdot e^{-k\gamma}\cdot A_5 + e^{-3k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\varrho^5\cdot e^{5\varphi\gamma},$$

etc. etc.

Setzt man also

$$(92)\qquad \begin{gathered} e^{\gamma(\varphi+\frac{1}{2}-k)} = m, \quad e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})} = m', \\ \varrho^2\cdot e^{2\varphi\gamma}\cdot e^{-k\tau} = n, \quad e^{\frac{\tau}{2}} : \varrho e^{\varphi\gamma} = n', \end{gathered}$$

so erhält man folgende Recursionsformeln:

$$(93)\qquad \begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= m\cdot A_1 + n\cdot n', \\ A_3 &= m'\cdot A_2 + n, & A_4 &= m\cdot A_3 + n^2\cdot n', \\ A_5 &= m'\cdot A_4 + n^2, & A_6 &= m\cdot A_5 + n^3\cdot n', \\ A_7 &= m'\cdot A_6 + n^3, & A_8 &= m\cdot A_7 + n^4\cdot n', \end{aligned}$$

etc. etc.

---

1) Man kann diese Factoren fortlassen, weil $\eta$ und $\vartheta$ für den Maximalwerth der Knoten- und Bauchstärken gleiche Werthe besitzen. cf. oben pag. 93, Anm. 1.

Für einen Bauch ergiebt sich ebenso, da

$$2\beta = k + \tfrac{1}{2} - 2\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\begin{aligned}
{}_1A &= 1, \\
{}_2A &= e^{\gamma(\varphi - k)} - \varrho e^{\gamma\varphi} \cdot e^{-k\tau}, \\
{}_3A &= e^{\gamma(\varphi - \frac{1}{2})} \cdot {}_2A - \varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-k\tau}, \\
{}_4A &= e^{\gamma(\varphi - k)} \cdot {}_3A + \varrho^3 \cdot e^{3\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-2k\tau}, \\
{}_5A &= e^{\gamma(\varphi - \frac{1}{2})} \cdot {}_4A + \varrho^4 \cdot e^{4\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{2\tau}{2}} \cdot e^{-2k\tau}, \\
{}_6A &= e^{\gamma(\varphi - k)} \cdot {}_5A - \varrho^5 \cdot e^{5\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{2\tau}{2}} \cdot e^{-3k\tau}, \\
{}_7A &= e^{\gamma(\varphi - \frac{1}{2})} \cdot {}_6A - \varrho^6 \cdot e^{6\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{3\tau}{2}} \cdot e^{-3k\tau},
\end{aligned}$$

etc. etc.

Setzt man also:

$$e^{\gamma(\varphi - k)} = m'', \quad -\varrho^2 \cdot e^{2\varphi\gamma} \cdot e^{-\tau(\frac{1}{2} + k)} = n'', \tag{94}$$

so wird

$$\begin{aligned}
&{}_1A = 1, & &{}_2A = m'' \cdot {}_1A + n'' \cdot n', \\
&{}_3A = m' \cdot {}_2A + n'', & &{}_4A = m'' \cdot {}_3A + n''^2 \cdot n', \\
&{}_5A = m' \cdot {}_4A + n''^2, & &{}_6A = m'' \cdot {}_5A + n''^3 \cdot n', \\
&{}_7A = m' \cdot {}_6A + n''^3, & &{}_8A = m'' \cdot {}_7A + n''^4 \cdot n',
\end{aligned} \tag{95}$$

etc. etc.

Bei meiner Versuchsanordnung[1]) waren nun $k = 31$ Knoten beobachtbar, es möge aber nur $k = 30$ gesetzt werden, um sicher zu sein, dass der aus den Resultaten jener Versuche geschätzte Werth von $\gamma$ nicht zu klein ist. Ferner ist $\tau = 0{,}00285$ (pag. 87), und nach (36) $\varphi = 2\delta b : \lambda = 1{,}6 : 75 = 0{,}0213$. Nach pag. 73 ist $\varrho^2 . e^{2\gamma\varphi} = 1 : 1{,}018$. Dadurch wird nach (92) und (94):

$$\begin{aligned}
m &= e^{-\gamma \cdot 29{,}48}, & m' &= e^{-\gamma \cdot 0{,}48}, \\
n &= 0{,}902, & n' &= 0{,}992, \\
m'' &= e^{-\gamma \cdot 29{,}98}, & n'' &= -0{,}9005.
\end{aligned}$$

Für $\gamma = 0{,}1$ erhält man daher

$$m = 0{,}0524; \quad m' = 0{,}9531; \quad m'' = 0{,}0499,$$

1) Vgl. »Arbeit I«.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

und folgenden zeitlichen Verlauf der elektrischen Kraft, wenn sich die Brücke $B_2$ im 30ten Knoten, bezw. 30ten Bauch befindet:

Knoten:

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = 0,947$$
$$A_3 = 1,804 \qquad A_4 = 0,900$$
$$A_5 = 1,670 \qquad A_6 = 0,814$$
$$A_7 = 1,508 \qquad A_8 = 0,735$$
$$A_9 = 1,361 \qquad A_{10} = 0,662$$

Bäuche:

$$_1A = +1 \qquad _2A = -0,843$$
$$_3A = -1,703 \qquad _4A = +0,719$$
$$_5A = +1,495 \qquad _6A = -0,648$$
$$_7A = -1,346 \qquad _8A = +0,584$$
$$_9A = +1,222 \qquad _{10}A = -0,524$$

Es ist also die Knotenstärke:

$$K = 1,804\,,$$

die Bauchstärke

$$B = 1,703\,.$$

Der Unterschied von $K$ und $B$ ist 5,5%. — Während also nach pag. 82 bei $k = 30$ ohne Berücksichtigung des Drahtwiderstandes und der Schwächung der Amplitude bei der Reflexion an der Brücke der Unterschied von Knoten und Bauch bei $\gamma = 0,10$ etwa 7,5% beträgt, erscheint er auf 5,5% erniedrigt durch Berücksichtigung jener beiden Correctionsgrössen.

Es folgt ferner:

Für $\gamma = 0,2$: $m = 0,00275$; $m' = 0,909$; $m'' = 0,00249$.

Knoten:

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = 0,898$$
$$A_3 = 1,718 \qquad A_4 = 0,811$$
$$A_5 = 1,550$$

Bäuche:

$$_1A = 1 \qquad _2A = -0,890$$
$$_3A = -1,709$$

$$K = 1,718\,; \quad B = 1,709\,; \quad \frac{K-B}{K} = 0,5\,\%\,.$$

Bayerische Staats-Bibliothek München

Für $\gamma = 0{,}3$ folgt $m' = 0{,}866$,

$$K = 1{,}677,\quad B = 1{,}674,\quad \frac{K-B}{K} = 0{,}18\,\%.$$

Hieraus ergiebt sich, dass $\gamma = 0{,}3$ entschieden zu gross ist, denn der Wellenindicator wird keine Empfindlichkeit von $0{,}2\,\%$ besessen haben. Auch $\gamma = 0{,}2$ erscheint zu hoch, denn $\frac{1}{2}\,\%$ Empfindlichkeit wäre auch unwahrscheinlich. Es wird demnach, ähnlich wie es auch schon oben pag. 83 geschlossen wurde, $\gamma$ zwischen 0,1 und 0,2 liegen.

An den berechneten Beispielen ersieht man, dass die Amplituden mit ungeradem Index, d. h. diejenigen, welche in das oben pag. 76 als I bezeichnete Zeitintervall fallen, grösser sind, als die Amplituden mit geradem Index (Zeitintervall II), was mit den Betrachtungen der pag. 80 im Einklang steht.

Während ferner die Amplituden der elektrischen Kraft für eine Knotenlage sämmtlich positiv erscheinen, sind sie für eine Bauchlage von wechselndem Vorzeichen. Die physikalische Bedeutung ergiebt sich erst, wenn man den in den Formeln (75) auftretenden, hier aber nicht berücksichtigten Factor $e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-p\right)}$ mit zu Rathe zieht. Dann ergiebt sich, dass die Amplitude der elektrischen Kraft $P$ sowohl bei einer Knoten- als bei einer Bauchlage das $B_2$ allemal beim Uebergang von einem Zeitintervall in das benachbarte (z. B. von 3 nach 4) sein Vorzeichen wechselt.

Nehmen wir $\gamma$ zu 0,15 an, so würde für $k = 40$ sein $K = 1{,}686$, $B = 1{,}682$, d. h. der Unterschied zwischen $K$ und $B$ $\frac{1}{4}\,\%$.

Der obere Grenzwerth $\overline{\overline{k}}$ der Maximalzahl der Knoten, welche selbst bei unendlich grosser Empfindlichkeit des Wellenindicators zu beobachten wären, ergiebt sich aus (93) in folgender Weise: Für grosses $k$ giebt $A_3$ den grössten Werth aller $A_h$. Dieser ist nicht grösser als 1, d. h. die Knotenstärke unterscheidet sich nicht mehr von der Bauchstärke, wenn $A_2 + n < 1$ ist, da $m' < 1$ ist. Nun ist $A_2$ sehr wenig grösser, als $nn'$, da $m$ bei grossem $k$ sehr klein ist; es ist also, da $n'$ nur etwas kleiner als 1, $A_2$ sehr wenig grösser als $n$. Der obere Grenzwerth $\overline{\overline{k}}$ wird also nahezu sich bestimmen aus der Gleichung:

$$2n = 1, \text{ d. h. } e^{\overline{\overline{k}}\tau} = 2, \text{ d. h.}$$

$$\overline{\overline{k}} = \frac{0{,}693}{\tau}.$$

In dem hier vorliegenden Falle, wo $\tau = 0{,}00285$, wäre der obere Grenzwerth $\overline{\overline{k}}$ sehr hoch, nämlich $\overline{\overline{k}} = 243$; für schlechter leitendes Material, als Kupferdrähte, wird aber dieser obere Grenzwerth des $\overline{\overline{k}}$ niedriger, z. B. für Neusilberdrähte ist $\overline{\overline{k}}$ etwa $= 60$, für Quecksilberleitung (Quecksilber in Glasröhren) ist $\overline{\overline{k}} = 30$. Immerhin zeigen diese Betrachtungen, dass der Drahtwiderstand sehr wenig Einfluss auf die beobachtbaren Erscheinungen hat, da selbst bei so schlechten Leitungsbahnen, wie Quecksilber, ein genügend empfindlicher Wellenindicator noch fast 30 Knoten würde nachweisen lassen. Viel wichtiger, als Vermeidung des Leitungswiderstandes, erscheint daher die Erreichung möglichst kleiner zeitlicher Dämpfung, falls möglichst viel Knoten beobachtet werden sollen.

### C. Beliebiger Abstand beider Brücken.

Die Knotenlagen der Brücke $B_2$ werden experimentell am bequemsten nicht dadurch gefunden, dass man $B_2$ so lange verschiebt, bis der Wellenindicator (Vacuumröhre) ein Maximum anzeigt, sondern dadurch, dass man diejenigen Stellungen der Brücke $B_2$ ermittelt, für welche der Wellenindicator gleiche Stärke zeigt, z. B. das Leuchten der Vacuumröhre einsetzt, oder ein Uebergang von mässigem Leuchten zum hellen Leuchten eintritt. Diese Stellungen von $B_2$ sollen »Einsatzlagen« oder »Uebergangslagen« genannt werden. Das Mittel dieser »Uebergangslagen« entspricht den Knotenlagen, jedoch nur dann genau, wenn die Uebergangslagen nur wenige Bruchtheile einer Wellenlänge von einander entfernt sind. Bei grösserer Distanz liegt ihr Mittel näher nach der Brücke $B_1$ zu, als die Knotenlage[1]. So betrug bei $\lambda = 75$ cm die Verschiebung für den zweiten Knoten etwa 3 mm, falls die Einsatzlagen um 7 cm von einander entfernt waren. Diese Erscheinung ist durch die zeitliche Dämpfungsconstante $\gamma$ wesentlich bestimmt. Um dies

1) »Arbeit I«, p. 12.

zu verstehen, wollen wir die Aufgabe, die elektrische Kraft bei beliebigem Brückenabstand $\beta\lambda$ zu finden, annähernd behandeln, indem wir die örtliche Dämpfung der Wellen vernachlässigen, d. h. $\tau = 0$ setzen, und ebenso auf die Brückenverkürzung keine Rücksicht nehmen, d. h. $\delta b = 0$, und daher nach (36) $\varphi = 0$, nach (33) $\varrho = 1$ setzen. Dann ist nach (40) und (42)

$$r = -e^{-2\alpha\beta}, \quad r' = -1.$$

Ferner wollen wir nach (61) annehmen, dass der Wellenindicator in der Entfernung $p\lambda = \frac{1}{4}\lambda$ von der Brücke $B_1$ entfernt liegt.

Wie wir oben pag. 99 sahen, ist die elektrische Kraft im Zeitintervall I grösser, als im Zeitintervall II. Erstere ist jetzt nach der früheren Formel (47) zufolge der getroffenen Vereinfachungen:

$$P = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - p\right)} \frac{e^{-2\alpha\beta(h+1)} - 1 + e^{-2\alpha\beta} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}}\left(e^{-2\alpha\beta h} - 1\right)}{e^{-2\alpha\beta} - 1},$$

oder, da nach (55) zu setzen ist:

$$\frac{t}{T} = 2h\beta + p + \eta,$$

$$P = e^{\alpha\eta} \frac{1 - e^{2\alpha\beta(h+1)} + e^{-\frac{\gamma}{2}}\left(1 - e^{2\alpha\beta h}\right)}{1 - e^{2\alpha\beta}},$$

d. h., da $\alpha = -\gamma + i\,2\pi$ ist:

$$(96) \quad P = e^{-\gamma\eta} \cdot e^{i2\pi\eta} \frac{1 - e^{-2\beta\gamma(h+1)} \cdot e^{i2\pi\cdot 2\beta(h+1)} + e^{-\frac{\gamma}{2}}\left(1 - e^{-2\beta\gamma h} \cdot e^{i2\pi\cdot 2\beta h}\right)}{1 - e^{-2\beta\gamma} \cdot e^{i2\pi\cdot 2\beta}}.$$

Das Maximum von $P$ hinsichtlich $h$ wird offenbar erreicht, falls ist

$$e^{i2\pi\cdot 2\beta h} = -1,$$

d. h. falls ist

$$(97) \qquad 2\beta = k + q, \quad k \text{ ganze Zahl},$$

für:

$$(98) \qquad h = \pm \frac{1}{2q}.$$

Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass $h$ positiv ist. Dann ist nach (96):

$$P = e^{-\gamma\eta} \cdot e^{i2\pi\eta} \frac{1 + e^{-2\beta\gamma(h+1)} e^{i2\pi q} + e^{-\frac{\gamma}{2}}\left(1 + e^{-2\beta\gamma h}\right)}{1 - e^{-2\beta\gamma} \cdot e^{i2\pi q}}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\left(1 + e^{-2\beta\gamma h}\right) = a, \quad e^{+2\beta\gamma} = g,$$

so wird:

(99) $$P = P \cdot e^{-\gamma\eta} \cdot e^{i\,2\pi(\eta + \Psi)},$$

wobei

(100) $$\left\{\begin{aligned} P^2 &= \frac{a^2 + g^{-2(h+1)} + 2ag^{-(h+1)} \cdot \cos 2\pi q}{1 + g^{-2} - 2g^{-1} \cdot \cos 2\pi q}, \\ \operatorname{tg} 2\pi\Psi &= \sin 2\pi q \frac{a + g^{-h}}{ag - g^{-(h+1)} - \cos 2\pi q(a - g^{-h})}. \end{aligned}\right.$$

Der reelle Theil der in (99) für $P$ geschriebenen complexen Grösse hat nach pag. 68 die physikalische Bedeutung der elektrischen Kraft. Diese ist also bei beliebiger Lage der Brücke $B_2$ für das nach (98) bestimmte $h$:

(101) $$P = P \cdot e^{-\gamma\eta} \cos 2\pi(\eta + \Psi).$$

Es kommt nun für das Einsetzen des Leuchtens einer Vacuumröhre darauf an, dass die elektrische Kraft $P$ einmal einen gewissen Betrag überschreitet, d. h. auf das absolute Maximum der elektrischen Kraft; und allgemein wird es näherungsweise gestattet sein, anzunehmen, dass das Leuchten der Vacuumröhre für diejenigen Lagen $\beta$ der Brücke $B_2$ gleich ist, in welchen die absoluten Maxima der $P$ gleich sind. Da nun $\gamma$ klein gegen $2\pi$ ist, so wird das absolute Maximum von $P$ nach (101) zu einer Zeit $\eta$ erreicht, welche ist

entweder 1) $\eta + \psi = 0$

oder 2) $\eta + \psi = \frac{1}{2}$.

Da $\eta$ seiner Bedeutung nach positiv ist (ein negatives $\eta$ würde in das Zeitintervall II führen, in welchem $P$ kleiner ist), so kann die Bedingung 1) nur erfüllt werden, wenn $\Psi$ negativ, d. h. nach (100), wenn $q$ negativ und kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, mit anderen Worten: für Brückenlagen, die vor dem zunächst benachbarten Knoten, von der Brücke $B_1$ ab gerechnet, liegen. Denn nach (97) entspricht ein negatives $q$, das kleiner als $\frac{1}{2}$, solcher Lage. Das absolute Maximum der elektrischen Kraft für solche Brückenlagen ist also:

$$P^- = P^- \cdot e^{\gamma\Psi^-}.$$

Für Brückenlagen, die hinter dem zunächst benachbarten Knoten liegen (positives $q < \frac{1}{2}$), ist gemäss der Bedingung 2) das absolute Maximum:

$$P^+ = P^+ \cdot e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Psi^+)}.$$

Nun ist zu berücksichtigen, dass nach (100) $P^+$ sich von $P^-$ (für gleichen absoluten Werth von $q$ geltend) ausserordentlich wenig unterscheidet. Dagegen ist beständig

$$e^{\gamma \Psi^-} > e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Psi^+)},$$

(es ist $\Psi^-$ ein negativer Werth), da nach (100) die absoluten Werthe von $\Psi$ stets unter $\frac{1}{4}$ liegen. Es ist daher auch

$$P^- > P^+,$$

und zwar bei einem bestimmten $q$ um so mehr, je grösser die zeitliche Dämpfungsconstante $\gamma$ ist. Wenn also die Brücke $B_2$ um etwas vor einem Knoten liegt, so ist die elektrische Kraft grösser, als wenn sie um gleichviel hinter dem Knoten liegt. Hieraus ergiebt sich, dass das Mittel zweier Brückenlagen, für welche die elektrische Kraft um gleichviel kleiner ist, als die Knotenstärke $K$, näher nach der Brücke $B_1$ zu liegen muss, als die Knotenlage, d. h. es folgt die oben erwähnte, experimentell gefundene Erscheinung.

Aus diesen Betrachtungen würde folgen, dass für äusserst kleines $q$ $P^-$ immer noch merklich grösser, als $P^+$ wäre, und dass für $q = 0$ kein stetiger Uebergang zwischen $P^-$ und $P^+$ stattfindet, der natürlich eintreten muss. Dieser Widerspruch löst sich dadurch, dass für äusserst kleines $\Psi$, für welches

$$\cos 2\pi \Psi > e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Psi^+)},$$

das absolute Maximum für $P^+$ zur Zeit $\eta = 0$ erreicht wird und den Werth $P . \cos 2\pi\Psi$ besitzt, dieser Fall tritt aber erst ein, wenn $q$ unter den Betrag 0,01 sinkt.

Genauer möge die betrachtete Erscheinung nicht qualitativ verfolgt werden, auch soll nicht näher untersucht werden, wie sich die Dämpfung $\gamma$ aus der beobachteten Erscheinung, nämlich aus der Verschiebung des Mittels der »Einsatzlagen« gegen die Knotenlagen, bestimmen liesse. Im Princip müsste diese Aufgabe ja lösbar sein, sie leidet aber an der Schwierigkeit, dass die exacte Antwort davon abhängt, in welcher Weise die Störung des elektrischen Gleichgewichtes in den Drähten einsetzt. Wenn man nämlich vorausgesetzt hätte, dass der imaginäre Bestandtheil der oben für $P$ hingeschriebenen complexen Grössen die physikalische Bedeutung der elek-

trischen Kraft hätte, so würde man erhalten, dass $P^+ > P^-$ ist. Im letzteren Falle würde die elektrische Kraft des Erregers das Gesetz:

$$P = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = \infty$$

befolgen, während in dem Falle, der hier bei der Discussion vorausgesetzt ist, das zeitliche Gesetz:

$$P = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = \infty$$

befolgt wird. Der Unterschied beider Fälle liegt darin, dass in ersterem die elektrische Kraft bei ihrem Beginn allmählich von Null anfängt, während in letzterem die Kraft $P$ bei ihrem Beginn plötzlich mit maximaler Stärke einsetzt. In Wirklichkeit mag vielleicht keiner dieser beiden Grenzfälle genau eintreten, aber jedenfalls wird der letztere der Wirklichkeit viel näher kommen, als der erstere. Denn die elektrischen Schwingungen kommen dadurch zu Stande, dass die beiden von einander isolirten Hälften des Erregers zu einer hohen Potentialdifferenz geladen werden, bis dass diese durch einen plötzlich einsetzenden Funken sich durch elektrische Schwingungen ausgleicht.

Abgesehen von der hier besprochenen Erscheinung sind die übrigen, hier berechneten Erscheinungen völlig unabhängig von der Art des Einsetzens der Schwingungen, wie man am einfachsten daraus erkennt, dass es für die Discussion ganz gleichgültig ist, ob sie an den reellen Bestandtheil der complexen Grösse $e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)}$ anknüpft, oder an den imaginären.

Die Formeln (99) und (100) sind übrigens gut brauchbar, wenn man discutiren will, wie die Schärfe der Einstellung der Brücke $B_2$ auf eine Knotenlage (Stärke der Resonanz) von der zeitlichen Dämpfungsconstante $\gamma$ abhängt[1]). Der Nenner der

---

1) Die Aufgabe, die Schärfe der Resonanz bei beliebigen Werthen der zeitlichen Dämpfungen des Erregers und des Resonators zu berechnen, ist mehrfach von V. BJERKNESS, zuletzt in Wied. Ann. 55, p. 121, 1895, behandelt worden. Der hier betrachtete Fall ist insofern einfacher, als die Resonatorleitung, nämlich der durch die Brücken $B_1$ und $B_2$ begrenzte Theil der Paralleldrähte, überhaupt keine zeitliche Dämpfung seiner Eigenschwingung besitzt, wenn man von der Reflexionsschwächung an den Brücken und dem galvanischen Widerstande der Drähte absieht.

Grösse $P^2$ ist hierfür besonders massgebend, und man erkennt aus (100) sofort, dass $P^2$ ein um so steileres Maximum für $q = 0$ (im Knoten, d. h. bei Resonanz) erreicht, je mehr sich die Grösse $g$ dem Werthe 1 nähert, d. h. je kleiner $\gamma$ und $k$ (die Ordnungszahl des Knotens) sind.

## II. Wellen in Drähten, die theilweise von leitenden Körpern umgeben sind.

### A. Der umgebende Körper verhält sich normal.

1) Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen.

Es soll der Fall betrachtet werden, dass die die Wellen führenden Paralleldrähte in einer Umgebung eingebettet sind, welche von Luft verschieden ist, d. h. welche eine von 1 verschiedene Dielektricitätsconstante $\varepsilon$ und ein von Null verschiedenes Leitungsvermögen $\sigma$ besitzt. Unter letzterem möge das elektromagnetisch gemessene Leitungsvermögen für constante Ströme verstanden sein, und es soll vorausgesetzt werden, dass der die Drähte umgebende Körper (z. B. Flüssigkeit, wässrige Salzlösung) sich auch für die betrachteten elektrischen Störungen kurzer Periode normal verhält, d. h. dass sein Verhalten gegenüber diesen Störungen vollkommen durch die Constanten $\varepsilon$ und $\sigma$ definirt ist, wie sie für stationäre oder sehr langsam wechselnde Ströme massgebend sind. Es sollen also die Fälle zunächst ausgeschlossen sein, dass die Umgebung Dispersionserscheinungen aufweist, denn diese hängen von besonderen Eigenschaften der Körper ab, d. h. von mehr Constanten, als nur von $\varepsilon$ und $\sigma$.

Die Aufstellung der Differentialgleichungen kann wieder auf zwei Wegen geschehen, die zu gleichem Resultat führen, nämlich durch Anknüpfung an die Vorgänge entweder in den Drähten oder in dem die Drähte umgebenden Körper. Für ersteren Weg ist die oben gegangene, zuerst von Kirchhoff betretene Methode, im Wesentlichen nur darin zu ergänzen, dass der Stromverlust in den Drähten nicht nur durch scheinbare Ladungsänderungen der Drähte (Verschiebungsströme in ihrer Umgebung), sondern auch durch Leitungsströme ihrer Umgebung compensirt wird. Für letzteren Weg sind die Maxwell'schen Differentialgleichungen des elektromagnetischen

Feldes in einem Körper, welcher der Sitz sowohl von Verschiebungs-, wie Leitungsströmen sein kann, mit Rücksicht auf die eingelagerten Metalldrähte zu integriren. Dieses macht, nach der HERTZ'schen Vorzeichnung des Weges für vollkommene Isolatoren, nicht die geringste Schwierigkeit.

Um im Anschlusse an unsere obigen Entwickelungen zu bleiben, möge der erste Weg hier gegangen werden. Die frühere Gleichung (1):

$$(1) \qquad iw = E_1 + E_2,$$

bleibt bestehen mit derselben Bedeutung der Buchstaben. Ebenso die frühere Gleichung (2):

$$(2) \qquad E_1 = -2 \lg \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial i}{\partial t},$$

denn die Selbstinduction in den Drähten bleibt dieselbe, so lange die Magnetisirungsconstante ihrer Umgebung denselben Werth besitzt. Letzteres soll vorausgesetzt werden; es ist ja auch kein Körper mit mässig grossem Leitvermögen $\sigma$ bekannt, welcher eine merklich von 1 verschiedene Magnetisirungsconstante besitzt.

Dagegen ändert sich die frühere Gleichung (3) durch das Vorhandensein der von 1 verschiedenen Dielectricitätsconstante $\varepsilon$ in

$$(3') \qquad V = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2 \lg \frac{d}{R} \cdot \mathfrak{e}.$$

Die Gleichung (4) wird so:

$$(4') \qquad E_2 = -c \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{c}{\varepsilon} 2 \lg \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial z}.$$

Eine wesentliche Aenderung ist an der Gleichung (5) anzubringen. $-\frac{\partial i}{\partial z}$ bedeutet den Stromverlust in dem einen Paralleldrahte pro Längeneinheit. Derselbe wird theilweise compensirt durch den Verschiebungsstrom pro Längeneinheit: $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}$, theilweise durch den aus der Längeneinheit des Drahtes in seine Umgebung abfliessenden Leitungsstrom $i_u$, sodass an Stelle von (5) entsteht:

$$(5') \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + i_u.$$

Der Leitungsstrom $i_u$ fliesst in Richtung der aus dem Drahte austretenden elektrischen Kraftlinien. Diese stehen bei der grossen

metallischen Leitfähigkeit des Drahtes senkrecht[1]) zu seiner Oberfläche und verlaufen in der Nähe eines Drahtes in Richtung der zur Drahtaxe ($z$-Axe) senkrechten Radienvectoren $\varrho$,[2]) falls der andere Paralleldraht dem betrachteten Drahte nicht zu nahe kommt (d. h. falls die Distanz $d$ der Drähte gross gegen ihren Radius $R$ ist). Bezeichnet man die Stromdichte des Leitungsstromes $i_u$ mit $j$, so ist nach dem Ohm'schen Gesetze

$$j = -\sigma \cdot c \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho},$$

denn $-c\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ ist die elektromagnetisch gemessene, in Richtung von $\varrho$ wirkende, elektromotorische Kraft der Längeneinheit, $\sigma$ die specifische Leitfähigkeit des umgebenden Körpers. Da nun im beliebigen Abstand $\varrho$ vom Drahte

$$V = \frac{1}{\varepsilon} 2 \lg \frac{d}{\varrho} \cdot e$$

ist (vgl. Formel (3′), wo $V$ für $\varrho = R$ gebildet ist), so folgt

$$j = 2 \frac{\sigma c}{\varepsilon} \frac{e}{\varrho},$$

und die Stromstärke

$$i_u = 2\pi \varrho \cdot j = 4\pi \frac{\sigma c}{\varepsilon} e.$$

Gleichung (5′) wird also:

$$(5'') \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + 4\pi c \frac{\sigma}{\varepsilon} e.$$

Differenzirt man nun die Gleichung (1) nach $z$ und setzt für $E_1$ und $E_2$ ihre Werthe nach (2) und (4′), ferner für $\frac{\partial i}{\partial z}$ seinen Werth nach (5″), so entsteht:

$$(6') \qquad \boxed{\frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial e}{\partial t} + 4\pi c^2 \frac{\sigma}{\varepsilon} e\right) + \frac{w}{2 \lg \frac{d}{R}}\left(\frac{\partial e}{\partial t} + 4\pi c^2 \frac{\sigma}{\varepsilon} e\right).}$$

Eine ebenso gebaute Differentialgleichung gilt für die Stromstärke $i$.

Zu derselben Differentialgleichung wäre man gelangt, wenn man an die Vorgänge in der Umgebung der Drähte anknüpfte. Wenn nämlich in einem Körper, welcher die Dielektricitätsconstante $\varepsilon$ besitzt, auch eine merkbare Leitfähigkeit $\sigma$ vorhanden ist, so ist der Effect des

1) Vgl. des Verf. »Physik des Äthers«. Stuttgart 1894, p. 449.

2) Eine Verwechselung mit der oben pag. 70 eingeführten Grösse $\varrho$ ist wohl nicht zu befürchten. Das hier gebrauchte $\varrho$ kommt später nicht wieder vor.

Hinzukommens von $\sigma$ derselbe, als ob in den Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes des Körpers an Stelle der Operation: $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$ auftritt: $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi c^2 \sigma$.[1]) Der Widerstand $w$ des Drahtes kann dann noch auf demselben Wege in der Differentialgleichung berücksichtigt werden, wie ich es früher[2]) für einen vollkommenen Isolator durchgeführt habe.

An einer bestimmten, aber beliebig gelegenen Stelle der Drahtleitung sollen Störungen der Form auftreten:

$$\mathfrak{e} = A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}},$$

wobei

$$\alpha = -\gamma + 2\pi \sqrt{-1}$$

ist. Im Folgenden empfiehlt es sich, an Stelle der Dämpfungsconstanten $\gamma$ einzuführen:

$$\gamma' = \gamma : 2\pi.$$

Es ist dann

$$\alpha = 2\pi\left(-\gamma' + \sqrt{-1}\right). \tag{102}$$

Diesen Störungen entspricht ein Integral der Differentialgleichung (6'), welches in der Form geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{e} = A_1 e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda'} - 2\pi \varkappa \frac{z}{\lambda'}} + A_2 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda'} + 2\pi \varkappa \frac{z}{\lambda'}}. \tag{103}$$

Unter $\alpha'$ ist die oben pag. 87 durch die Gleichung (69'') definirte Grösse:

$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \tau = \frac{T \cdot w}{4 \lg \frac{d}{R}} = \frac{\sqrt{T}}{4 R \lg \frac{d}{R} \sqrt{\sigma'}}$$

verstanden. $\sigma'$ bezeichnet die Leitfähigkeit des Drahtes (zum Unterschiede von $\sigma$, der Leitfähigkeit der Umgebung).

Die im Integrale (103) noch auftretenden Constanten $\lambda'$ und $\varkappa$ bestimmen sich nach (6') durch die Gleichung:

$$\frac{c^2}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha + 2\pi\varkappa + \tau}{\lambda'}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2}{T^2} + \frac{2\tau\alpha}{T^2}\right)\left(1 + 4\pi \frac{c^2 \sigma}{\varepsilon \alpha} T\right).$$

Bei der Kleinheit von $\tau$ (nach pag. 87 ist für meine Versuche $\tau = 0{,}00285$) ist es gestattet, zu setzen

1) Vgl. MAXWELL, HERTZ, oder auch das Buch des Verf. »Physik des Äthers« p. 548.

2) »Physik des Äthers« p. 450.

$$\alpha^2 + 2\tau\alpha = (\alpha + \tau)^2.$$

Obige Gleichung wird dann:

$$(104)\qquad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{\alpha + 2\pi\varkappa + \tau}{\lambda'} = \frac{\alpha+\tau}{T}\sqrt{1 + 4\pi\frac{c^2\sigma}{\varepsilon\alpha}T}.$$

Für $\sigma = 0$ würde hieraus folgen:

$$(105)\qquad \varkappa = 0,\ \lambda' = cT : \sqrt{\varepsilon}.$$

Es sollen nun nur solche Fälle betrachtet werden, in welchen die Leitfähigkeit $\sigma'$ der Drähte sehr viel grösser ist, als die Leitfähigkeit $\sigma$ der Umgebung, denn nur dann kann man Wellen in ihr beobachten. Dies ist z. B. immer der Fall, wenn die Umgebung selbst aus gut leitenden Elektrolyten besteht. Es ist dann bei der Kleinheit von $\tau$ gestattet, in den mit $\tau$ multiplicirten Gliedern der Gleichung (104) $\sigma = 0$ anzunehmen und die nach (105) für $\sigma = 0$ geltende Beziehung $\lambda' = cT : \sqrt{\varepsilon}$ zu benutzen. Dann kann man in (104) die mit $\tau$ multiplicirten Glieder auf beiden Seiten fortheben und es bleibt die Gleichung zu erfüllen übrig:

$$(104')\qquad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{\alpha + 2\pi\varkappa}{\lambda'} = \frac{\alpha}{T}\sqrt{1 + \frac{4\pi c^2\sigma}{\varepsilon\alpha}T},$$

oder unter Benutzung von (102):

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1}}{\lambda'} = \frac{-\gamma' + \sqrt{-1}}{T}\sqrt{1 + \frac{2c^2\sigma T}{\varepsilon(-\gamma' + \sqrt{-1})}}.$$

Führt man die Abkürzung ein:

$$(106)\qquad \frac{c^2\sigma T}{\varepsilon} = s,$$

so schreibt sich die vorige Gleichung:

$$(107)\qquad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1}}{\lambda'} = \frac{-\gamma' + \sqrt{-1}}{T}\sqrt{1 + \frac{2s}{-\gamma' + \sqrt{-1}}}.$$

Ist nun die Leitfähigkeit $\sigma$, und damit auch die Grösse $s$ so klein, dass man $s^2$ gegen 1 vernachlässigen kann, so folgt

$$\sqrt{1 + \frac{2s}{-\gamma' + \sqrt{-1}}} = 1 + \frac{s}{-\gamma' + \sqrt{-1}},$$

und aus (107):

$$(108)\qquad \lambda' = cT : \sqrt{\varepsilon},\ \varkappa = s = \frac{c^2\sigma T}{\varepsilon}.$$

Die Wellenlänge ist also dann durch Auftreten der Leitfähigkeit $\sigma$ gar nicht beeinflusst, die Grösse $\varkappa$, welche die örtliche Dämpfung der Wellen bestimmt (sie soll Absorptionsindex[1]) der Umgebung genannt werden) ist proportional[2]) zu $\sigma$ und $T$, umgekehrt proportional zu $\varepsilon$.

Es kommen aber auch praktisch interessante Fälle vor, in denen $s^2$ nicht gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dann liefert die Gleichung (107) durch Quadriren und Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$(109)\qquad \frac{1-(\varkappa-\gamma')^2}{\lambda'^2} = \frac{\varepsilon}{c^2 T^2}\cdot(1-\gamma'^2+2s\gamma'),\qquad \frac{\varkappa-\gamma'}{\lambda'^2} = \frac{\varepsilon}{c^2 T^2}\cdot(s-\gamma').$$

Nun ist zu beachten, dass $\gamma'$ in den praktisch vorkommenden Fällen so klein ist, dass es in diesen Gleichungen kaum berücksichtigt zu werden braucht. Z. B. ist in meinen Versuchen $\gamma$ etwa $= 0{,}15$, daher $\gamma' = \gamma : 2\pi = 0{,}024$. Aber selbst wenn man $\gamma'$ in obigen Gleichungen (109) beibehält, so ist es wenigstens gestattet, in den mit $\gamma'$, bezw. $\gamma'^2$ multiplicirten Gliedern die Näherungswerthe (108) für $\lambda'$ und $\varkappa$ einzusetzen. Dann heben sich aber alle mit $\gamma'$ bezw. $\gamma'^2$ multiplicirten Glieder aus den Gleichungen (109) fort, und es bleibt übrig:

$$\frac{1-\varkappa^2}{\lambda'^2} = \frac{\varepsilon}{c^2 T^2},\quad \frac{\varkappa}{\lambda'^2} = \frac{\varepsilon s}{c^2 T^2},$$

d. h.

$$(110)\qquad \varkappa = \frac{2s}{1+\sqrt{1+4s^2}},\quad \lambda'^2 = \frac{c^2 T^2}{\varepsilon}\,\frac{2}{1+\sqrt{1+4s^2}}.$$

$cT$ ist die Wellenlänge $\lambda$ der Schwingung, wenn die Paralleldrähte von Luft umgeben wären. Das Verhältniss

$$\lambda : \lambda' = n$$

wird der elektrische Brechungsexponent der Umgebung genannt. Nach (110) ergiebt sich für ihn die Beziehung:

---

1) $\varkappa$ ist identisch mit der in meinen optischen Arbeiten gewählten Bezeichnung, z. B. Wied. Ann. 39, p. 481, 1890.

2) Wenn man die Grösse $\tau$, oder besser noch $\tau : 2\pi$, den Absorptionsindex der Drähte nennt, so ist bemerkenswerth, dass dieser proportional zu $\sqrt{T}$ und umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Leitfähigkeit der Drähte ist.

(111) $$n = \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}{2}}.$$

Bei Umgebungen, die dieselbe Dielektricitätsconstante $\varepsilon$ besitzen, aber verschiedene Leitfähigkeiten $\sigma$, wächst also der elektrische Brechungsexponent mit zunehmender Leitfähigkeit, der Absorptionsindex ebenfalls, aber etwas langsamer, als die Leitfähigkeit selbst. Ferner ist von Bedeutung, dass der Absorptionsindex fast proportional der Schwingungsdauer der Wellen zunimmt, und bei zwei Flüssigkeiten gleicher Leitfähigkeit, aber verschiedener Dielektricitätsconstante, letzterer nahezu umgekehrt proportional ist.

Es hat sich herausgestellt[1]), dass wässrige Salzlösungen bis zu $\lambda = 75$ cm solche normal sich verhaltenden Körper sind, wie wir sie in diesem Abschnitt betrachtet haben, und dass sie alle dieselbe Dielektrisitätsconstante, wie reines Wasser ($\varepsilon = 81$ bei $17^\circ$ Cels.) besitzen; selbst bei hoher Leitfähigkeit $\sigma$ ist dies wenigstens wahrscheinlich gemacht. In der folgenden Tabelle stelle ich die für $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = \lambda : c = 25 . 10^{-10}$ geltenden Werthe von $n$ und $\varkappa$ nach den Gleichungen (110) und (111) zusammen, für $\varepsilon = 81$ und verschiedenes $\sigma$. $K$ bedeutet das auf Quecksilber als Einheit bezogene Leitvermögen. Es ist

$$\sigma = 1{,}063 \cdot 10^{-5} \cdot K.$$

Abhängigkeit des Brechungsexponenten und des Absorptionsindex von der Leitfähigkeit bei $\lambda = 75$ cm, $\varepsilon = 81$.

| $K \cdot 10^8$ | 5 | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 250 | 380 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma \cdot 10^{12}$ | 0,53 | 2,66 | 5,31 | 7,96 | 10,63 | 13,30 | 15,95 | 18,60 | 21,3 | 26,6 | 40,5 |
| $s$ | 0,015 | 0,074 | 0,148 | 0,222 | 0,297 | 0,370 | 0,445 | 0,518 | 0,593 | 0,742 | 1,13 |
| $\varkappa$ | 0,015 | 0,074 | 0,145 | 0,212 | 0,274 | 0,329 | 0,380 | 0,427 | 0,466 | 0,531 | 0,647 |
| $n$ | 9,00 | 9,02 | 9,10 | 9,22 | 9,39 | 9,55 | 9,73 | 9,91 | 10,20 | 10,63 | 11,90 |

Die Beobachtungen (»Arbeit II«) entsprechen nahezu dieser theoretisch berechneten Abhängigkeit des $n$ von $\sigma$.

1) Vgl. »Arbeit II« und in diesem Aufsatz die Bemerkungen weiter unten.

2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke.

Es liege bei $z = \beta'\lambda'$ eine metallische Brücke $B'$ auf. Bezeichnet man, wie früher, mit $i$ die Stromstärke in den Drähten vor der Brücke, mit $i'$ den Strom in der Brücke, mit $i''$ den über die Brücke hinüber gehenden Strom, und ist ferner $\mathfrak{e}$ die scheinbare Ladung in der vor der Brücke bestehenden Welle, $\mathfrak{e}''$ in der hinter ihr bestehenden Welle, so bleiben die früheren Brückenbedingungen (cf. oben pag. 67) (14) und (15), nämlich:

$$(14) \qquad i' = i - i'' \quad \text{für } z = \beta'\lambda',$$

$$(15) \qquad \mathfrak{e} = \mathfrak{e}'' \quad \text{für } z = \beta\lambda'$$

bestehen. Vom galvanischen Widerstande in der Brücke selbst können wir absehen, da, wie oben pag. 90 festgestellt wurde, dieser einen nicht bemerkbaren Einfluss ausübt. Daher können wir die frühere Brückenbedingung (13) auch hier anwenden, nur mit der Modification, dass an Stelle der Selbstinduction $L$ der Längeneinheit der Brücke in Luft hier einzuführen ist die Selbstinduction $L'$ der Längeneinheit der Brücke, während sie im Körper mit den Constanten $\varepsilon$, $\sigma$ liegt. Dieses $L'$ ist kleiner als $L$, falls die Wellenlänge $\lambda'$ der Schwingungen im Körper kleiner als die Wellenlänge $\lambda$ der Schwingungen in Luft ist, denn der Rückstrom für $i'$ liegt, roh taxirt, in der Entfernung $\frac{1}{4}\lambda'$ von der Brücke (cf. oben pag. 66), und es ist ungefähr [vgl. die frühere Formel (11)]:

$$(11') \qquad L' = 2 \lg \frac{\frac{1}{4}\lambda'}{R'} \, .$$

Ausserdem müssen wir in der früheren Brückenbedingung (13) auf der rechten Seite den Factor $\frac{1}{\varepsilon}$ hinzufügen, weil die von der Ladung $\mathfrak{e}$ herrührende electrische Kraft $E_2'$ (vgl. die frühere Formel (12)) im Verhältniss $1 : \varepsilon$ verkleinert wird, wenn die Ladung $\mathfrak{e}$ nicht in Luft, sondern in einem Körper der Dielectricitätsconstanten $\varepsilon$ lagert. — Die frühere Brückenbedingung (13) wird also hier zu:

$$(13') \qquad L'l\frac{\partial i'}{\partial t} = 4c\frac{\mathfrak{e}}{\varepsilon} \lg \frac{d}{R} \quad \text{für } z = \beta'\lambda' .$$

Führt man das Verhältniss $\zeta'$ der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke zu der der Drähte ein durch:

$$(30') \qquad \zeta' = L' : 2 \lg \frac{d}{R},$$

so wird (13′) zu:

(13″) $$l\zeta'\frac{\partial i'}{\partial t} = 2c\frac{\mathfrak{e}}{\varepsilon} \text{ für } z = \beta'\lambda'.$$

Es möge nun nach der Brücke zu die Ladungswelle einfallen:

(112) $$\mathfrak{e}_e = A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}.$$

Hierbei ist gemäss der Gleichung (103) $\alpha''$ eine Abkürzung für:

(113) $$\alpha'' = \alpha' + 2\pi\varkappa = \alpha + \tau + 2\pi\varkappa.$$

Die an der Brücke reflectirte Welle soll dargestellt werden durch

(114) $$\mathfrak{e}_r = r \cdot A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

wobei $r$ (Reflexionsfactor) eine complexe Grösse bezeichnet, die über die Brücke hinübergehende durch

$$\mathfrak{e}'' = \delta \cdot A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}.$$

Analog ist für die Stromstärken zu setzen:

(115) $$\begin{cases} i_e = B \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}, \\ i_r = -r \cdot B \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{\lambda'}}, \\ i'' = \delta \cdot B \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}. \end{cases}$$

Der Factor $B$ ergiebt sich gemäss der Gleichung (5″) (pag. 107) zu:

(116) $$B\frac{\alpha''}{\lambda'} = A\frac{\alpha}{cT}\left(1 + 4\pi\frac{c^2\sigma}{\varepsilon\alpha}T\right).$$

Die Bedingung (15) ergiebt nun:

$$e^{-\alpha''\beta'} + r \cdot e^{+\alpha''\beta'} = \delta \cdot e^{-\alpha''\beta'},$$

die Bedingung (14):

$$i' = B \cdot e^{\alpha\frac{t}{T}}\left(e^{-\alpha''\beta'} - r \cdot e^{+\alpha''\beta'} - \delta \cdot e^{-\alpha''\beta'}\right),$$

d. h. vermöge der vorigen Gleichung:

$$i' = -B \cdot e^{\alpha\frac{t}{T}} \cdot 2r \cdot e^{\alpha''\beta'}.$$

Setzt man diesen Werth in die Brückenbedingung (13″) ein, so folgt:

$$Br \cdot l\zeta' \cdot \frac{\alpha}{T} \cdot e^{\alpha''\beta'} = A\frac{c}{\varepsilon}\left(e^{-\alpha''\beta'} + r \cdot e^{+\alpha''\beta'}\right),$$

oder

(117) $$r \cdot e^{2\alpha''\beta'}\left(1 + \frac{B}{A}\zeta'\alpha\varepsilon\frac{l}{cT}\right) = -1 .$$

In dieser Gleichung ist für $\frac{B}{A}$ sein aus (116) folgender Werth zu entnehmen. Dieser Werth ist infolge der Gleichung (104') einfach zu schreiben, da man nun von der Grösse $\tau$ (dem galvanischen Widerstande der Drähte) absehen kann, weil $\frac{B}{A}$ nur in dem kleinen Correctionsgliede vorkommt, welches mit der Brückenlänge $l$ proportional ist. Bei Vernachlässigung von $\tau$ ergiebt sich nämlich aus (104'), indem man $\alpha'' = \alpha + 2\pi\varkappa$ setzt:

$$\frac{c^2}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha''}{\lambda'}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{T^2}\left(1 + 4\pi\frac{c^2\sigma}{\varepsilon\alpha}T\right).$$

Dividirt man diese Gleichung mit (116), so folgt

$$B\frac{\lambda'}{\alpha''}\frac{\varepsilon}{c^2} = A\frac{T}{c\alpha},$$

es ist also

(116') $$\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha\varepsilon}{cT} = \frac{\alpha''}{\lambda'} .$$

Setzt man dieses in die Formel (117) ein, so folgt der Reflexionsfactor zu:

(118) $$r = -\frac{e^{-2\alpha''\beta'}}{1 + \alpha''\zeta'\frac{l}{\lambda'}};$$

bringt man, wie früher [cf. pag. 70 Formel (31)] $1 + \alpha''\zeta'\frac{l}{\lambda'}$ auf die Form $\frac{1}{\varrho'}\cdot e^{+\alpha''\varphi'}$, d. h. setzt

(119) $$\frac{1}{1 + \alpha''\zeta'\frac{l}{\lambda'}} = \varrho'\cdot e^{-\alpha''\varphi'},$$

so wird

(120) $$r = -\varrho'\cdot e^{-\alpha''(2\beta' + \varphi')}.$$

Die Brückenverkürzung ist [vgl. die frühere analoge Formel 36)]:

(36') $$\delta b' = \varphi'\cdot\frac{\lambda'}{2} .$$

In der früheren Formel (37) (pag. 72) war die Brückenverkürzung bei Luftumgebung der Drähte in eine besonders bequeme Form gebracht worden, die sich daraus ergab, dass $l:\lambda$ und damit $\varphi$ ein so kleiner Werth war, dass $\operatorname{tg} 2\pi\varphi = 2\pi\varphi$ gesetzt werden konnte. Da

die Wellenlänge $\lambda'$ unter Umständen bedeutend kleiner ist, als $\lambda$, z. B. im Wasser 9 mal kleiner, so ist eine solche Vereinfachung bei derselben Bügellänge $l$ hier meist nicht erlaubt, da $l:\lambda'$ einen grösseren Betrag hat. Bei meinen Versuchen war $l = 1{,}8$ cm, $\lambda = 75$ cm, $\lambda'$ (Wasser) $= 8{,}3$ cm, daher ist $l:\lambda = 0{,}024$; $l:\lambda' = 0{,}216$.

In (119) ist es nun gestattet, da $\alpha''$ nur mit den jedenfalls nicht bedeutenden Beträgen $\varphi'$, bezw. $\frac{l}{\lambda'}$ multiplicirt auftritt, für $\alpha''$ einen Näherungswerth einzuführen, der sich aus (113) ergiebt, wenn man den kleinen Werth $\tau$ neben $\gamma$ und $2\pi\varkappa$ vernachlässigt, d. h. nach (113) und (102) schreibt:

$$\alpha'' = 2\pi\left(\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1}\right). \tag{121}$$

Dann wird (119) zu:

$$\varrho' \cdot e^{-2\pi\varphi'(\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1})} = \frac{1}{1 + 2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}(\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1})},$$

d. h.

$$(122)\quad \begin{cases} \varrho' \cdot e^{-2\pi\varphi'(\varkappa - \gamma')} = \dfrac{1}{\sqrt{\left[1 + 2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}(\varkappa - \gamma')\right]^2 + \left(2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}\right)^2}}, \\[2ex] \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = \dfrac{2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}}{1 + 2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}(\varkappa - \gamma')}. \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst $\varkappa = 0$, und legen obiges Beispiel für Wasser zu Grunde, in welchem $l:\lambda' = 0{,}216$, nehmen wir ferner für $\gamma$ den Werth 0,15 (cf. oben pag. 99), d. h. für $\gamma'$ den Werth 0,024, schliesslich für $\zeta'$ den aus (11') (es war $R' = 0{,}1$ cm) und (30') folgenden Werth $\zeta' = 0{,}845$, so folgt aus (122) für $l = 1{,}8$ cm:

$$(122')\quad \varrho' \cdot e^{+\gamma\varphi'} = 0{,}661;\quad \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = 1{,}18,\quad \varphi' = 0{,}14.$$

Hieraus ergiebt sich nach (36') die Brückenverkürzung zu

$$\delta b' = 5{,}8 \text{ mm}.$$

Dieser Werth stimmt sehr gut mit den Beobachtungen[1]) überein, denen zufolge $\delta b'$ zwischen 5,5 und 6 mm liegt.

Die Brückenverkürzung ist also in Wasser etwas kleiner, als in Luft, wo sie 8 mm betrug (cf. oben pag. 72). Dies ergiebt sich bei

1) »Arbeit II«, p. 343.

sehr kleinem $l:\lambda'$, bei welchem $\operatorname{tg} 2\pi\varphi' = 2\pi\varphi'$ zu setzen ist, einfach aus der Thatsache, dass gemäss (11) und (11') $\zeta > \zeta'$ ist, falls $\lambda > \lambda'$ ist. Denn bei sehr kleinem $\varphi'$ ist nach (122) und (36') $\delta b' = \frac{1}{2} l \,.\, \zeta'$, während nach (37) (pag. 72) $\delta b = \frac{1}{2} l \,.\, \zeta$ ist.

Für $\varkappa = 0{,}531$, was nach der Tabelle der pag. 111 einer sehr gut leitenden wässrigen Salzlösung der Leitfähigkeit $K = 250 \,.\, 10^{-8}$ bezogen auf Quecksilber entspricht, folgt nach obiger Tabelle $\lambda' = 7{,}05$, daher $\zeta' = 0{,}800$. Es ergiebt sich dann aus (122) für $l = 1{,}8$ cm:

$$(122'') \quad \varrho' e^{-2\pi\varphi'(\varkappa-\gamma')} = 0{,}476; \quad \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = 0{,}777, \quad \varphi' = 0{,}105.$$

Die Brückenverkürzung wird:

$$\delta b' = 3{,}7 \text{ mm.}$$

Die Brückenverkürzung ist also für eine gutleitende wässrige Lösung geringer, als für reines Wasser. Dieses Resultat ergiebt sich auch schon aus der Discussion der allgemeinen Formel (122) für $\operatorname{tg} 2\pi\varphi'$ in Verbindung mit (36') für $\delta b'$.

Wesentliches Interesse bietet auch der Factor $\varrho' . e^{+\gamma\varphi'}$ bezw. $\varrho' . e^{-2\pi\varphi'(\varkappa-\gamma')}$. Denn nach (120) bedeutet er das Amplitudenverhältniss der reflectirten Welle und der einfallenden. Wie das numerische Beispiel (122') zeigt, ist für reines Wasser, selbst bei der kleinen Brückenlänge von 1,8 cm, die reflectirte Amplitude nur der $\frac{2}{3}$te Theil der einfallenden. Für gut leitende Lösung sinkt dies Verhältniss nach (122'') sogar unter $\frac{1}{2}$. Ein Vergleich mit der oben auf pag. 73 für Luft angestellten Rechnung, nach der sich das Amplitudenverhältniss zu 0,99 ergab, zeigt, dass der Nachweis stehender Wellen, die durch Reflexion an einer Brücke zu Stande kommen, um so schwieriger wird, je kleiner die Wellenlänge der Schwingung für die betreffende Umgebung der Drähte ist, denn um so weniger intensiv ist die reflectirte Welle. Man wird deshalb zur möglichst guten Beobachtung stehender Wellen die Brückenlänge, d. h. den Abstand der Paralleldrähte klein wählen, denn dadurch wird die Amplitude der reflectirten Welle verstärkt.

Bei den Versuchen, die ich mit wässrigen Salzlösungen angestellt habe, habe ich zum Theil den Abstand $d$ der Paralleldrähte = 1 cm gewählt (ebenso $l = 1$). Dann wird für $l = 1$ cm:

$$(122''')\quad \begin{cases} \text{bei } \varkappa = 0: & \varrho' e^{\gamma\varphi'} = 0{,}810; \quad \varphi' = 0{,}10, \quad \delta b' = 4{,}1 \text{ mm.} \\ \text{bei } \varkappa = 0{,}53: & \varrho' e^{-2\pi\varphi'(\varkappa-\gamma')} = 0{,}646; \quad \varphi' = 0{,}077, \quad \delta b' = 3{,}2 \text{ mm.} \end{cases}$$

Ein Vergleich mit (122') und (122'') zeigt, dass in der That durch die kürzere Brückenlänge die Amplitude der reflectirten Welle bedeutend gestiegen ist; die Brückenverkürzung ist kleiner geworden; es ist auch zu beachten, dass der Unterschied zwischen den Brückenverkürzungen bei $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 0{,}53$ erheblich vermindert ist gegenüber dem obigen Beispiele mit längerer Brücke.

### 3) Reflexion und Übergang der Wellen an der Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit.

Bei $z = \beta\lambda$ mögen die Paralleldrähte von Luft in eine andere Substanz (z. B. Flüssigkeit) übertreten. Die Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit sei eine Ebene, die senkrecht zu den Paralleldrähten steht. In der Flüssigkeit bestehe die Wellenlänge $\lambda'$ und der Absorptionsindex $\varkappa$. Die Grenzbedingungen sind offenbar, dass sich die Stromwelle continuirlich über die Flüssigkeitsgrenze hinüber fortsetzt, und ebenso die Potentialwelle, welche von der scheinbaren Ladung $\mathfrak{e}$ der Drähte herrührt. Denn das Potential $V$ auf den Drähten muss zu beiden Seiten der Flüssigkeitsgrenze wegen der metallischen Eigenschaft der Drähte dasselbe sein.

Bezeichnet man die Wellen in Luft ohne Index, in Flüssigkeit mit dem oberen Index ', so sind also die Grenzbedingungen:

$$(123)\qquad \mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{e}'}{\varepsilon}, \quad i = i' \text{ für } z = \beta\lambda.$$

Fallen die Wellen in Luft ein ($\mathfrak{e}_e$), so tritt noch eine reflectirte Welle ($\mathfrak{e}_r$) in Luft auf, und es ist

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_e + \mathfrak{e}_r.$$

Nach (69) ist zu setzen:

$$(124)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_e = A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{z}{\lambda}}, \\ \mathfrak{e}_r = rA \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha'\frac{z}{\lambda}}, \\ \text{nach (112) ist zu setzen:} \\ \mathfrak{e}' = \delta A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}. \end{cases}$$

Dabei sind die $r$ und $\delta$ complexe Factoren (Reflexions- und Uebergangsfactor) ferner ist

$$\alpha = -\gamma + 2\pi\sqrt{-1} = 2\pi\left(-\gamma' + \sqrt{-1}\right),$$
$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \alpha'' = \alpha + \tau + 2\pi\varkappa.$$

Die Stromwellen sind aus (124) zu finden, wenn man für Luft die Gleichung (5) pag. 65

$$-\frac{\partial i_e}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}_e}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i_r}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}_r}{\partial t},$$

für die Flüssigkeit die Gleichung (5″) pag. 107:

$$-\frac{\partial i'}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}''}{\partial t} + 4\pi c\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathfrak{e}''$$

in Anwendung bringt. Erstere beiden Gleichungen liefern:

$$i_e = \quad A\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{z}{\lambda}}$$
$$i_r = -rA\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha'\frac{z}{\lambda}},$$

letztere Gleichung giebt, wenn man schreibt:

$$i' = \delta B\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

eine bestimmte Relation für $B$, die schon oben pag. 113 in der Gleichung (116) ausgedrückt ist. Man kann nun in den Amplituden für die Stromstärken $i$ unbedenklich vom Drahtwiderstande absehen, d. h. $\tau = 0$ setzen. Diese Grösse $\tau$ ist überhaupt nur beizubehalten, wenn sie mit $z$ multiplicirt auftritt, da $z$ unter Umständen grosse Werthe annehmen kann.

Bei dieser Vereinfachung ist $\alpha' = \alpha$ zu setzen, und $B$ nimmt gemäss (116′) (pag. 114) den Werth an:

$$B = A\cdot\frac{\alpha''}{\lambda'}\cdot\frac{cT}{\alpha\varepsilon} = A\frac{\alpha''}{\alpha\varepsilon}\frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Die Stromstärken werden daher:

$$i_e = \quad A\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{z}{\lambda}},$$
$$(125) \qquad i_r = -rA\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha'\frac{z}{\lambda}},$$
$$i' = \quad \delta A\frac{\alpha''}{\alpha\varepsilon}\frac{\lambda}{\lambda'}e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}.$$

Die Grenzbedingungen (123) ergeben nun:

$$(126)\qquad \begin{aligned} e^{-\alpha'\beta} + r\cdot e^{+\alpha'\beta} &= \frac{\delta}{\varepsilon}\, e^{-\alpha''\beta\frac{\lambda}{\lambda'}},\\ e^{-\alpha'\beta} - r\cdot e^{+\alpha'\beta} &= \frac{\delta}{\varepsilon}\,\frac{\alpha''}{\alpha}\,\frac{\lambda}{\lambda'}\, e^{-\alpha''\beta\frac{\lambda}{\lambda'}}. \end{aligned}$$

Hieraus ist der Reflexionsfactor $r$ und Uebergangsfactor $\delta$ leicht zu berechnen. Wir wollen dies näher ausführen für den practisch allein wichtigen Fall, dass die zeitliche Dämpfungsconstante $\gamma$ neben $2\pi$ sehr klein ist. Man kann dann in dem Factor $\frac{\alpha''}{\alpha}$ der zweiten Gleichung (126) $\gamma$ einfach gleich Null annehmen, d. h. setzen:

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = 1 - \varkappa\sqrt{-1}.$$

Ist z. B. $\gamma = 0{,}15$, wie es oben für die von mir angestellten Versuche berechnet wurde, so wird $r$ und $\delta$ nur unmerklich durch diese Vernachlässigung von $\gamma$ modificirt. Führt man für $\lambda : \lambda'$ die Bezeichnung $n$ (elektrischer Brechungsexponent) ein (cf. oben pag. 111) und setzt $\sqrt{-1} = i$, so wird (126) zu:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha'\beta} + r\cdot e^{+\alpha'\beta} &= \frac{\delta}{\varepsilon}\, e^{-\alpha''\beta n},\\ e^{-\alpha'\beta} - r\cdot e^{\alpha'\beta} &= \frac{\delta}{\varepsilon}\, n\,(1 - i\varkappa)\, e^{-\alpha''\beta n}. \end{aligned}$$

Daraus entsteht:

$$(127)\qquad \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{2\, e^{(n\alpha'' - \alpha')\beta}}{n\,(1 - i\varkappa) + 1},\quad r = -\,\frac{n\,(1 - i\varkappa) - 1}{n\,(1 - i\varkappa) + 1}\, e^{-2\alpha'\beta}.$$

Es mag bemerkt werden, dass, während $\delta$ den Uebergangsfactor für die Ladungswelle darstellt, $\delta : \varepsilon$ den Uebergangsfactor für die Welle der elektrischen Kraft (gemessen in der Umgebung der Drähte) bedeutet. Denn diese elektrische Kraft ist in der Luft proportional zu $\mathfrak{e}$, in der Flüssigkeit proportional zu $\mathfrak{e}'' : \varepsilon$.

Die Werthe, welche $r$ und $\frac{\delta}{\varepsilon}$ für $\beta = 0$ annehmen, mögen auf die Form gebracht werden:

$$(128)\qquad \begin{aligned} \frac{n\,(1 - i\varkappa) - 1}{n\,(1 - i\varkappa) + 1} &= \mathfrak{r}\cdot e^{-i\,2\pi\Delta},\\ \frac{2}{n\,(1 - i\varkappa) + 1} &= \mathfrak{d}\cdot e^{+i\,2\pi E}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{d}$ geben die Amplitudenschwächung durch Reflexion und Uebergang an, $2\pi\varDelta$ und $2\pi E$ die dabei eintretenden Phasenänderungen der einfallenden Wellen.

Man erhält aus (128):

$$(129)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}^2 = \dfrac{(n-1)^2 + n^2\varkappa^2}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}, \quad \operatorname{tg} 2\pi\varDelta = + \dfrac{2n\varkappa}{n^2 + n^2\varkappa^2 - 1}, \\ \text{wobei } 2\pi\varDelta \text{ zwischen } 0 \text{ und } + \dfrac{\pi}{2} \text{ liegt,} \\ \mathfrak{d}^2 = \dfrac{4}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}, \quad \operatorname{tg} 2\pi E = + \dfrac{n\varkappa}{n+1}, \end{cases}$$

$2\pi E$ liegt zwischen 0 und $+\frac{\pi}{2}$.

Diese Formeln sind völlig dieselben, wie sie Gültigkeit haben, falls elektrische oder optische Wellen, die sich frei (ohne Drahtleitung) als ebene Wellen fortpflanzen, senkrecht auf die Oberfläche eines absorbirenden Körpers (z. B. eines Metalls), der den Brechungsindex $n$, den Absorptionsindex $\varkappa$ besitzt, auftreffen[1]). Es ist auch leicht einzusehen, weshalb man in beiden Fällen, d. h. bei freien ebenen Wellen, und bei Drahtwellen, zu denselben Resultaten gelangt, besonders wenn man zur Lösung der hier gestellten Fragen den Hertz'schen Weg geht, d. h. die Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte integrirt. Es tritt dann die völlige Analogie beider Probleme sofort zu Tage.

Von diesem Hertz'schen Wege soll weiter unten noch mehr die Rede sein.

Wenn die Wellen nicht in Luft einfallen, sondern in Flüssigkeit, und zwar so, dass sich die einfallenden Wellen nach $-z$ fortpflanzen, und bei $z = \beta\lambda$ auf die Grenze Flüssigkeit-Luft stossen, so sind die Reflexions- und Uebergangsfactoren andere; sie mögen mit $r'$ und $\delta'$ bezeichnet werden. Es ist dann zu setzen:

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'_e + \mathfrak{e}'_r, \quad i' = i'_e + i'_r,$$

$$\mathfrak{e}'_e = A' \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

$$\mathfrak{e}'_r = r' A' \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

1) Vgl. z. B. des Verf. Physik des Äthers, p. 558. — Handbuch der Physik von Winkelmann, Bd. II, p. 824.

$$\mathfrak{e} = \delta' A' \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}},$$

$$i'_e = - A' \cdot \frac{\alpha''}{\alpha \varepsilon} \frac{\lambda}{\lambda'} \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

$$i'_r = + r' A' \cdot \frac{\alpha''}{\alpha \varepsilon} \frac{\lambda}{\lambda'} \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

$$i = - \delta' A' \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}}.$$

Die Grenzbedingungen (123) liefern daher:

$$\varepsilon \delta' \cdot e^{\alpha' \beta} = e^{\alpha'' \beta n} + r' \cdot e^{-\alpha'' \beta n},$$

$$- \varepsilon \delta' \cdot e^{\alpha' \beta} = - n \frac{\alpha''}{\alpha} e^{\alpha'' \beta n} + r' n \frac{\alpha''}{\alpha} e^{-\alpha'' \beta n}.$$

Setzt man wieder wie vorhin $\frac{\alpha''}{\alpha} = 1 - i\varkappa$, d. h. schliesst man Fälle sehr grosser zeitlicher Dämpfung $\gamma$ aus, so entsteht:

$$(130) \quad r' = + \frac{n(1 - i\varkappa) - 1}{n(1 - i\varkappa) + 1} e^{+2\alpha'' \beta n}, \quad \delta' \varepsilon = \frac{2n(1 - i\varkappa) \cdot e^{(n\alpha'' - \alpha')\beta}}{n(1 - i\varkappa) + 1}.$$

$\delta' \varepsilon$ bedeutet den Uebergangsfactor für die Welle der elektrischen Kraft (während $\delta$ den Uebergangsfactor für die Ladungswelle bedeutet), aus dem vorhin pag. 119 angeführten Grunde. Für $\beta = 0$ lassen sich aus den $r'$ und $\delta' \varepsilon$ wiederum, wie vorhin, die Phasen- und Amplitudenänderungen bei Reflexion und Uebergang leicht ableiten. Es verdient vielleicht hervorgehoben zu werden, dass es für die bei Reflexion eintretende Amplitudenschwächung gleichgültig ist, von welcher Seite (ob in Luft, oder in Flüssigkeit) die Welle einfällt, dass aber die Uebergangsschwächung der Welle der elektrischen Kraft viel bedeutender ist, wenn die Welle von Luft in Flüssigkeit übergeht, als wenn sie umgekehrt verläuft. So ist nach (129) für Wasser, bei dem $n = 9$, $\varkappa = 0$, die Uebergangsschwächung im ersten Falle nach (129):

$$\mathfrak{d} = \frac{2}{n+1} = \frac{1}{5},$$

im zweiten Falle dagegen nach (130)

$$\mathfrak{d}' = \frac{2n}{n+1} = \frac{9}{5}.$$

Während also die übergehende elektrische Kraft beim Uebergang von Luft zu Wasser nur den fünften Theil der einfallenden Kraft beträgt,

ist sie beim umgekehrten Gang fast doppelt so gross, wie die einfallende Kraft. Ein Widerspruch mit dem Energieprincip folgt aus letzterem Umstande deshalb nicht, weil die elektrische Kraft allein noch nicht die ganze Energie des elektromagnetischen Feldes, welches sich in der Umgebung der Drähte befindet, ausmacht, sondern die magnetische Kraft dabei ebenfalls massgebend ist.

### 4) Vorhandensein einer Brücke in Luft und einer Grenze Luft — Flüssigkeit.

Es soll der Fall näher betrachtet werden, dass bei $z = 0$ in Luft eine Brücke $B_1$ über den Paralleldrähten liegt, und dass diese bei $z = \beta\lambda$ in eine bis $z = \infty$ reichende Flüssigkeit der Constanten $\varepsilon$ und $\sigma$, oder $n$ und $\varkappa$, eintreten. Es handelt sich um die Bestimmung der elektrischen Kraft $P$ in einem beliebigen Punkte $z = p\lambda$ zwischen Brücke $B_1$ und Flüssigkeitsgrenze, wenn durch einen Erreger über die Brücke $B_1$ Ladungen von dem zeitlichen Verlauf:

$$\mathfrak{e} = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cos 2\pi\frac{t}{T} \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = \infty$$

in die Paralleldrähte hineingesandt werden.

Die Aufgabe ist ganz analog der oben pag. 73 und pag. 90 behandelten bei Vorhandensein zweier Brücken: es sind die Reflexionen an der Flüssigkeitsgrenze zu berücksichtigen, deren Reflexionsfactor mit $r$ bezeichnet sei, und an der Brücke $B_1$, deren Reflexionsfactor im Anschluss an die frühere Bezeichnung $r'$ genannt werden möge. Für $r'$ gilt die Formel (42) pag. 75, nämlich

$$r' = -\varrho \cdot e^{-\alpha\varphi},$$

wofür wir auch schreiben können, da $\varphi$ ein kleiner Werth ist und $\alpha'$ sich nur um die sehr kleine Grösse $\tau$ von $\alpha$ unterscheidet:

$$(131) \qquad r' = -\varrho \cdot e^{-\alpha'\varphi};$$

dagegen gelten für den Reflexionsfactor an der Flüssigkeitsgrenze die Formeln (127), (128), die zusammengezogen werden können zu:

$$(132) \qquad r = -\mathfrak{r} \cdot e^{-i2\pi\Delta} \cdot e^{-2\alpha'\beta}.$$

Die Formeln (75) bis (77) der pag. 91 können wir direct auf unseren Fall übertragen.

Nur die dortige Formel (78) erfährt eine Aenderung. Es ist nämlich hier:

$$(133)\quad rr' = \mathfrak{r}\varrho\, e^{-i2\pi\varDelta} \cdot e^{-\alpha'(\varphi+2\beta)} = \mathfrak{r}\varrho\, e^{(\gamma-\tau)(\varphi+2\beta)} \cdot e^{-i2\pi(\varDelta+\varphi+2\beta)}.$$

Nach den dortigen Formeln (76) und (77) ergaben sich Maxima der elektrischen Kraft $P$ für diejenigen Entfernungen $\beta$ der Flüssigkeitsgrenze von der Brücke $B_1$, für welche $rr'$ reell und positiv ist (Knotenentfernungen), Minima für diejenigen $\beta$, für welche $rr'$ reell und negativ ist (Bauchentfernungen). Wenn $rr'$ genügend nahe an 1 kommt, was bei starkem Reflexionsvermögen $\mathfrak{r}$, z. B. beim Wasser, eintritt, so ist für eine Knotenentfernung der Flüssigkeitsgrenze $P$ bedeutend stärker, als für eine Bauchentfernung. Bei letzterer erreicht man dann gar kein Ansprechen eines Wellenindicators, selbst wenn hinter der Flüssigkeitsgrenze eine zweite Brücke $B_2$ geeignet zu legen versucht wird, weil die Wirkung der einfallenden Wellen durch die an der Flüssigkeitsgrenze reflectirten Wellen fast vollständig vernichtet wird. Nach (133) ist

für die Knotenentfernungen:

$$(134)\quad \begin{aligned} 2\beta &= k - \varDelta - \varphi, \quad (k \text{ ganze Zahl}), \\ rr' &= +\,\mathfrak{r}\varrho \cdot e^{(\gamma-\tau)(\varphi+2\beta)}, \end{aligned}$$

für die Bauchentfernungen:

$$(135)\quad \begin{aligned} 2\beta &= k + \tfrac{1}{2} - \varDelta - \varphi, \\ rr' &= -\,\mathfrak{r}\varrho \cdot e^{(\gamma-\tau)(\varphi+2\beta)}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit den Formeln (50) und (52), welche die Knoten- und Bauchlagen einer zweiten Brücke $B_2$ angeben, zeigt, dass diese mit den Knoten- und Bauchentfernungen der Flüssigkeit nicht übereinstimmen; letztere liegen um die constante Differenz:

$$(\varDelta - \varphi)\frac{\lambda}{2}$$

näher nach der Brücke $B_1$ zu, als die Knoten- und Bauchlagen einer zweiten Brücke. Wäre $\varDelta = 0$, so lägen die Knotenentfernungen um $\varphi\frac{\lambda}{2}$ weiter von $B_1$ entfernt, als die Knotenlagen einer zweiten Brücke $B_2$, d. h. nach Formel (36) um die Brückenverkürzung weiter. Diese Lagen habe ich in »Arbeit I« »wahre elektrische Knoten« genannt, weil an diesen Stellen auf den Paralleldrähten Knoten der

elektrischen Kraft sich ausbilden, wenn die Wellen an einer Brücke $B_2$ reflectirt werden, die in einer noch dahinter liegenden Knotenlage aufliegt. Da man $\varphi$ experimentell bestimmen kann[1]), so ergiebt sich eine experimentelle Methode, um die an absorbirenden Substanzen auftretende absolute Phasenänderung zu bestimmen. Man braucht zu dem Zweck nur die Paralleldrähte von einer beliebigen Stelle an vertical nach unten zu biegen, und sie in ein grösseres Bassin der zu untersuchenden, absorbirenden Flüssigkeit, sagen wir z. B. wässrige Kupfersulfatlösung, tauchen zu lassen. Die Paralleldrähte müssen so lang sein, dass eine Reflexion an ihren Enden durch die Absorption der Wellen im Kupfersulfat sich nicht mehr bemerklich machen kann. Bei einigermassen concentrirten Lösungen genügt es, wenn die Drähte wenige Centimeter unter den Flüssigkeitsspiegel tauchen. Man verschiebt das Bassin in verticaler Richtung so lange, bis ein Wellenindicator, der zwischen Brücke $B_1$ und Flüssigkeitsgrenze angebracht ist, ein Maximum anzeigt. Der Vergleich einer so ermittelten Knotenentfernung, z. B. der ersten ($k = 1$), der Flüssigkeitsgrenze mit der ersten Brücken-Knotenlage liefert $\Delta$, wenn man zuvor noch $\varphi$ experimentell bestimmt oder theoretisch geschätzt hat.

In dieser Weise an wässrigen Kupfersulfatlösungen mit $\lambda = 75$ cm ausgeführte Experimente liessen wohl erkennen, dass $\Delta$ bei stärkerer Concentration merkliche Beträge annahm und positiv war, d. h. dass die erste Knotenentfernung der Flüssigkeitsgrenze näher nach der Brücke $B_1$ zu lag, als der erste wahre Knoten der elektrischen Kraft (welcher gleich der ersten Brücken-Knotenlage vermehrt um die Brückenverkürzung ist); aber da es sich hierbei immer nur um wenige Millimeter Verschiebung handelt, so konnte ich $\Delta$ mit einiger Genauigkeit nicht bestimmen. Folgende Tabelle giebt für wässrige Lösungen verschiedener Leitfähigkeit den nach (129) und der Tabelle der pag. 111 leicht zu berechnenden Werth von $\Delta$ und der Verschiebung $\Delta \frac{\lambda}{2}$ der ersten Knotenentfernung der Flüssigkeitsgrenze gegen den ersten wahren Knoten der elektrischen Kraft. Es ist $\lambda = 75$ cm angenommen.

---

1) »Arbeit I«, p. 30.

**Absolute Phasenänderung durch Reflexion bei wässrigen Lösungen und $\lambda = 75$ cm.**

| $K \cdot 10^8$ | 5 | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 250 | 380 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n\varkappa$ | 0,135 | 0,668 | 1,320 | 1,955 | 2,57 | 3,14 | 3,70 | 4,23 | 4,75 | 5,66 | 7,70 |
| $n^2 + n^2\varkappa^2$ | 81,0 | 82,0 | 84,8 | 89,0 | 95,0 | 101,4 | 108,8 | 116,2 | 123,0 | 145 | 200 |
| $\varDelta$ | 0,0005 | 0,002 | 0,005 | 0,007 | 0,009 | 0,010 | 0,011 | 0,012 | 0,012 | 0,0125 | 0,0123 |
| $\varDelta \frac{\lambda}{2}$ | 0,2 mm | 0,7 | 1,9 | 2,6 | 3,4 | 3,7 | 4,1 | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,6 |

Man ersieht aus dieser Tabelle, dass $\varDelta$ ein Maximum erreicht bei

$$K = 250 \cdot 10^{-8},$$

wobei $K$ das auf Quecksilber als Einheit bezogene Leitvermögen bedeutet. Dies kann man auch aus der allgemeinen Formel (129) für $\operatorname{tg} 2\pi\varDelta$ ableiten, wenn man darin für $n$ und $\varkappa$ gemäss den Formeln (110) und (111) die von $s$ abhängenden Werthe einführt, wobei $s$ nach (106) direct der Leitfähigkeit $\sigma$ oder $K$ proportional ist. Aus (110) und (111) ergiebt sich:

$$(136) \qquad n\varkappa = \frac{s\sqrt{2\varepsilon}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}}, \quad n^2 + n^2\varkappa^2 = \varepsilon\sqrt{1 + 4s^2},$$

daher nach (129)

$$\operatorname{tg} 2\pi\varDelta = \frac{2s\sqrt{2\varepsilon}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}\,(\varepsilon\sqrt{1 + 4s^2} - 1)}.$$

Für sehr grosse Werthe von $s$ wird dies zu

$$\operatorname{tg} 2\pi\varDelta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon s}},$$

daher nimmt $\varDelta$ bei sehr grossem $K$ wieder zu Null ab und erreicht ein Maximum für ein mittleres $K$. Durch Differentiation von $\operatorname{tg} 2\pi\varDelta$ nach $s$ ergiebt sich, dass bei grossem $\varepsilon$ $\varDelta$ ein Maximum erreicht bei $s = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $(\varkappa = 1 : \sqrt{3})$, d. h. nach (106) für $\sigma = 31 \,.\, 10^{-12}$, $K = 292 \,.\, 10^{-8}$. Dieses Maximum ist $\operatorname{tg} 2\pi\bar{\varDelta} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, d. h. bei grossem $\varepsilon$:

$$\bar{\varDelta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Dass die absoluten Phasenänderungen elektrischer Wellen bei der Reflexion an wässrigen Lösungen immer nur sehr klein sind,

liegt daher an der grossen Dielektricitätsconstante $\varepsilon$, d. h. an dem starken Brechungsvermögen $n$ derselben, wie es ja auch aus (129) unmittelbar hervorgeht.

Für eine Knoten- bezw. Bauchentfernung der Flüssigkeitsgrenze ist nach (134), (135) und (132)

$$(137) \qquad r \cdot e^{2\alpha' p} = \mp \mathfrak{r} \cdot e^{(\gamma - \tau)(2\beta - 2p)} e^{i 2\pi(\varphi + 2p)}.$$

Gerade wie oben pag. 79 (vgl. Formel (61)) gezeigt wurde, sind die Maxima von $P$ für diejenigen Punkte $\mathfrak{P}(p)$ zu erwarten, für welche

$$e^{i 2\pi(\varphi + 2p)} = -1,$$

d. h. z. B.

$$(138) \qquad 2p = \tfrac{1}{2} - \varphi$$

ist. In diesem Punkte wollen wir unseren Wellenindicator angebracht denken, d. h. in der Entfernung $p\lambda = \frac{\lambda}{4}(1 - 2\varphi)$ hinter der Brücke $B_1$. Es ist dies derselbe Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem auch bei Reflexion an einer im Knoten liegenden zweiten Brücke $B_2$ in Luft die elektrische Kraft $P$ am stärksten ist.

Wir wollen jetzt den Fall näher ins Auge fassen, dass die Flüssigkeitsgrenze in der ersten Knotenentfernung liegt, setzen also nach (134):

$$(139) \qquad 2\beta = 1 - \Delta - \varphi, \quad rr' = \mathfrak{r} \cdot \varrho e^{(\gamma - \tau)(1 - \Delta)},$$

nach (137) und (138):

$$(140) \qquad r \cdot e^{2\alpha' p} = + \mathfrak{r} \cdot e^{(\gamma - \tau)(\frac{1}{2} - \Delta)}.$$

Dann werden nach den Formeln (75), wenn man die dort auftretenden successiven Zeitintervalle durch untere Indices kennzeichnet, die successiven Amplituden $A_1$, $A_2$, $A_3$ etc. der elektrischen Kraft (bei Absehung von den unwesentlichen Factoren $e^{-\gamma\eta - \tau p}$, $e^{-\gamma\vartheta - \tau p}$, vgl. oben pag. 93):

$$A_1 = 1,$$

$$A_2 = e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Delta)} + \mathfrak{r} \cdot e^{-\tau(\frac{1}{2} - \Delta)},$$

$$A_3 = e^{-\gamma(1 - \Delta - \varphi)} + \mathfrak{r} \cdot e^{-\tau(\frac{1}{2} - \Delta)} \cdot e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \varphi)} + \mathfrak{r} \cdot \varrho e^{-\tau(1 - \Delta)} \cdot e^{\gamma\varphi},$$

etc. etc.

Man kann die Glieder für ein beliebiges Zeitintervall summiren und eine der früheren Formel (90) (pag. 94) analoge Formel für die

grösste unter allen Amplituden $A$ aufstellen, für die sogenannte Knotenstärke bei der Reflexion an der Flüssigkeit. Indess ist es für praktische Berechnungen bequemer, sich gewisser Recursionsformeln zu bedienen, die aus den soeben angedeuteten Reihen für die $A_1$, $A_2$ etc. leicht folgen. Setzt man nämlich:

$$(141) \quad \begin{aligned} e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\varDelta)} &= m, & e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\varphi)} &= m', \\ \mathfrak{r}\cdot\varrho e^{\gamma\varphi} e^{-\tau(1-\varDelta)} &= n, & \mathfrak{r}\cdot e^{-\tau(\frac{1}{2}-\varDelta)} &= n', \end{aligned}$$

so gelten folgende Recursionsformeln:

$$(142) \quad \begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= m\cdot A_1 + 1\cdot n', \\ A_3 &= m'\cdot A_2 + n, & A_4 &= m\cdot A_3 + n\cdot n', \\ A_5 &= m'\cdot A_4 + n^2, & A_6 &= m\cdot A_5 + n^2\cdot n', \\ A_7 &= m'\cdot A_6 + n^3, & A_8 &= m\cdot A_7 + n^3\cdot n', \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Man bemerkt die Analogie mit den früheren Formeln (93) für die Reflexion zwischen zwei Brücken.

Um eine deutliche Anschauung von dem zeitlichen Verlauf der elektrischen Kraft zu haben, soll die Reflexion an Wasser nach (142) berechnet werden, für welches nach (129) $\varDelta = 0$, $\mathfrak{r} = 0{,}8$ ist. Ferner ist bei $\lambda = 75$ cm und einer Länge der Brücke $B_1$ von 1,8 cm $\varrho . e^{\gamma\varphi} = 0{,}991$; $\varphi = 0{,}02$ (cf. oben pag. 73 und pag. 97). Da schliesslich $\tau$ nach pag. 87 $= 0{,}00285$ ist, so folgt bei $\gamma = 0{,}15$ nach (141):

$$m = 1 : 1{,}078; \quad m' = 1 : 1{,}075;$$
$$n = 0{,}789; \quad n' = 0{,}800;$$

und nach (142):

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= 1{,}73, \\ A_3 &= 2{,}39, & A_4 &= 2{,}86, \\ A_5 &= 3{,}28, & A_6 &= 3{,}54, \\ A_7 &= 3{,}78, & A_8 &= 3{,}90, \\ A_9 &= 4{,}01, & A_{10} &= 4{,}03, \\ A_{11} &= 4{,}06, & A_{12} &= 4{,}01, \\ A_{13} &= 3{,}97, & A_{14} &= 3{,}88, \\ A_{15} &= 3{,}80, & A_{16} &= 3{,}67, \\ A_{17} &= 3{,}56. \end{aligned}$$

Es ergiebt sich hiernach der in der Tafel, Figur 1, graphisch dargestellte zeitliche Verlauf der elektrischen Kraft. Die Knotenstärke ist hiernach $K = A_{11} = 4,06$.

Man kann leicht experimentell bestimmen, für welche Knotenlage einer Brücke $B_2$ in Luft dieselbe Knotenstärke erreicht wird, wie sie hier die Wasserreflexion besitzt, und hat dadurch einen neuen experimentellen Weg, um die zeitliche Dämpfungsconstante $\gamma$ zu bestimmen. Denn je nach der Grösse von $\gamma$ muss offenbar das Resultat verschieden ausfallen. Je kleiner $\gamma$ ist, um so höher muss die Ordnungszahl der Knotenlage der Brücke $B_2$ werden, welche gleiche Knotenstärke ergiebt, wie die Wasserreflexion. Denn eine Brücke $B_2$ (in Luft) ist hinsichtlich des Reflexionsvermögens der Wassergrenze überlegen. Um den Effect der an $B_2$ reflectirten Wellen zu schwächen, muss daher die Brücke $B_2$ auf einen weit entfernten Knoten geschoben werden, und zwar muss er um so weiter entfernt liegen, je kleiner $\gamma$ ist, weil bei kleinem $\gamma$ die Stärke eines selbst weit entfernten Knotens noch bedeutend ist (cf. oben pag. 82).

Diesen Versuch habe ich in folgender Weise angestellt: Die Paralleldrähte verliefen hinter der Brücke $B_1$ zunächst in Luft, sodann durchsetzten sie das Innere eines 30 cm langen Thontroges, welcher mit einer schwach concentrirten wässrigen Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit $K = 38 \,.\, 10^{-8}$ angefüllt war. Eine solche Lösung verhält sich hinsichtlich ihrer Reflexionsconstanten $\mathfrak{r}$ und $\Delta$ noch wie reines Wasser, d. h. es ist $\mathfrak{r} = 0,8$, $\Delta = 0$. Andrerseits hindert trotzdem die durch die Leitfähigkeit der Lösung bewirkte Absorption der elektrischen Wellen, dass die an dem Ende des Troges reflectirten Wellen nach dem doppelten Durcheilen der 30 cm langen Drahtstrecke im Trog in bemerklicher Weise die Erscheinungen vor dem Flüssigkeitstrog modificiren. Dort sind also nur die Reflexionen an der Brücke $B_1$ und an der Flüssigkeitsgrenze wirksam. Die Flüssigkeitsgrenze war um die erste Knotenlage von $B_1$ entfernt, d. h. lag im ersten wahren Knoten der elektrischen Kraft (vgl. oben pag. 123).

Eine Vacuumröhre, die als Wellenindicator über die Drähte beim Punkte $\mathfrak{P}$ $(2p = \frac{1}{2} - \varphi)$, d. h. fast genau in der Mitte zwischen $B_1$ und Flüssigkeitsgrenze, gelegt war, sprach nicht an, falls

die Länge der Brücke $B_1$ 2 cm, ja selbst 3 cm betrug. Erst bei der Brückenlänge $l = 4$ cm sprach sie gerade an.

Der Trog wurde nun fortgenommen und eine lange Luftleitung der Paralleldrähte hergestellt (ohne dass $B_1$ verschoben wurde). Durch Verschieben einer zweiten Brücke $B_2$ wurde gefunden, dass, falls diese Brücke im 17. Knoten lag ($k = 17$) des Ansprechen der Vacuumröhre dasselbe war, wie vorhin bei der Wasserreflexion, d. h. dass die Röhre bei kürzeren Längen der Brücke $B_1$ nicht mehr ansprach.

Berechnet man nun für $\gamma = 0{,}15$ und $k = 17$ die Knotenstärke $K$ der Brückenreflexion nach den Formeln (92), (93), so ergiebt sich $K = 1{,}89$, d. h. wesentlich kleiner, als die vorhin berechnete Knotenstärke der Wasserreflexion. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass bei dieser Berechnung die Brückenverkürzung zu Grunde gelegt ist, die der 1,8 cm langen Brücke entspricht. Man kann die Modification, welche durch grössere Länge der Brücke $B_1$ ($l = 4$ cm) herbeigeführt wird, nach der oben behandelten Theorie leicht berechnen, sie ist aber sehr unbedeutend.

Aus diesem Versuch würde demnach für die zeitliche Dämpfungsconstante $\gamma$ ein viel kleinerer Werth, nämlich $\gamma < 0{,}01$, folgen. Für den Werth $\gamma = 0{,}01$ ist die Knotenstärke der Wasserreflexion noch immer etwas grösser als die Brückenreflexion bei $k = 17$, nämlich es folgt bei $\gamma = 0{,}01$

für die Wasserreflexion:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{1,3},\ldots$ | 1 | 2,57 | 3,81 | 4,76 | 5,50 | 6,06 | 6,48 | 6,80 | 7,04 |
| $A_{2,4},\ldots$ | 1,80 | 3,20 | 4,29 | 5,13 | 5,78 | 6,27 | 6,64 | 6,92 | 7,13 |
| $A_{19},\ldots$ | 7,21 | 7,31 | 7,37 | 7,41 | 7,41 | 7,39 | | | |
| $A_{20},\ldots$ | 7,26 | 7,34 | 7,39 | 7,41 | 7,40 | , | | | |

für die Brückenreflexion:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{1,3},\ldots$ | 1 | 2,72 | 4,07 | 5,10 | 5,86 | 6,41 | 6,79 | 7,01 | 7,13 |
| $A_{2,4},\ldots$ | 1,79 | 3,19 | 4,28 | 5,09 | 5,69 | 6,12 | 6,38 | 6,54 | 6,60 |
| $A_{19},\ldots$ | 7,15 | 7,08 | | | | | | | |
| $A_{20},\ldots$ | 6,57 | | | | | | | | |

Es ist also $K$ (Wasser) $= 7{,}41$

$K$ (Brücke) $= 7{,}15$.

Trotzdem halte ich aber den Werth $\gamma = 0{,}01$ für zu klein, weil an der Luftleitung sich nur 31 Knoten beobachten liessen und bei $\gamma = 0{,}01$ und $k = 31$ nach pag. 96 die Knotenstärke folgen würde zu $K = 4{,}12$, die Bauchstärke zu $B = 1{,}05$. Wenn thatsächlich $K$ und $B$ bei $k = 31$ noch so stark von einander verschieden sein sollten, so müssten bei der Empfindlichkeit der Vacuumröhre noch viel mehr Knoten als 31 beobachtbar sein.

Ich halte daher den oben für meine Versuche wahrscheinlich erklärten Werth $\gamma = 0{,}15$ auch jetzt noch für ungefähr richtig, und glaube, dass durch irgend einen störenden Umstand, vielleicht dadurch, dass die Drahtleitung zunächst die Trogwand durchsetzen muss, bevor sie in das Wasser eintritt, die Knotenstärke der Wasserreflexion bei dem Experimente geschwächt war. — Immerhin ist es interessant, diesen Punkt durch erneute Versuche aufzuklären. — Es wäre auch denkbar, dass zur Berechnung dieser Versuche der bisher gemachte Ansatz $P_0 = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cos 2\pi\frac{t}{T}$ nicht ausreicht. Streng genommen wird ja wahrscheinlich $P_0$ ein complicirteres Gesetz befolgen.

5) Vorhandensein einer Brücke in Luft, einer Grenze Luft-Flüssigkeit und einer Brücke in Flüssigkeit.

Dieser Fall ist deshalb von Wichtigkeit, weil er die Theorie für die Versuche ergiebt, bei denen durch Verschiebung einer Brücke $B_2$ in der Flüssigkeit Aufschluss über den Brechungsindex und den Absorptionsindex derselben gewonnen werden soll.

Eine feste Brücke $B_1$ liege in Luft bei $z = 0$ über den Drähten. Bei $z = \beta\lambda$ sei die Grenze Luft-Flüssigkeit, bei $z = \beta\lambda + \beta'\lambda'$ liege eine zweite Brücke $B_2$ über den Drähten in der Flüssigkeit. Der Reflexionsfactor an der Brücke $B_1$ sei $r_1$ genannt. Für ihn gilt die Gleichung (131):

$$(143)\qquad r_1 = -\varrho\cdot e^{-\alpha'\varphi},$$

wobei $\varrho$ und $\varphi$ durch die Formeln (33) definirt sind.

Der Reflexionsfactor an der Brücke $B_2$ sei $r_2$ genannt. Für ihn gilt die Gleichung (120), wenn man darin $\beta'$ durch $\beta' + \beta n$ ersetzt:

$$(144)\qquad r_2 = -\varrho'\cdot e^{-\alpha''(2\beta'+2\beta n+\varphi')},$$

wobei $\varrho'$ und $\varphi'$ durch die Gleichungen (122) definirt sind.

Der Reflexionsfactor an der Flüssigkeitsgrenze für in Luft einfallende Wellen sei $r$ genannt. Für ihn gilt die Gleichung (132):

$$r = -\mathfrak{r} \cdot e^{-i2\pi\Delta} \cdot e^{-2\alpha'\beta}, \tag{145}$$

wobei $\mathfrak{r}$ und $\Delta$ durch die Formeln (129) definirt sind.

Der Uebergangsfactor (der elektrischen Kraft) von Luft zu Flüssigkeit sei $\delta$ genannt[1]. Für ihn gilt die Gleichung (127):

$$\delta = \frac{2e^{(n\alpha''-\alpha')\beta}}{n(1-i\varkappa)+1}. \tag{146}$$

Der Uebergangsfactor (der elektrischen Kraft) von Flüssigkeit zu Luft sei $\delta'$ genannt[2]. Für ihn gilt die Gleichung (130):

$$\delta' = \frac{2n(1-i\varkappa)}{n(1-i\varkappa)+1}\, e^{(n\alpha''-\alpha')\beta}. \tag{147}$$

Wegen der wiederholten Reflexionen an den Brücken und der Flüssigkeitsgrenze nimmt die Aufgabe nun im Allgemeinen eine sehr complicirte Gestalt an. Wir wollen uns im Folgenden auf den Fall beschränken, dass die Wellen in der Flüssigkeit eine Absorption erleiden sollen, und zwar in dem Betrage, dass Wellen, welche die Strecke $\beta'\lambda'$ viermal durchlaufen haben, nur noch unmerklich kleine Amplituden besitzen sollen.

Ferner wollen wir unser Augenmerk auf die praktisch wichtigste Frage nach der elektrischen Kraft in der Luft, d. h. zwischen Brücke $B_1$ und Flüssigkeitsgrenze, richten. Für diese kommen dann nur Wellen in Betracht, welche beliebig viele Reflexionen an $B_1$ und der Flüssigkeitsgrenze, die aber höchstens eine einmalige Reflexion an der Brücke $B_2$ erlitten haben können. Die Wellen nämlich, welche öfter an ihr reflectirt sind, kommen nach obiger Voraussetzung wegen der durch Absorption der Flüssigkeit stark verkleinerten Amplitude nicht in Betracht.

Die einfallende Welle ($P_0$) erreicht den Punkt $\mathfrak{P}$ ($z = p\lambda$) zur Zeit $\frac{t}{T} = p$.

Sie habe den Werth:

$$P_0 = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \quad \text{für } \frac{t}{T} > p.$$

---

1) Oben pag. 119 ist dieser Übergangsfactor mit $\frac{\delta}{\varepsilon}$ bezeichnet.

2) Oben pag. 121 ist dieser Übergangsfactor mit $\delta'\varepsilon$ bezeichnet.

Die einmal an der Flüssigkeitsgrenze reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2\beta - p$ und hat den Werth:

$$P_r = r \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\beta - p.$$

Die einmal an der Grenze und einmal an der Brücke $B_1$ reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2\beta + p$ und hat den Werth:

$$P_{rr_1} = rr_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\beta + p.$$

Die zweimal an der Grenze und einmal an $B_1$ reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 4\beta - p$ und hat den Werth:

$$P_{2rr_1} = r^2 r_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 4\beta - p.$$

Allgemein erreicht die $h$ mal an der Grenze und $h$ mal an $B_1$ reflectirte Welle den Punkt $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2h\beta + p$ und hat den Werth:

$$P_{hrhr_1} = (rr_1)^h \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2h\beta + p;$$

die $(h + 1)$ mal an der Grenze und $h$ mal an $B_1$ reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2(h + 1)\beta - p$ und hat den Werth:

$$P_{(h+1)rhr_1} = r\,(rr_1)^h \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\,(h + 1)\beta - p.$$

Die einmal an der Brücke $B_2$ reflectirte, sonst nicht reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2\beta + 2\beta' - p$ und hat den Werth

$$P' = \delta r_2 \delta' \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\beta + 2\beta' - p.$$

Wird diese Welle an $B_1$ reflectirt, so erreicht sie $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2\beta + 2\beta' + p$ und hat den Werth:

$$P'_{r_1} = (\delta r_2 \delta')\, r_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\beta + 2\beta' + p.$$

Wird diese Welle dann an der Flüssigkeitsgrenze reflectirt, so erreicht sie $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 4\beta + 2\beta' - p$ und hat den Werth:

$$P'_{r_1, r} = (\delta r_2 \delta') \, r_1 r \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \quad \text{für } \frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' - p.$$

Zu derselben Zeit trifft aber auch in $\mathfrak{P}$ die Welle ein, welche zuerst an der Grenze, dann an $B_1$ und zuletzt an $B_2$ reflectirt worden ist. Diese hat den Werth:

$$P'_{r, r_1} = r r_1 (\delta r_2 \delta') \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \quad \text{für } \frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' - p.$$

Der Werth ist also derselbe, wie der der Welle $P'_{r_1, r}$. Von der Zeit $\frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' - p$ an kommt also in $\mathfrak{P}$ eine elektrische Kraft $'P_{r_1 r}$ hinzu, welche den Werth hat:

$$'P_{r, r_1} = 2 r r_1 (\delta \delta' r_2) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \quad \text{für } \frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' - p.$$

Ebenso setzen sich die Wellen, welche eine Reflexion an $B_2$, eine Reflexion an der Grenze und eine zweimalige Reflexion an $B_1$ erlitten haben, aus zwei gleichen Bestandtheilen zusammen, die beide den Punkt $\mathfrak{P}$ zur Zeit $4\beta + 2\beta' + p$ erreichen. Von dieser Zeit an existirt also in $\mathfrak{P}$ auch eine elektrische Kraft des Werthes:

$$'P_{r, 2r_1} = 2 r r_1^2 (\delta \delta' r_2) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \quad \text{für } \frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' + p.$$

Allgemein setzt sich eine Welle, welche eine einmalige Reflexion an $B_2$, eine $h$-malige Reflexion an der Grenze und eine $h$-malige Reflexion an $B_1$ erlitten hat, aus $h + 1$ gleichen Bestandtheilen zusammen, welche den Punkt $\mathfrak{P}$ sämmtlich zur gleichen Zeit $\frac{t}{T} = 2(h+1)\beta + 2\beta' - p$ erreichen. Von dieser Zeit an existirt also in $\mathfrak{P}$ auch eine elektrische Kraft des Werthes:

$$'P_{hr, hr_1} = (h+1)(r r_1)^h (\delta \delta' r_2) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \quad \text{für } \frac{t}{T} > 2(h+1)\beta + 2\beta' - p.$$

Wellen, welche eine einmalige Reflexion an $B_2$, eine $h$-malige Reflexion an der Grenze und eine $(h+1)$-malige Reflexion an $B_1$ erlitten haben, setzen sich ebenfalls aus $h + 1$ gleichen Bestandtheilen zusammen, welche den Punkt $\mathfrak{P}$ sämmtlich zur gleichen Zeit $\frac{t}{T} = 2(h+1)\beta + 2\beta' + p$ erreichen. Von dieser Zeit an existirt also in $\mathfrak{P}$ auch eine elektrische Kraft des Werthes:

$$'P_{hr, (h+1) r_1} = (h+1) r_1 (r r_1)^h (\delta \delta' r_2) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \quad \text{für } \frac{t}{T} > 2(h+1)\beta + 2\beta' + p.$$

Wenn man nun die elektrische Kraft $P$ im Punkte $\mathfrak{P}$ zu irgend einer Zeit $t$ finden will, so sind alle diejenigen Wellen zu summiren, welche zu dieser Zeit $t$ den Punkt $\mathfrak{P}$ schon erreicht haben. Wie aus dem Vorstehenden ersichtlich ist, sind Zeitpunkte von den vier verschiedenen Formen zu unterscheiden:

$$2h\beta+p, \quad 2(h+1)\beta-p, \quad 2(h+1)\beta+2\beta'-p, \quad 2(h+1)\beta+2\beta'+p,$$

wobei $h$ eine ganze positive Zahl oder Null ist. Je nach der Grösse von $\beta'$ ist nun die wirkliche Reihenfolge dieser Zeitpunkte verschieden.

Die Zeitpunkte, welche von $\beta'$ nicht abhängen, bilden die Reihenfolge:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ p & 2\beta-p & 2\beta+p & 4\beta-p & 4\beta+p & 6\beta-p & 6\beta+p, \end{matrix}$$

die Zeitpunkte, welche von $\beta'$ abhängen, bilden die Reihenfolge:

$$\begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' \\ 2\beta+2\beta'-p & 2\beta+2\beta'+p & 4\beta+2\beta'-p & 4\beta+2\beta'+p & 6\beta+2\beta'-p. \end{matrix}$$

Diese treten nun zwischen die Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5 etc., jedoch ist der Beginn ihres Zwischentretens je nach der Grösse von $\beta'$ verschieden.

Für $0 < 2\beta' < \begin{matrix} 2p \\ 2\beta-2p \end{matrix}$ ist die Reihenfolge:

$$\text{A)}\quad \begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & 1' & & 2' & & 3' & & 4' & & 5' & \end{matrix} \quad \text{etc.,}$$

für $\begin{matrix} 2p \\ 2\beta-2p \end{matrix} < 2\beta' < 2\beta$:

$$\text{B)}\quad \begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & & & 1' & & 2' & & 3' & & 4' & \end{matrix} \quad \text{etc.,}$$

für $2\beta < 2\beta' < \begin{matrix} 2\beta+2p \\ 4\beta-2p \end{matrix}$:

$$\text{C)}\quad \begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & & & & & 1' & & 2' & & 3' & \end{matrix} \quad \text{etc.,}$$

für $\begin{matrix} 2\beta+2p \\ 4\beta-2p \end{matrix} < 2\beta' < 4\beta$:

$$\text{D)}\quad \begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & & & & & & & 1' & & 2' & \end{matrix} \quad \text{etc.,}$$

für $4\beta < 2\beta' < \begin{matrix} 4\beta+2p \\ 6\beta-2p \end{matrix}$:

$$\text{E)}\quad \begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & & & & & & & & & 1' & \end{matrix} \quad \text{etc.}$$

Setzt man zur Abkürzung:

(148) $$\delta\delta' r_2 = r',$$

so ist also im Falle A):

$$p < \frac{t}{T} < 2\beta - p: \qquad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p},$$

$$2\beta - p < \frac{t}{T} < 2\beta + 2\beta' - p: \quad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + r\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

$$2\beta + 2\beta' + p < \frac{t}{T} < 2\beta + p: \qquad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + r\cdot e^{2\alpha' p} + r'\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

$$2\beta + p < \frac{t}{T} < 2\beta + 2\beta' + p: \quad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + rr_1 + r\cdot e^{2\alpha' p} + r'\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

(149) $$2\beta + 2\beta' + p < \frac{t}{T} < 4\beta - p: \qquad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + rr_1 + r'r_1 + (r + r')\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

$$4\beta - p < \frac{t}{T} < 4\beta + 2\beta' - p:$$

$$P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + r_1(r + r') + r(1 + rr_1)\cdot e^{2\alpha' p} + r'\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

$$4\beta + 2\beta' - p < \frac{t}{T} < 4\beta + p:$$

$$P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + r_1(r + r') + r(1 + rr_1)\cdot e^{2\alpha' p} + r'(1 + 2rr_1)\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

etc. etc.

Die Fälle A), C), E) etc. sind dadurch gekennzeichnet, dass ist:

𝔄) $$2\beta' = a\cdot 2\beta + \mu,$$

die Fälle B), D), F) etc., dass ist

𝔅) $$2\beta' = a\cdot 2\beta - \mu;$$

dabei bedeutet $a$ eine ganze Zahl, d. h. $a = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu$ ist ein positiver Werth, der liegt zwischen:

(150) $$0 < \mu < \frac{2p}{2\beta - 2p}.$$

Setzt man nun

(151) $$1 + rr_1 + (rr_1)^2 + (rr_1)^3 + \cdots + (rr_1)^h = M_h,$$

(152) $$1 + 2rr_1 + 3(rr_1)^2 + 4(rr_1)^3 + \cdots + h(rr_1)^{h-1} = N_h,$$

$$\text{und } r' = r\cdot r'',$$

so gilt allgemein, dass für die Fälle 𝔄) der zeitliche Verlauf der elektrischen Kraft $P$ ist:

$$
(153)\left\{\begin{array}{l}
2h\beta+p<\frac{t}{T}<2h\beta+p+\mu: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p}\cdot\left\{M_h+r\cdot e^{2\alpha' p}M_{h-1}+r''r_1 rN_{h-a-1}+r''r\cdot e^{2\alpha' p}N_{h-a}\right\}, \\
2h\beta+p+\mu<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p}\cdot\left\{M_h+r\cdot e^{2\alpha' p}M_{h-1}+r''r_1 rN_{h-a}+r''r\cdot e^{2\alpha' p}N_{h-a}\right\}, \\
2(h+1)\beta-p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p+\mu: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p}\cdot\left\{M_h+r\cdot e^{2\alpha' p}M_h+r''r_1 rN_{h-a}+r''r\cdot e^{2\alpha' p}N_{h-a}\right\}, \\
2(h+1)\beta-p+\mu<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta+p: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p}\cdot\left\{M_h+r\cdot e^{2\alpha' p}M_h+r''r_1 rN_{h-a}+r''r\cdot e^{2\alpha' p}N_{h-a+1}\right\}.
\end{array}\right.
$$

Für die Fälle $\mathfrak{B}$) ist der zeitliche Verlauf der elektrischen Kraft:

$$
(154)\left\{\begin{array}{l}
2h\beta+p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p-\mu: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p}\cdot\left\{M_h+r\cdot e^{2\alpha' p}M_{h-1}+r''r_1 rN_{h-a}+r''r\cdot e^{2\alpha' p}N_{h-a}\right\}, \\
2(h+1)\beta-p-\mu<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p}\cdot\left\{M_h+r\cdot e^{2\alpha' p}M_{h-1}+r''r_1 rN_{h-a}+r''r\cdot e^{2\alpha' p}N_{h-a+1}\right\}, \\
2(h+1)\beta-p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta+p-\mu: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p}\cdot\left\{M_h+r\cdot e^{2\alpha' p}M_h+r''r_1 rN_{h-a}+r''r\cdot e^{2\alpha' p}N_{h-a+1}\right\}, \\
2(h+1)\beta+p-\mu<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta+p: \\
P=e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p}\cdot\left\{M_h+r\cdot e^{2\alpha' p}M_h+r''r_1 rN_{h-a+1}+r''r\cdot e^{2\alpha' p}N_{h-a+1}\right\}.
\end{array}\right.
$$

Dabei bedeuten $h$ ganze Zahlen von Null an, der Werth der ganzen Zahl $a$ richtet sich nach dem Werthe von $2\beta'$ gemäss den Gleichungen $\mathfrak{A}$) und $\mathfrak{B}$); sollte durch Einsetzen specieller Werthe $a$ der untere Index an $N$ negativ oder Null werden, so ist das entsprechende $N$ gleich Null zu setzen.

In diesen Formeln stellen die ersten beiden, von $M_h$ bezw. $M_{h-1}$ abhängenden Glieder den Werth der elektrischen Kraft dar, wie er

sich durch alleinige Reflexionen an der Flüssigkeitsgrenze und der Brücke $B_1$ bilden würde. Er ist der überwiegende Theil, falls, wie wir voraussetzten, die Absorption in der Flüssigkeit sich so bemerkbar macht, dass Wellen, die zweimal an der Brücke $B_2$ reflectirt sind, überhaupt nicht mehr in Betracht kommen. Hinsichtlich der Abhängigkeit der elektrischen Kraft von $\beta$ können wir daher das im vorigen Abschnitt gewonnene Resultat benutzen: $P$ ist ein Maximum, falls $rr_1$ reell und positiv ist (Knotenentfernungen der Flüssigkeitsgrenze). Wir wollen speciell jetzt voraussetzen, es liege die Flüssigkeitsgrenze in der ersten Knotenentfernung[1]), d. h. es sei nach (139) (dort bedeutet $r'$ dasselbe, was hier $r_1$ bedeutet):

$$(155) \qquad 2\beta = 1 - \Delta - \varphi, \quad rr_1 = \mathfrak{r} \cdot \varrho e^{(\gamma - \tau)(1 - \Delta)}.$$

Ferner wollen wir annehmen, dass als Punkt $\mathfrak{P}$ derjenige gewählt ist, in welchem sich die Wirkung der elektrischen Kraft am besten beobachten lässt, d. h. nach (138) sei

$$(156) \qquad 2p = \tfrac{1}{2} - \varphi.$$

Dann ist nach (140):

$$(157) \qquad r \cdot e^{2\alpha' p} = \mathfrak{r} \cdot e^{(\gamma - \tau)(\frac{1}{2} - \Delta)}.$$

In welcher Weise nun die elektrische Kraft mit der Lage der Brücke $B_2$ in der Flüssigkeit variirt, ist jetzt leicht aus den Formeln (153) und (154) zu erkennen. Die Lage der Brücke $B_2$ kommt in dem Werthe von $\beta'$ zur Geltung. $\beta'$ tritt nur in dem Factor $r''$ auf. Da $rr_1$, $M_h$, $N_h$ und $r . e^{2\alpha' p}$ bei den getroffenen Verfügungen reelle Grössen sind, so ist die elektrische Kraft ein Maximum, wenn

$r''$ positiv reell

ist (Knotenlagen der Brücke $B_2$), ein Minimum, wenn

$r''$ negativ reell

ist (Bauchlagen von $B_2$). Dieses Resultat wäre ganz dasselbe geblieben, wenn wiederholte Reflexionen an $B_2$ berücksichtigt wären,

1) Dieser Fall ist bei hohem Reflexionsvermögen $\mathfrak{r}$ praktisch allein wichtig, da, wie oben pag. 123 betont wurde, nur bei Knotenentfernungen der Flüssigkeitsgrenze die Wirkung der Verschiebung einer Brücke $B_2$ in der Flüssigkeit deutlich beobachtbar ist.

denn der Unterschied wäre nur der, dass für $P$ analoge Formeln wie (153), (154) gelten, in welchen nur die Factoren: $rr_1$, $re^{2\alpha' p}$, $r''$ (letzteres in höheren Potenzen als der ersten) auftreten. Sind erstere beiden Factoren reell, so muss es auch der letzte ($r''$) sein, falls $P$ ein Maximum oder Minimum hinsichtlich $\beta'$ sein soll. Die hier bestimmten Knoten- bezw. Bauchlagen der Brücke $B_2$ gelten also auch für Versuche in nicht-absorbirenden Substanzen.

Nun ist nach den Formeln (127), (144), (146), (147), (148) und (152):

(158) $$r'' = \frac{4\varrho' n(1 - i\varkappa)\cdot e^{-\alpha''(2\beta' + \varphi')}}{[n(1 - i\varkappa) + 1]\,[n(1 - i\varkappa) - 1]}.$$

Setzt man

(159) $$\frac{n(1 - i\varkappa)}{\{n(1 - i\varkappa) + 1\}\{n(1 - i\varkappa) - 1\}} = \mathfrak{r}'\cdot e^{i2\pi\Delta'},$$

d. h.

(160) $$\mathfrak{r}'^2 = \frac{n^2(1 + \varkappa^2)}{\{(n + 1)^2 + n^2\varkappa^2\}\{(n - 1)^2 + n^2\varkappa^2\}},$$
$$\operatorname{tg} 2\pi\Delta' = \varkappa\,\frac{n^2(1 + \varkappa^2) + 1}{n^2(1 + \varkappa^2) - 1},$$

wobei $2\pi\Delta'$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so wird

$$r'' = 4\varrho'\mathfrak{r}'\cdot e^{i2\pi\Delta'}\cdot e^{-\alpha''(2\beta' + \varphi')},$$

oder da

$$\alpha'' = -\gamma + \tau + 2\pi\varkappa + 2\pi i,$$

so ist

(161) $$r'' = 4\varrho'\mathfrak{r}'\cdot e^{(\gamma - \tau - 2\pi\varkappa)(2\beta' + \varphi')}\cdot e^{-i2\pi(2\beta' + \varphi' - \Delta')}.$$

Daher sind die Knotenlagen der Brücke $B_2$:

(162) $$2\beta' + \varphi' - \Delta' = 1, 2, \cdots k \cdots,$$

die Bauchlagen von $B_2$:

(163) $$2\beta' + \varphi' - \Delta' = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2} \cdots k - \tfrac{1}{2} \cdots.$$

Dabei bedeutet $k$ eine ganze Zahl, die mindestens gleich 1 ist.

Die successiven Bauch- und Knotenlagen von $B_2$ haben daher einen constanten Abstand von $\frac{1}{4}\lambda'$. Man erhält also, wenn die Flüssigkeitsgrenze in einer Knotenentfernung von der Brücke $B_1$ liegt, Aufschluss über die wahre Wellenlänge $\lambda'$ in der Flüssigkeit durch Einstellung der Brücke $B_2$ auf die Bauch- bezw. Knotenlagen. Bei einer absorptionsfreien oder

wenig absorbirenden Flüssigkeit, für welche keine merkliche Phasenänderung $\Delta$ der Reflexion auftritt, fallen die Knotenentfernungen der Flüssigkeitsgrenze nach pag. 123 in die wahren elektrischen Knoten des Drahtsystems. Diese Knotenentfernung habe ich daher bei meinen früher beschriebenen[1]) Versuchen an Wasser und anderen Flüssigkeiten gewählt, weil man dann richtige Werthe ihrer Brechungsexponenten erhalten muss.

Die Entfernung $\beta'\lambda'$ der ersten Bauchlage von der Flüssigkeitsgrenze muss nach (163) je nach $\Delta'$, d. h. dem Absorptionsindex, nach $\lambda'$, d. h. dem Brechungsindex, und nach $\varphi'$, d. h. der Länge des Bügels $B_2$, eine verschiedene sein. Mit zunehmender Absorption, d. h. wachsendem $\Delta'$, wird nach (163) $\beta'$ grösser, da ausserdem nach pag. 115 $\varphi'$ mit zunehmendem $\varkappa$ kleiner wird. Da aber mit zunehmender Absorption $\lambda'$ kleiner wird, wenigstens wenn die Dielektricitätsconstante der Flüssigkeit einen festen Werth behält, so ist nicht ohne Weiteres klar, ob die Bäuche und Knoten von $B_2$ mit zunehmender Absorption nach der Flüssigkeitsgrenze hinrücken, oder ob sie sich von ihr entfernen.

Folgende Tabelle enthält die Berechnung für wässrige Lösungen verschiedener Leitfähigkeit bei $\lambda = 75$ cm. Es ist dabei die Dielektricitätsconstante $\varepsilon$ fest zu 81 angenommen worden. Die Formel (160) vereinfacht sich bei der Grösse von $n^2(1+\varkappa^2)$ zu $\operatorname{tg} 2\pi\Delta' = \varkappa$. $\varphi'$ ist nach (122) zu entnehmen. Der Berechnung sind zwei Bügellängen $l_1 = 1{,}8$ cm und $l_2 = 1$ cm zu Grunde gelegt. Dem entsprechend ist $\varphi'$ mit $\varphi'_1$ und $\varphi'_2$ bezeichnet. Die Grösse

$$b'_{1,2} = (\tfrac{1}{2} + \Delta' - \varphi'_{1,2})\frac{\lambda'}{2}$$

bedeutet die Entfernung der ersten Bauchlage des $B_2$ vom Flüssigkeitsanfang, die unteren Indices beziehen sich auf die beiden verschiedenen Brückenlängen $l_1$ und $l_2$.

---

1) »Arbeit I und II«.

Abhängigkeit der ersten Bauchlage des $B_2$ von der Leitfähigkeit.

| $K \cdot 10^8$ | 5 | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 250 | 380 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varkappa$ | 0,015 | 0,074 | 0,145 | 0,212 | 0,274 | 0,329 | 0,380 | 0,427 | 0,466 | 0,531 | 0,647 |
| $\frac{\lambda'}{2}$ | 4,16 cm | 4,15 | 4,12 | 4,07 | 4,00 | 3,93 | 3,86 | 3,79 | 3,68 | 3,52 | 3,15 |
| $\Delta'$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| $\varphi_1'$ | 0,14 | 0,14 | 0,14 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,12 | 0,12 | 0,11 | 0,10 | 0,09 |
| $\varphi_2'$ | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,08 | 0,08 | 0,07 |
| $b_1'$ | 1,50 cm | 1,53 | 1,57 | 1,63 | 1,64 | 1,65 | 1,70 | 1,67 | 1,69 | 1,69 | 1,58 |
| $b_2'$ | 1,66 | 1,70 | 1,73 | 1,79 | 1,80 | 1,81 | 1,81 | 1,85 | 1,80 | 1,76 | 1,64 |

Die $b'$ ändern sich also weit weniger, als die $\frac{\lambda'}{4}$. Ohne Berücksichtigung des wechselnden $\Delta'$ und $\varphi'$ hätte sich der erste Bauch um etwa 5 mm der Flüssigkeitsgrenze nähern müssen, wenn $K$ von 0 auf $380 . 10^{-8}$ gewachsen ist, während er nach der Tabelle bei diesen beiden extremen $K$ ungefähr gleich liegt und für ein mittleres $K$ eine maximale Verschiebung von nur etwa 2 mm zeigt. — Beobachtungen, welche in dieser Weise angestellt worden sind, dass die Flüssigkeitsgrenze immer in die erste Knotenentfernung gelegt ist, ergaben, dass die Lage des ersten Bauches nahezu unabhängig von $K$ ist.

Die Verschiebung der ersten Bauchlage des $B_2$ mit wachsendem $\varkappa$, d. h. wachsender Leitfähigkeit $K$, ist bequemer und einwandsfreier zu beobachten, wenn man die Grenze Flüssigkeit-Luft in fester Lage gegen die Brücke $B_1$ belässt, etwa in der ersten Knotenentfernung, die $\varkappa = 0$ entspricht. Bei allmählichem Zusatz von Salz kann man dann bequem die Verschiebung des ersten Bauches beobachten. In dieser Weise wurden die von mir in der Arbeit II beschriebenen Versuche an wässrigen Lösungen angestellt. — Die strenge Theorie dieser Versuche ist sehr complicirt, weil jetzt die Gleichungen (153), (154) hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von $\beta'$ zu discutiren sind, wobei die Grösse $rr_1$, d. h. auch $M_h$ und $N_h$, nicht mehr reell ist.

Eine angenäherte Theorie kann man sich verschaffen, indem man festsetzt, dass in den Formeln (153), (154) bei der ersten Bauchlage des $\beta'$ die grössten Glieder, welche von $\beta'$, d. h. $r''$, abhängen, den Einfluss der grössten Glieder, welche von $r''$ unabhängig sind, möglichst zu hemmen suchen. Man erhält dann das Resultat, dass

die ersten Bauchlagen näher nach der Flüssigkeitsgrenze zu liegen müssen, als es in voriger Tabelle berechnet ist.

Die Beobachtungen[1]) ergeben, dass die erste Bauchlage nahezu dieselbe ist, wie sie bei constanter Brückenverkürzung (constantem $\varphi'$) allein der wechselnden Wellenlänge $\lambda'$ entsprechen würde. Dieses Resultat folgt theoretisch nicht, vielmehr sind die Entfernungen der ersten Bauchlage von der Flüssigkeitsgrenze immer noch grösser, als die beobachteten Werthe. — Wenn man die Rechnung als völlig bindend anerkennen wollte, so würde sich hieraus ergeben, dass bei hohen Leitfähigkeiten (von $K = 125 . 10^{-8}$ an) die Wellenlänge $\lambda'$ in der Lösung kleiner ist, als sie hier unter Annahme einer constanten Dielektricitätsconstante berechnet wurde, d. h. dass die Dielektricitätsconstante bei grosser Leitfähigkeit zunimmt. Indess wird man diesen Schluss nicht mit Sicherheit ziehen können, da die theoretische Berechnung (auch hinsichtlich der Variation des $\varphi'$) zu unsicher ist.

Jedenfalls geht aus dem Vorstehenden hervor, dass die Lage der ersten Bauchlage allein, wenn man sie auf geringe Bruchtheile der Wellenlänge $\lambda'$ berechnen will, in sehr complicirter Weise von der Leitfähigkeit der Lösung und der Länge der angewandten Brücke $B_2$ abhängt. Einen zuverlässigen Werth für die Wellenlänge $\lambda'$ in der Flüssigkeit kann man daher nur erhalten, wenn ausser dem ersten Bauch mindestens noch der erste Knoten mit der Brücke $B_2$ beobachtbar ist.

Auch die Theorie der anderen Erscheinungen, welche eintreten, wenn der Flüssigkeitsanfang nicht genau in einer Knotenentfernung von der Brücke $B_1$ entfernt liegt, und welche ich in der »Arbeit II« pag. 339, 340 für Wasser beschrieben habe, lässt sich mit Strenge wohl kaum ableiten, weil die Rechnungen zu complicirt werden. Das Hauptresultat, dass die Wellenlänge $\lambda'$ etwas zu klein ausfällt, wenn der Flüssigkeitsanfang etwas näher, als eine Knotenentfernung, an die Brücke $B_1$ heranrückt, dagegen etwas zu gross im umgekehrten Falle, kann man sich in folgender Weise plausibel machen: Infolge des starken Reflexionsvermögens $\mathfrak{r}$ wirkt der Wasseranfang fast wie

1) Vergl. »Arbeit II«, p. 353, 354.

eine über die Drähte gelegte Brücke. Eine solche verkürzt die Eigenschwingungsdauer des zwischen ihr und der Brücke $B_1$ liegenden Theiles der Paralleldrähte, wenn sie der Brücke $B_1$ genähert wird. Wenn daher der Flüssigkeitsanfang um etwas weniger von der Brücke $B_1$ entfernt ist, als der ersten Knotenentfernung entspricht, so ist die Grundschwingung des zwischen $B_1$ und dem Flüssigkeitsanfang liegenden Theiles des Drahtsystems von etwas kürzerer Periode, als die Periode $T$ des Erregers. Die Knotenlagen der Brücke $B_2$ in der Flüssigkeit werden Lagen entsprechen, für die weder volle Resonanz mit dem Erreger, noch mit dem zwischen $B_1$ und der Flüssigkeitsgrenze liegenden Theil der Paralleldrähte eintritt, sondern Lagen, die zwischen diesen beiden Werthen liegen. Daraus erkennt man, dass die Wellenlänge $\lambda'$ in der Flüssigkeit kleiner wird, wenn die Flüssigkeitsgrenze an $B_1$ heranrückt, aber nicht in gleichem Verhältniss mit der Verschiebung der letzteren zur Wellenlänge $\lambda$ in Luft. So beträgt nach »Arbeit II« pag. 324 bei Verschiebung der Flüssigkeitsgrenze um 1 cm, d. h. bei Aenderung der Eigenschwingungsdauer um 2,7%, die Aenderung des $\lambda'$ nur etwa $\frac{1}{2}$%. Die procentische Aenderung des $\lambda'$ wird sich um so mehr der procentischen Verschiebung der Flüssigkeitsgrenze nähern, je geringer die zeitliche Dämpfung der Eigenschwingungen des Theiles der Paralleldrähte ist, der zwischen Brücke $B_1$ und Flüssigkeitsanfang abgegrenzt ist, d. h. je grösser das Reflexionsvermögen $\mathfrak{r}$ ist. — Das Resultat, dass sich der erste Bauch der Brücke $B_2$ dem Flüssigkeitsanfang nähert, wenn dieser sich von der Brücke $B_1$ entfernt, erhält man theoretisch in ähnlicher Weise bei nicht-absorbirenden Flüssigkeiten, wie es hier oben für absorbirende angedeutet worden ist. Experimentell wurde festgestellt (Arbeit II, pag. 340), dass, falls der Flüssigkeitsanfang von der Brücke $B_1$ um $a$ mm zurückgeschoben wurde, der erste Bauch um 0,22 $a$ mm sich der Flüssigkeitsgrenze nähert.

Im Folgenden soll wieder vorausgesetzt werden, dass die Flüssigkeitsgrenze genau um die erste Knotenentfernung von der festen Brücke $B_1$ abstehe.

Es gelte also die Relation (155), die wir auch so schreiben können:

$$(164) \qquad 2\beta + \varphi = 1 - \Delta, \quad rr_1 = \mathfrak{r}\varrho \cdot e^{(\gamma - \tau)(2\beta + \varphi)}.$$

Ferner ist nach (157):

$$r \cdot e^{2\alpha' p} = \mathfrak{r} \cdot e^{(\gamma - \tau)(\frac{1}{2} - \Delta)}. \tag{165}$$

Es soll nun das im Laufe der Zeit erreichte Maximum der elektrischen Kraft $P$ untersucht werden, wenn die Brücke $B_2$ in einer Knotenlage, bezw. einer Bauchlage liegt, d. h. die Knotenstärke, bezw. Bauchstärke der Brücke $B_2$. Für erstere ist annähernd $2\beta' = k \,.\, 2\beta$, für letztere annähernd $2\beta' = k \,.\, 2\beta - \frac{1}{2}$, wobei die ganze Zahl $k$ die Ordnungszahl des Knotens, bezw. Bauches bedeutet. Wir können beide Fälle sowohl als einen Fall $\mathfrak{A}$) der pag. 135 auffassen, als einen Fall $\mathfrak{B}$). Thun wir das erstere, so sind die Formeln (153) anzuwenden, thun wir das letztere, so sind die Formeln (154) anzuwenden. Das Resultat bleibt in beiden Fällen gleich. Wenden wir z. B. letztere Formeln an.

Für eine Knotenlage ist die Grösse $\mu$ der Formel $\mathfrak{B}$) sehr klein, da annähernd $2\beta' = k \,.\, 2\beta$ ist. Daher ist das zweite und vierte Zeitintervall der Formeln (154) sehr klein. Wir brauchen nur das erste und dritte der dortigen Zeitintervalle zu berücksichtigen. Dies sind nahezu die Zeitintervalle, die oben auf pag. 76 als Zeitintervalle I und II bezeichnet sind. Nennen wir die entsprechenden elektrischen Kräfte $P_{\text{I}}$ und $P_{\text{II}}$, so ist also

für den $k^{\text{ten}}$ Knoten der Brücke $B_2$:

$$\begin{aligned} P_{\text{I}} &= e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot M_{h-1} + r'' \left[ r r_1 \cdot N_{h-k} + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot N_{h-k} \right] \right\}, \\ P_{\text{II}} &= e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot M_h + r'' \left[ r r_1 \cdot N_{h-k} + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot N_{h-k+1} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{166}$$

Für eine Bauchlage des $B_2$ ist die Grösse $\mu$ der Formel $\mathfrak{B}$) nahezu gleich $\frac{1}{2}$, da annähernd $2\beta' = k \,.\, 2\beta - \frac{1}{2}$ ist. Daher ist das erste und dritte Zeitintervall der Formeln (154) sehr klein. Durch Berücksichtigung allein der zweiten und vierten der dortigen Zeitintervalle erhält man

für den $k^{\text{ten}}$ Bauch der Brücke $B_2$:

$$\begin{aligned} {}_{\text{I}}P &= e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot M_{h-1} + r'' \left[ r r_1 N_{h-k} + r \cdot e^{2\alpha' p} N_{h-k+1} \right] \right\}, \\ {}_{\text{II}}P &= e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r \cdot e^{2\alpha' p} M_h + r'' \left[ r r_1 N_{h-k+1} + r \cdot e^{2\alpha' p} N_{h-k+1} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{167}$$

Die unteren Indices I und II haben hier dieselbe Bedeutung, wie in den Formeln (166). — Nach pag. 78, Formeln (55), (56), ist für das Zeitintervall I zu setzen:

$$\frac{t}{T} = 2h\beta + p + \eta, \text{ wobei } 0 < \eta < 2\beta - 2p, \tag{168}$$

für das Zeitintervall II:

$$\frac{t}{T} = 2(h+1)\beta - p + \vartheta, \text{ wobei } 0 < \eta < 2p. \tag{169}$$

Die $M_h$ und $N_h$ sind nach den Formeln (151) der pag. 135 definirt. Man kann die dort auftretende Summation leicht ausführen und erhält

$$M_h = \frac{(rr_1)^{h+1} - 1}{rr_1 - 1}, \quad N_h = \frac{h(rr_1)^h}{rr_1 - 1} - \frac{(rr_1)^h - 1}{(rr_1 - 1)^2}. \tag{170}$$

Sieht man nun von den unwesentlichen Factoren $e^{-\gamma\eta} . e^{-\tau p}$ bezw. $e^{-\gamma\vartheta} . e^{-\tau p}$ ab[1]), und setzt zur Abkürzung (cf. oben pag. 93, Formeln (84), (87)):

$$\begin{gathered} \mathfrak{r} e^{-\tau(1-\varDelta)} \cdot \varrho\, e^{\gamma\varphi} = f, \quad e^{2\gamma\beta} = g, \\ 1 + \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} = a, \quad 1 + fg\,\frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} = a', \end{gathered} \tag{171}$$

so wird nach (164) und (165):

$$\begin{gathered} rr_1 = fg = \frac{a'-1}{a-1} = \mathfrak{r}\varrho e^{(\gamma-\tau)(1-\varDelta)} \\ r \cdot e^{2\alpha' p} = a' - 1 = \mathfrak{r} e^{(\gamma-\tau)(\frac{1}{2}-\varDelta)}, \end{gathered} \tag{172}$$

und es werden die Amplituden der elektrischen Kraft

im $k^{\text{ten}}$ Knoten:

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{I}} = \frac{g}{fg-1} \Big\{ & a f^{h+1} - a' g^{-(h+1)} \\ & + r'' a f g^{-k} \Big[ (h-k) f^{h-k} - \frac{f^{h-k} - g^{-(h-k)}}{fg-1} \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{173}$$

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{II}} = \frac{g}{fg-1} e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\varDelta)} \Big\{ & a' \big( f^{h+1} - g^{-(h+1)} \big) \\ & + r'' f g^{-k} \Big[ (h-k+1) a' f^{h-k} - a g \frac{f^{h-k+1} - g^{-(h-k+1)}}{fg-1} \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{174}$$

---

1) Vgl. dazu die Bemerkung der p. 93.

im $k^{\text{ten}}$ Bauch:

$$(175)\quad {}_{\text{I}}A = \frac{g}{fg-1}\Big\{af^{h+1} - a'g^{-(h+1)} + r''fg^{-k}\Big[(h-k+1)a'f^{h-k} - ag\frac{f^{h-k+1}-g^{-(h-k+1)}}{fg-1}\Big]\Big\},$$

$$(176)\quad {}_{\text{II}}A = \frac{g}{fg-1}e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\varDelta)}\Big\{a'\big(f^{h+1} - g^{-(h+1)}\big) + r''afg^{-(k-1)}\Big[(h-k+1)f^{h-k+1} - \frac{f^{h-k+1}-g^{-(h-k+1)}}{fg-1}\Big]\Big\}.$$

Wenn man die maximalen Werthe ermitteln will, die diese Amplituden im Laufe der Zeit, d. h. durch Veränderung des $h$ annehmen, d. h. die Knotenstärken $K$ und Bauchstärken $B$ der Brücke $B_2$, so sind die Differentialquotienten der $A$ nach $h$ gleich Null zu setzen. Die diesen Gleichungen genügenden $h$ entsprechen denjenigen Zeiten, zu welchen die $A$ ihr Maximum erreichen, wenigstens wenn man als $h$ die der Wurzel der Gleichung $\frac{\partial A}{\partial h} = 0$ zunächst benachbarte ganze Zahl wählt. Im Folgenden soll $h$ als continuirliche Veränderliche betrachtet (cf. oben pag. 94) und für $h$ direct die Wurzel der Gleichung $\frac{\partial A}{\partial h} = 0$ genommen werden. Die so berechneten maximalen Amplituden von $A$, d. h. die $K$ und $B$, unterscheiden sich sehr wenig von den Werthen, die dem ganzzahligen $h$ entsprechen, weil in der Nähe des zeitlichen Maximums die $A$ wenig mit $h$ variiren (vgl. die beiden oben pag. 127 und pag. 129 berechneten Beispiele der Wasserreflexion).

Der Ausdruck $\frac{\partial A}{\partial h} = 0$ ist im Allgemeinen eine ziemlich complicirte transcendente Gleichung für $h$, welche bei negativem $r''$, d. h. in den Bauchlagen, zwei positive Wurzeln besitzt, während für die Knotenlagen (positivem $r''$) nur eine positive Wurzel $h$ existirt. Unter der Bauchstärke $B$ ist dann das grösste der beiden von $A$ im Laufe der Zeit erreichten Maxima zu verstehen. Es ergeben sich so für wenig absorbirendes Wasser ($\varkappa < 0{,}1$) der in der Figur 2 der Tafel gezeichnete[1]) Verlauf der Knoten- und Bauchstärken bei $\lambda = 75$ cm,

---

1) Als Ordinaten sind die $K$ und $B$ aufgetragen, als Abscissen die Lage der Brücke $B_2$. Die Werthe der elektrischen Kraft, die Zwischenlagen der Brücke $B_2$ zwischen einem Knoten und einem Bauch entsprechen, sind nicht berechnet, sondern nur graphisch interpolirt, damit die Veränderung der $K$ und $B$ besser zur Anschauung kommt.

d. h. $\lambda' = 8{,}3$ cm und $\gamma = 0{,}34$, bezw. $\gamma = 0{,}22$. — Da noch der 8. Knoten im Wasser einstellbar war (vgl. Arbeit II, pag. 319, Beobachtungsreihe 2)), so erkennt man direct aus den Curven, dass bei den Versuchen $\gamma$ jedenfalls kleiner als 0,34 und wahrscheinlich auch kleiner als 0,22 war.

Einfacher wird die Berechnung der $K$ und $B$, wenn die Absorption in der Flüssigkeit so bedeutend ist, d. h. wenn $r''$ (Formel (161)) so klein ist, dass der mit ihm multiplicirte Term in den Formeln (173) bis (176) nur als Correctionsglied zu behandeln ist. Diese einfachen Verhältnisse treten ein, wenn es sich um Berechnung der Anzahl der mit einem Wellenindicator bestimmter Empfindlichkeit nachweisbaren Knoten und Bäuche der Brücke $B_2$ handelt.

Für den letzten beobachtbaren Knoten bezw. Bauch ist offenbar der mit $r''$ multiplicirte Term sehr klein, und zwar um so mehr, je empfindlicher der Wellenindicator ist. — In diesen Fällen ist dasjenige $h$, welches dem Maximum der Amplituden $A$ entspricht, dasselbe[1]), wie es ohne Vorhandensein einer Brücke $B_2$, d. h. für $r'' = 0$, sein würde.

Im Zeitintervall I ist daher für dieses $h$ nach (173), (175):

$$a \lg f \cdot f^{h+1} + a' \lg g \cdot g^{-(h+1)} = 0\,,$$

(177) d. h.

$$(fg)^{h+1} = -\frac{a' \lg g}{a \lg f}\,,$$

im Zeitintervall II nach (174), (176):

$$\lg f \cdot f^{h+1} + \lg g \cdot g^{-(h+1)} = 0\,,$$

(178) d. h.

$$(fg)^{h+1} = -\frac{\lg g}{\lg f}\,.$$

Setzt man die den Gleichungen (177), (178) entsprechenden Werthe der $h$ in die Formeln (173) bis (176) ein, so ergeben sich die Knoten- und Bauchstärken für kleines $r''$. Setzt man zur Abkürzung:

1) Dies tritt genügend genau ein, wenn das von $r''$ abhängende Glied nicht mehr als etwa 5 bis 6 % beträgt. Ich habe mich davon durch numerische Rechnung überzeugt.

$$(179)\qquad -\frac{a'\lg g}{a\lg f} = a''_1\,,\quad -\frac{\lg g}{\lg f} = a''_2\,,$$

so ist nach (177)

$$(180)\qquad \text{im Zeitintervall I:}\ h_1 + 1 = \frac{\lg a''_1}{\lg(fg)}\,,$$

$$(181)\qquad \text{im Zeitintervall II:}\ h_2 + 1 = \frac{\lg a''_2}{\lg(fg)}\,.$$

Setzt man nun schliesslich

$$(182)\qquad g^{-1} = f : c\,,$$

wobei nach (172)

$$(183)\qquad c = \mathfrak{r}\varrho\cdot e^{(\gamma-\tau)(1-\varDelta)} = fg\,,$$

so wird nach (173) und (177) die

Knotenstärke im $k^{\text{ten}}$ Knoten:

$$(184)\quad K_k^{\mathrm{I}} = \frac{gf^{h_1+1}}{fg-1}\left\{a - \frac{a'}{a''_1} + \frac{r''a}{c^k}\left[h_1 - k - \frac{1-\frac{c^{k+1}}{a''_1}}{c-1}\right]\right\},$$

$$(185)\quad K_k^{\mathrm{II}} = \frac{gf^{h_2+1}}{fg-1}e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\varDelta)}\left\{a' - \frac{a'}{a''_2} + \frac{r''}{c^k}\left[(h_2-k+1)a' - ac\frac{1-\frac{c^k}{a''_2}}{c-1}\right]\right\},$$

die Bauchstärke im $k^{\text{ten}}$ Bauch:

$$(186)\quad B_k^{\mathrm{I}} = \frac{gf^{h_1+1}}{fg-1}\left\{a - \frac{a'}{a''_1} + \frac{r''}{c^k}\left[(h_1-k+1)a' - ac\frac{1-\frac{c^k}{a''_1}}{c-1}\right]\right\},$$

$$(187)\quad B_k^{\mathrm{II}} = \frac{gf^{h_2+1}}{fg-1}e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\varDelta)}\left\{a' - \frac{a'}{a''_1} + r''\frac{a}{c^{k-1}}\left[h_2 - k + 1 - \frac{1-\frac{c^k}{a''_2}}{c-1}\right]\right\}.$$

Dabei ist nach (161), (162) und (163)

für den $k^{\text{ten}}$ Knoten:

$$(188)\qquad r'' = 4\varrho'\mathfrak{r}'\cdot e^{(\gamma-\tau-2\pi\varkappa)(k+\varDelta')}\,,$$

für den $k^{\text{ten}}$ Bauch:

$$(189)\qquad r'' = -4\varrho'\mathfrak{r}'\cdot e^{(\gamma-\tau-2\pi\varkappa)(k+\varDelta'-\frac{1}{2})}\,.$$

Ob in dem Zeitintervall I oder in dem Zeitintervall II die absolut grössten Werthe des $A$ erreicht werden, d. h. ob $K_k^{\mathrm{I}} \gtreqless K_k^{\mathrm{II}}$ ist, berechnet man am besten numerisch in wirklich vorliegenden Fällen. Wie aber schon die beiden oben pag. 127 und pag. 129 berechneten Beispiele lehren, unterscheidet sich in der Nähe des Maximums $K^{\mathrm{I}}$ wenig von $K^{\mathrm{II}}$.

Die Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten und Bäuche ergiebt sich an der Hand der Formeln (184) bis (187) daraus, dass sein muss:

$$\frac{K_{\bar{k}}}{B_{\bar{k}}} = 1 + \nu,$$

wobei $\nu$ das oben pag. 83 definirte Maass der Empfindlichkeit des Wellenindicators ist. Wir wollen die Aufgabe zunächst umgekehrt behandeln, nämlich aus beobachtetem $\bar{k}$ des Empfindlichkeitsmaass $\nu$ berechnen, um zu sehen, ob dasselbe annähernd mit der Annahme über $\nu$ übereinstimmt, die oben pag. 99 zur Schätzung von $\gamma$ gemacht ist.

Bei wässrigen Lösungen habe ich für $\lambda = 75$ cm früher[1]) die Anzahl $\bar{k}$ beobachtbarer Knoten angegeben. Es wurde immer derselbe Wellenindicator benutzt, nämlich eine auf Resonanz abgestimmte Zehnder'sche Röhre. Die dortigen Angaben sind hier durch einige Beobachtungen noch ergänzt. Die Länge der Brücke $B_2$ betrug 1,8 cm.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Für | $K = 25 \cdot 10^{-8}$ | war einstellbar der | 3te Knoten, | nicht der | 4te Knoten, |
| - | $K = 60 \cdot 10^{-8}$ | - - - | 2te - | - - | 3te Bauch, |
| - | $K = 83 \cdot 10^{-8}$ | - - - | 2te Bauch, | - - | 3te Knoten, |
| - | $K = 100 \cdot 10^{-8}$ | - - - | 1te Knoten, | - - | 2te Bauch, |
| - | $K = 170 \cdot 10^{-8}$ | - kaum - - | 1te - | - - | 2te - |
| - | $K = 210 \cdot 10^{-8}$ | war einstellbar - | 1te Bauch, | - - | 1te Knoten, |
| - | $K = 380 \cdot 10^{-8}$ | - kaum - - | 1te - . | | |

Es ergeben sich nun bei $\lambda = 75$ cm und $\gamma = 0{,}15$ folgende Werthe der in den Formeln auftretenden Grössen, falls als Dielectricitätsconstante $\varepsilon = 81$ bei allen Leitfähigkeiten[2]) festgehalten wird:

$$g = 1{,}16; \quad \varrho = 0{,}988; \quad e^{\gamma\varphi} = 1{,}003; \quad a = 1{,}94.$$

1) Vgl. »Arbeit I«, p. 17.

2) Ausser den soeben angeführten Leitfähigkeiten sind in der Tabelle noch mehr der Rechnung zu Grunde gelegt, weil diese weiter unten zur Berechnung der Absorptionsindices von Flüssigkeiten mit anomaler Absorption benutzt werden sollen.

| $K \cdot 10^8$ | 25 | 60 | 75 | 80 | 83 | 100 | 170 | 180 | 210 | 380 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varkappa$ | 0,074 | 0,172 | 0,212 | 0,224 | 0,233 | 0,274 | 0,417 | 0,435 | 0,480 | 0,647 |
| $\mathfrak{r}$ | 0,800 | 0,808 | 0,810 | 0,813 | 0,814 | 0,820 | 0,840 | 0,841 | 0,855 | 0,888 |
| $\mathfrak{r}'$ | 0,112 | 0,109 | 0,107 | 0,106 | 0,106 | 0,104 | 0,094 | 0,093 | 0,086 | 0,071 |
| $\varrho'$ | 0,670 | 0,684 | 0,687 | 0,687 | 0,689 | 0,690 | 0,688 | 0,688 | 0,673 | 0,628 |
| $\Delta$ | 0,002 | 0,003 | 0,007 | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,012 | 0,012 | 0,012 | 0,012 |
| $\Delta'$ | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,03 | 0,03 | 0,04 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,09 |
| $f$ | 0,792 | 0,800 | 0,802 | 0,805 | 0,806 | 0,812 | 0,831 | 0,832 | 0,846 | 0,879 |
| $c$ | 0,920 | 0,928 | 0,930 | 0,934 | 0,935 | 0,941 | 0,964 | 0,965 | 0,982 | 1,020 |
| $a'$ | 1,860 | 1,870 | 1,872 | 1,874 | 1,875 | 1,882 | 1,904 | 1,905 | 1,920 | 1,955 |
| $a''_1$ | 0,616 | 0,645 | 0,653 | 0,666 | 0,670 | 0,700 | 0,796 | 0,800 | 0,880 | 1,170 |
| $a''_2$ | 0,643 | 0,670 | 0,677 | 0,690 | 0,694 | 0,721 | 0,813 | 0,816 | 0,890 | 1,160 |
| $h_1 + 1$ | 5,80 | 5,85 | 5,87 | 5,95 | 5,95 | 5,87 | 6,22 | 6,26 | 6,95 | 7,65 |
| $h_2 + 1$ | 5,30 | 5,35 | 5,40 | 5,42 | 5,41 | 5,39 | 5,66 | 5,70 | 6,41 | 7,49 |
| $-a + \frac{a'}{a''_1}$ | 1,08 | 0,96 | 0,93 | 0,88 | 0,86 | 0,75 | 0,45 | 0,44 | 0,24 | −0,27[1] |
| $-a' + \frac{a'}{a''_2}$ | 1,03 | 0,92 | 0,90 | 0,85 | 0,83 | 0,73 | 0,44 | 0,43 | 0,24 | −0,27 |
| $4\varrho'\mathfrak{r}'$ | 0,300 | 0,298 | 0,294 | 0,292 | 0,292 | 0,287 | 0,259 | 0,256 | 0,232 | 0,179 |

Nach den Formeln (184) bis (189) folgt nun an der Hand obiger Tabelle:

für $K = 25 \cdot 10^{-8}$:

beim $3^{\text{ten}}$ Knoten: $r'' = +0,116$; $K_3^{\text{I}} = 3,23(1 + 0,054)$; $K_3^{\text{II}} = 3,19(1 + 0,060)$,
beim $4^{\text{ten}}$ Knoten: $r'' = +0,084$; $K_4^{\text{I}} = 3,23(1 + 0,006)$; $K_4^{\text{II}} = 3,19(1 + 0,029)$;

---

1) Diese Umkehr des Vorzeichens hängt damit zusammen, dass für die Leitfähigkeit $K = 380 \cdot 10^{-8}$ $c = fg > 1$ ist, während es sonst $< 1$ ist. Für ein zwischen 210 und $380 \cdot 10^{-8}$ liegendes $K$ muss $c = fg = 1$ sein. Dann werden die Formeln (184) bis (187) unbrauchbar. Man kann sie in diesem speciellen Falle leicht durch andere, einfacher gebaute, ersetzen, die daraus folgen, dass für $fg = 1$ ist: $M_h = h$, $N_h = \frac{h(h+1)}{1 \cdot 2}$. — Die numerischen Werthe der in den Formeln (184) bis (187) auftretenden Grössen müssen um so genauer berechnet werden, je näher die Leitfähigkeit $K$ an die kritische herankommt, für welche $fg = 1$ ist, weil die Formeln (184) bis (187) die Grösse $fg - 1$ im Nenner enthalten. Aus diesem Grunde sind die Resultate, welche für $K = 210 \cdot 10^{-8}$ und $K = 380 \cdot 10^{-8}$ erhalten sind, etwas weniger genau, als die bei den anderen Leitfähigkeiten erhaltenen.

für $K = 60 \cdot 10^{-8}$:

beim 2ten Knoten: $r'' = +0{,}0455$; $K_2^{\rm I} = 4{,}20(1 + 0{,}046)$; $K_2^{\rm II} = 4{,}20(1 + 0{,}040)$,
beim 3ten Bauch: $r'' = -0{,}0273$; $B_3^{\rm I} = 4{,}20(1 - 0{,}020)$; $B_3^{\rm II} = 4{,}20(1 - 0{,}020)$;

für $K = 75 \cdot 10^{-8}$:

beim 2ten Knoten: $r'' = +0{,}0267$; $K_2^{\rm I} = 4{,}22(1 + 0{,}028)$; $K_2^{\rm II} = 4{,}24(1 + 0{,}035)$;

für $K = 80 \cdot 10^{-8}$.

beim 2ten Bauch: $r'' = -0{,}0425$; $B_2^{\rm I} = 4{,}25(1 - 0{,}059)$; $B_2^{\rm II} = 4{,}30(1 - 0{,}056)$,
beim 2ten Knoten: $r'' = +0{,}0226$; $K_2^{\rm I} = 4{,}25(1 + 0{,}022)$; $K_2^{\rm II} = 4{,}30(1 + 0{,}022)$;

für $K = 83 \cdot 10^{-8}$:

beim 2ten Bauch: $r'' = -0{,}0312$; $B_2^{\rm I} = 4{,}25(1 - 0{,}047)$; $B_2^{\rm II} = 4{,}30(1 - 0{,}047)$,
beim 2ten Knoten: $r'' = +0{,}0150$; $K_2^{\rm I} = 4{,}25(1 + 0{,}017)$; $K_2^{\rm II} = 4{,}30(1 + 0{,}019)$;

für $K = 100 \cdot 10^{-8}$:

beim 1ten Knoten: $r'' = +0{,}0558$; $K_1^{\rm I} = 4{,}36(1 + 0{,}104)$; $K_1^{\rm II} = 4{,}39(1 + 0{,}097)$,
beim 2ten Bauch: $r'' = -0{,}0254$; $B_2^{\rm I} = 4{,}36(1 - 0{,}039)$; $B_2^{\rm II} = 4{,}39(1 - 0{,}039)$;

für $K = 170 \cdot 10^{-8}$:

beim 1ten Knoten: $r'' = +0{,}0190$; $K_1^{\rm I} = 4{,}60(1 + 0{,}031)$; $K_1^{\rm II} = 4{,}65(1 + 0{,}029)$,
beim 2ten Bauch: $r'' = -0{,}0055$; $B_2^{\rm I} = 4{,}60(1 - 0{,}007)$; $B_2^{\rm II} = 4{,}65(1 - 0{,}007)$;

für $K = 180 \cdot 10^{-8}$:

beim 1ten Knoten: $r'' = +0{,}0164$; $K_1^{\rm I} = 4{,}60(1 + 0{,}031)$; $K_1^{\rm II} = 4{,}65(1 + 0{,}027)$;

für $K = 210 \cdot 10^{-8}$

beim 1ten Bauch: $r'' = -0{,}0452$; $B_1^{\rm I} = 4{,}82(1 - 0{,}100)$; $B_1^{\rm II} = 4{,}71(1 - 0{,}051)$,
beim 1ten Knoten: $r'' = +0{,}0108$; $K_1^{\rm I} = 4{,}82(1 + 0{,}034)$; $K_1^{\rm II} = 4{,}71(1 + 0{,}008)$;

für $K = 380 \cdot 10^{-8}$:

beim 1ten Bauch: $r'' = -0{,}0179$; $B_1^{\rm I} = 5{,}84(1 - 0{,}021)$; $B_1^{\rm II} = 5{,}58(1 - 0{,}058)$.

Die Zahlen für die $K$ und $B$ sind in der Weise geschrieben, dass immer das zu 1 additiv oder subtractiv hinzutretende Glied den Einfluss des Verhandenseins der Brücke $B_2$ angiebt.

Ein Vergleich dieser Zahlen mit der oben pag. 148 angegebenen Tabelle, welche die mit Hülfe der Zehnder'schen Röhre einstellbaren Knoten angiebt, lehrt, dass ein Knoten, bezw. Bauch der Brücke, noch einstellbar ist, falls sein Einfluss mindestens 3 % des ohne $B_2$ eintretenden Werthes der elektrischen Kraft beträgt; eine Ausnahme

findet nur beim 2. Bauch für $K = 100 . 10^{-8}$ statt. Sein Einfluss beträgt etwa 4 %, er müsste also einstellbar sein, während die Beobachtungen ihn als nicht einstellbar bezeichneten. — Die Zahlen, welche für $K = 210 . 10^{-8}$ und $K = 380 . 10^{-8}$ angegeben sind, sind übrigens aus dem oben pag. 149 Anm. 1 angeführten Grunde mit grösseren Rechnungsfehlern behaftet.

Das so erhaltene Resultat für die Empfindlichkeit der Zehnder'schen Röhre als Wellenindicator steht mit der oben pag. 83, 99 zur Schätzung von $\gamma$ gemachten Annahme in gutem Einklang. Dort wurde angenommen, dass die Stärke des letzten, gerade noch bemerkbaren Knotens mehr als $\frac{1}{2}$ %, aber weniger als 5 % von der Stärke des benachbarten Bauches verschieden sein müsse. — Hier, bei der Einstellbarkeit der Knoten, bezw. Bäuche, handelt es sich nicht um den gegenseitigen Unterschied ihrer Stärken, sondern um den Unterschied ihrer Stärken gegenüber der Stärke beim Fehlen der Brücke $B_2$, denn die Einstellbarkeit eines Knotens erfordert offenbar mehr, als nur die Constatirung eines Unterschiedes vom Knoten mit dem benachbarten Bauch. Ersterer Unterschied liegt nun ebenfalls zwischen $\frac{1}{2}$ % und 5 %. — Man kann also auf diesem Wege mit ziemlicher Genauigkeit die Empfindlichkeit des Wellenindicators feststellen; mit Benutzung des so erhaltenen Resultates kann man dann rückwärts auf dem oben pag. 98 angegebenen Wege die zeitliche Dämpfung $\gamma$ genauer berechnen, als dort geschehen ist. — Indess hat dies bei der geringen Grösse von $\gamma$ hier nicht viel Interesse, da es wenig ausmachen würde, wenn wir etwa statt mit dem Werthe $\gamma = 0,15$ mit dem Werthe $\gamma = 0,13$ rechnen würden.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass für die verschiedenste Leitfähigkeit der wässrigen Lösungen ungefähr gleiche Empfindlichkeit des Wellenindicators berechnet worden ist. Dies spricht dafür, dass für die Absorption selbst der angewandten sehr schnellen elektrischen Schwingungen nur die bei sehr langsamen Wechselströmen gemessene Leitfähigkeit der Lösung massgebend ist, und dass der theoretisch berechnete Absorptionscoefficient als den Thatsachen entsprechend anzusehen ist.

### 6) Vorhandensein dreier Brücken.

Wenn man die Wellenlänge durch Verschieben einer zweiten Brücke $B_2$ bestimmt, während eine erste Brücke $B_1$ fest liegen bleibt, so ist es nicht immer gleichgültig für die Bestimmung der Lagen von $B_2$, in denen die elektrische Kraft zwischen $B_1$ und $B_2$ ein Maximum oder Minimum zeigt, ob hinter $B_2$ noch eine dritte Brücke aufgelegt ist oder nicht. Die Eigenschaften des Drahtsystems hinter $B_2$ kommen nämlich nur dann überhaupt nicht in Betracht für die elektrische Kraft vor $B_2$, wenn der Uebergangsfactor der Wellen über $B_2$ gleich Null angenommen werden kann. Je grösser derselbe wird, um so mehr kann sich eine Störung der Erscheinungen vor $B_2$ dadurch geltend machen, dass sich eine dritte Brücke $B_3$ hinter $B_2$ befindet, oder dass eine Flüssigkeitsgrenze dicht hinter $B_2$ liegt. Da wir nun oben pag. 73 und pag. 116 gesehen haben, dass bei kurzen Brückenlängen der Uebergangsfactor sehr klein ist, wenn die Brücken in Luft aufliegen, dagegen sehr beträchtlich, wenn sie im Wasser aufliegen, so ist es erklärlich, dass, wie ich in Arbeit I. pag. 33 und Arbeit II. pag. 317 angegeben habe, keine Störung durch eine dritte Brücke $B_3$ bei Bestimmung der Wellenlänge $\lambda$ in Luft wahrzunehmen ist, wohl aber bei Bestimmung der Wellenlänge $\lambda'$ in Wasser, falls $B_3$ genügend nahe an $B_2$ liegt. Berechnet sollen diese Störungen nicht werden, ich möchte hier nur darauf hinweisen, dass auch die Theorie die Möglichkeit dieser sonst nicht beachteten Fehlerquelle ergiebt; wie man sie praktisch behandeln kann, habe ich in der Arbeit II. pag. 327 erwähnt.

## B. Der die Drähte umgebende Körper zeigt Dispersion und anomale Absorption.

In diesem Falle ist die in dem Körper fortgepflanzte Welle der elektrischen Kraft in derselben Weise zu schreiben, wie sie oben pag. 108 in der Formel (103) für sich normal verhaltende Körper aufgestellt worden ist, nämlich:

$$\mathfrak{e} = A_1 e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda'} - 2\pi \varkappa \frac{z}{\lambda'}} + A_2 e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda'} + 2\pi \varkappa \frac{z}{\lambda'}},$$

wobei $\alpha = -\gamma + i2\pi$, $\alpha' = \alpha + \tau$ und $\lambda'$ die Bedeutung der Wellenlänge im Körper, $\varkappa$ die seines Absorptionsindex besitzt. Es

besteht jetzt nur der Unterschied gegen früher, dass $\lambda'$ und $\varkappa$ nicht aus dem Verhalten des Körpers bei sehr langsamen Wechselzahlen, d. h. aus seiner Dielektricitätsconstante und seiner gewöhnlich gemessenen Leitfähigkeit theoretisch berechnet werden können, sondern dass $\lambda'$ und $\varkappa$ zwei für eine bestimmte Schwingungsdauer $T$ dem Körper individuelle Constanten sind, die nur dem Experiment entnommen werden können. Es handelt sich nun vor allen Dingen um die Frage, wie letzteres zu geschehen habe, d. h. wie man den elektrischen Brechungsexponenten $\lambda : \lambda'$ und den Absorptionsindex $\varkappa$ einer anomal sich verhaltenden Flüssigkeit experimentell bestimmen kann.

Die Bestimmung des Brechungsexponenten geschieht einfach durch Beobachtung der Knoten- und Bauchlagen einer Brücke $B_2$ in der Flüssigkeit; zur Bestimmung des Absorptionscoefficienten liegt es nahe, die zu untersuchende Flüssigkeit mit einer anderen von bekanntem Absorptionsindex zu vergleichen. So habe ich[1]) mit der, auch vorhin der Rechnung zu Grunde gelegten Anordnung, dass die Flüssigkeitsgrenze in der ersten Knotenentfernung .von einer festen Brücke $B_1$ lag, während in der Flüssigkeit eine Brücke $B_2$ verschoben wurde, für eine Reihe von Flüssigkeiten mit anomaler Absorption festgestellt, mit welcher wässrigen Lösung eines Elektrolyten sie sich insofern gleich verhielten, dass für beide dieselbe Anzahl Knoten, bezw. Bäuche mit der Brücke $B_2$ beobachtbar ist. Es mögen zwei sich in dieser Weise gleich verhaltende Flüssigkeiten »scheinbar isoabsorbirend« genannt werden. Man ist nur dann berechtigt, für beide Körper, wässrige Lösung und anomale Flüssigkeit, gleichen Absorptionsindex anzunehmen, wenn ihre Brechungsexponenten nahezu einander gleich sind. Sind sie stark von einander verschieden, so sind auch die Reflexions- und Uebergangsfactoren der elektrischen Wellen für beide Flüssigkeiten sehr verschieden. Bei grossem Brechungsexponenten ist wegen der starken Reflexion an der Flüssigkeitsgrenze und der verhältnissmässig schwachen an der Brücke $B_2$ (cf. oben pag. 116) eine Knotenlage der Brücke $B_2$ selbst ohne Absorption der Flüssigkeit weniger deutlich bemerkbar, als bei kleinem Brechungsexponenten.

---

1) Vgl. »Arbeit I«.

Wenn daher, wie es meist der Fall ist, eine Flüssigkeit einen kleineren elektrischen Brechungsexponenten besitzt als eine gewisse wässrige Lösung eines Elektrolyten, für welche die Anzahl beobachtbarer Knoten der Brücke $B_2$ und die Deutlichkeit des letzten dieser beobachtbaren Knoten dieselbe ist, wie für die erste Flüssigkeit, so muss trotzdem die Flüssigkeit einen etwas grösseren Absorptionsindex besitzen, als die scheinbar isoabsorbirende wässrige Lösung.

Die exacte Vergleichung der Absorptionscoefficienten beider Flüssigkeiten muss sich an der Hand der im Vorstehenden gegebenen Formeln für die Knoten- und Bauchstärken der Brücke $B_2$ ausführen lassen, falls ähnliche Formeln auch für einen, anomal sich verhaltenden Körper aufgestellt werden. Die Absorptionsindices ergeben sich dann durch eine Berechnung, die allerdings zu umgehen gewesen wäre, wenn man eine directere Methode zur Bestimmung des Absorptionsindex der Flüssigkeit eingeschlagen hätte. Ich glaube aber kaum, dass für kurze elektrische Wellen sich eine bequemere und ebenso scharfe Beobachtungsmethode darbieten wird, als die hier genannte, da die Grösse der elektrischen Kraft sich sehr gut durch ihre Wirkung auf eine Zehnder'sche oder andere Vacuumröhre äussert, jedoch nur dann, wenn man sie an einer von Luft umgebenen Stelle der Drähte kennen lernen will. Eine im Wasser z. B. über die Drähte gelegte Vacuumröhre spricht erstens viel schlechter an, als eine in Luft übergelegte, und zweitens würde ihr Vorhandensein die Grösse und Phase der elektrischen Wellen sehr stark beeinflussen, während dies bei Luftumgebung nicht der Fall ist. — Da die Hauptsache eine brauchbare und bequeme Beobachtungsmethode ist, so bietet es für ihre Anwendung wohl kein ernstliches Hinderniss, dass die exacte Berechnung der Resultate nicht die allereinfachste ist.

Wir können nun unsere bisherigen Resultate über die Knoten- und Bauchstärken einer Brücke $B_2$, falls sie in einer normal sich verhaltenden Flüssigkeit liegt, direct auf unseren Fall hier übertragen, bei dem es sich um Flüssigkeiten handelt mit Dispersion (d. h. $n$ abhängig von $T$) und anomaler Absorption (d. h. $\varkappa$ grösser, als der Leitfähigkeit $\sigma$ entsprechend), weil die Reflexions- und Uebergangsfactoren der Wellen sowohl an der Flüssigkeitsgrenze, als an der

Brücke $B_2$, schliesslich sämmtlich in der Form geschrieben sind, dass sie nicht mehr die Constanten $\varepsilon$ und $\sigma$, sondern nur $n$ und $\varkappa$ enthalten. Alle Formeln, die nicht mehr $\varepsilon$ und $\sigma$ enthalten, gelten in unserem Falle genau ebenso, mit derselben Bedeutung der Buchstaben.

Diese Behauptung bedarf der Beweises. Wir wollen die Betrachtung an die MAXWELL'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte anknüpfen. Die $z$-Axe sei den Drähten parallel gelegt, die $x$-Axe in die die Drähte verbindende Ebene, die $y$-Axe senkrecht zu ihr. Die Componenten der elektrischen Kraft in der Umgebung der Drähte mögen genannt sein $X$, $Y$, $Z$, die der magnetischen Kraft $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Von dem galvanischen Widerstand der Drähte wollen wir absehen. Sein Einfluss würde sich genau so äussern, wie bei den bisherigen Betrachtungen, er ist hier aber thatsächlich ganz zu vernachlässigen, denn die Kleinheit der oben mit $\tau$ bezeichneten Grösse ($\tau = 0{,}00285$) bedingt in den Formeln keinen Unterschied, wenn man die Flüssigkeitsgrenze und die Brücke $B_2$ nur wenig Wellenlängen von $B_1$ entfernt annimmt. — Wenn vom galvanischen Widerstand der Drähte abgesehen wird, ist $Z = \mathfrak{N} = 0$ zu setzen[1].

Die MAXWELL'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte lauten dann:

$$(190)\qquad 4\pi u = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}, \quad 4\pi v = +\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}, \quad 0 = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y},$$

$$(191)\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial z}, \quad 0 = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

$u$, $v$ bedeuten die $x$-, bezw. $y$-Componenten der Stromdichte, gemessen nach elektromagnetischem Maasse. Die $z$-Componente $w$ verschwindet, weil $Z = 0$ ist.

Die Gleichungen (190), (191) sind allgemein gültig, für jeden Körper. Nur der Zusammenhang der Stromcomponenten mit den Componenten der elektrischen Kraft ist je nach Art des Körpers verschieden. Für einen Isolator der Dielektricitätsconstanten $\varepsilon$ ist

$$(192)\qquad 4\pi u = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t}.$$

---

1) Vgl. »Physik des Äthers« vom Verf. p. 449, 409.

Besitzt der Körper auch ein Leitvermögen $\sigma$, so ist

$$(193)\qquad 4\pi u = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\sigma c X.$$

Besitzt der Körper schliesslich Moleküle mit Eigenschwingungen, so ist

$$(194)\qquad u = u_0 + \Sigma u_h,$$

wobei $u_0$ der Gleichung (193) gehorcht, nämlich:

$$4\pi u_0 = \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\sigma c X,$$

während für jedes $u_h$ eine Differentialgleichung der Form:

$$(195)\qquad u_h + a_h\frac{\partial u_h}{\partial t} + b_h\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon_h}{4\pi c}\frac{\partial X}{\partial t}$$

besteht[1]).

Handelt es sich um eine gedämpfte harmonische Schwingung hinsichtlich $t$, so ist

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} = \frac{\alpha}{T}u_h,\quad \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = \left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 u_h,$$

wobei $\alpha = \gamma + i2\pi$ ist, $\gamma$ die zeitliche Dämpfung, $T$ die Periode der Schwingung bedeutet. Daher wird (195) zu:

$$u_h\left(1 + a_h\frac{\alpha}{T} + b_h\left(\frac{\alpha}{T}\right)^2\right) = \frac{\varepsilon_h}{4\pi c}\frac{\partial X}{\partial t},$$

und (194) zu:

$$(196)\qquad u = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{4\pi\sigma c^2\frac{T}{\alpha} + \varepsilon_0 + \sum\frac{\varepsilon_h}{1 + a_h\frac{\alpha}{T} + b_h\left(\frac{\alpha}{T}\right)^2}\right\}.$$

Wir können diese Gleichung schreiben als

$$(197)\qquad 4\pi u = \frac{\varepsilon(T)}{c}\cdot\frac{\partial X}{\partial t},$$

worin $\varepsilon(T)$ eine Abkürzung für die in (196) auftretende Klammergrösse ist, die von $T$ abhängt.

Setzt man diesen Werth in (190) ein, so erhält man durch Combination mit der zweiten der Gleichungen (191) für $X$ (oder $\mathfrak{M}$) die Differentialgleichung:

---

1) Vergl. des Verf. »Physik des Äthers« pag. 522. Ein derartiger Ansatz ist allen Theorien der anomalen Dispersion gemeinsam.

$$(198) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon(T)} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}.$$

Integrirt man daher diese Gleichung durch

$$X = A_1 e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}} + A_2 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

so muss sein:

$$(199) \qquad \left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 = \frac{c^2}{\varepsilon(T)} \left(\frac{\alpha''}{\lambda'}\right)^2.$$

Es soll nun zunächst der Reflexions- und Uebergangsfactor an der Grenze Luft-Flüssigkeit berechnet werden. Die Grenzbedingungen sind: Stetigkeit der $X$, $Y$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$.

In Luft sei die einfallende Welle der $x$-Componente der elektrischen Kraft:

$$X_e = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}$$

Die reflectirte Welle sei:

$$X_r = r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Die über die Grenze gehende Welle sei

$$X_\delta = \delta \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}.$$

Wegen der zweiten der Gleichungen (191) sind die $y$-Componenten der magnetischen Kraft zu schreiben:

Einfallende Welle: $\mathfrak{M}_e = \frac{cT}{\lambda} \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}$,

Reflectirte Welle: $\mathfrak{M}_r = -r \cdot \frac{cT}{\lambda} \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}$,

Übergehende Welle: $\mathfrak{M}_\delta = \delta \cdot \frac{cT}{\lambda'} \frac{\alpha''}{\alpha} \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}$.

Nun ist $cT = \lambda$; daher, wenn die Grenze bei $z = \beta\lambda$ liegt, werden die Grenzbedingungen zu:

$$(200) \qquad \begin{aligned} X_e + X_r = X_\delta &: \; e^{-\alpha\beta} + r \cdot e^{+\alpha\beta} = \delta \cdot e^{-\alpha''\beta\frac{\lambda}{\lambda'}}, \\ \mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_\delta &: \; e^{-\alpha\beta} - r \cdot e^{+\alpha\beta} = \delta \frac{\alpha''}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda'} \, e^{-\alpha''\beta\frac{\lambda}{\lambda'}}. \end{aligned}$$

Dies sind dieselben Gleichungen, aus denen oben pag. 119, Gleichungen (126), der Reflexionsfactor $r$ und Uebergangsfactor (er ist

dort, wenn man ihn nicht auf die Ladung $\mathfrak{e}$, sondern die elektrische Kraft bezieht, $\delta : \varepsilon$ genannt) bestimmt sind.

Es bleibt also nur noch übrig zu zeigen, dass auch für die Reflexion an einer Brücke $B_2$ in der Flüssigkeit vollständig unsere frühere Formel (118) (pag. 114) hier gültig bleibt.

Wendet man die erste oder die zweite der Gleichungen (191) auf die unmittelbar am Drahte anliegende Umgebung an, so kann man diese Gleichungen für die Oberfläche des Drahtes selbst in der Weise interpretiren, dass die elektromotorische Kraft der Selbstinduction gerade compensirt wird durch die nach der $z$-Axe wirkende elektromotorische Kraft, welche in der Drahtoberfläche durch die austretenden elektrischen Kraftlinien erzeugt wird.

Wenden wir diesen Ansatz auch auf eine Brücke $B_2$ an, so müssen wir schreiben:

$$\frac{l}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}''}{\partial t} = 2X, \tag{201}$$

wobei $l$ die Länge der Brücke $B_2$ bedeutet, $\mathfrak{M}''$ die von dem Brückenstrom $i''$ in der Umgebung von $B_2$ hervorgebrachte Anzahl magnetischer Kraftlinien pro Längeneinheit der Brücke $B_2$, $X$ den Werth der elektrischen Kraft an dem einen Ende der Brücke, d. h. auf dem einen der Paralleldrähte. Da die elektrische Kraft auf dem anderen Paralleldrahte im gegenüberliegenden Punkte gleich gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen ist, so ist $2X$ die totale Abnahme der elektrischen Kraft bei Durchschreitung der ganzen Brückenlänge $l$. Diese elektrische Kraft $X$ muss sich an den Paralleldrähten stetig über die Brücke $B_2$ hinüber fortsetzen. Bezeichnen wir daher die elektrische Kraft vor $B_2$ mit $X$, hinter $B_2$ mit $X'$, so muss sein:

$$X = X' \text{ für } z = \beta'\lambda' \text{ (an der Brücke)} . \tag{202}$$

Diese Gleichung entspricht durchaus der früher abgeleiteten Brückenbedingung (15).

Dagegen setzt sich die magnetische Kraft $\mathfrak{M}$ nicht stetig über die Brücke hinüber fort, denn $\mathfrak{M}$ ist proportional mit dem im Drahte fliessenden Strome, und dieser erleidet durch den Brückenstrom $i''$ eine Einbusse. Es wäre offenbar $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$, falls die Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke dieselbe wäre, wie die der Drähte. Ist aber erstere $\zeta'$ mal grösser, so ist

$$(203)\qquad \mathfrak{M}'' = \zeta'(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}') \text{ bei } z = \beta'\lambda'.$$

Diese Gleichung ersetzt die oben pag. 112 als Gleichung (14) ausgesprochene Brückenbedingung, während (201) die frühere Gleichung (13′) ersetzt, und die zweite der Gleichungen (119), nämlich:

$$(204)\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial z}$$

ersetzt die frühere Gleichung (5″) der pag. 107.

Die Formeln (201) bis (204) müssen die Reflexion an der Brücke vollkommen zu berechnen erlauben. Wir setzen:

$$X = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}} + r \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

$$X' = \delta \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{cT}{\lambda'}\frac{\alpha''}{\alpha}\left(e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}} - r \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{\lambda'}}\right),$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{cT}{\lambda'}\frac{\alpha''}{\alpha}\,\delta \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

so wird (202) zu:

$$e^{-\alpha''\beta'} + r \cdot e^{+\alpha''\beta'} = \delta \cdot e^{-\alpha''\beta'};$$

(203) liefert:

$$\mathfrak{M}'' = \zeta'\frac{cT}{\lambda'}\frac{\alpha''}{\alpha}\left(e^{-\alpha''\beta'} - r \cdot e^{+\alpha''\beta'} - \delta \cdot e^{-\alpha''\beta'}\right) \cdot e^{\alpha\frac{t}{T}},$$

d. h. mit Benutzung der vorigen Gleichung:

$$\mathfrak{M}'' = -\zeta'\frac{cT}{\lambda'}\frac{\alpha''}{\alpha} \cdot 2r \cdot e^{\alpha''\beta'} \cdot e^{\alpha\frac{t}{T}}.$$

Daher ist nach (201):

$$-\frac{l}{\lambda'}\zeta'\alpha'' r \cdot e^{\alpha''\beta'} = e^{-\alpha''\beta'} + r \cdot e^{+\alpha''\beta'},$$

oder

$$(205)\qquad r = -\frac{e^{-2\alpha''\beta'}}{1 + \alpha''\zeta'\frac{l}{\lambda'}}.$$

Dies ist aber dieselbe Gleichung für den Reflexionsfactor an der Brücke $B_2$, wie sie oben pag. 114 in der Formel (118) abgeleitet worden ist. Die obige Behauptung erscheint daher gerechtfertigt, dass man die Formeln des vorigen Abschnittes A. auch hier völlig benutzen darf.

Für den Fall ausserordentlich kleiner zeitlicher Dämpfung $\gamma$ lässt sich nun leicht ein Näherungswerth des Absorptionsindex einer Substanz angeben, wenn der der scheinbar isoabsorbirenden Substanz bekannt ist. Setzen wir nämlich $\gamma = 0$, so wäre die Grösse $g$ der Formeln (173) bis (176) gleich 1, während $f$ kleiner als 1 ist. Die Maxima der Amplituden würden daher nach unendlich langer Zeit erreicht werden, d. h. für $h = \infty$. Diese Maxima würden nach allen jenen vier Formeln daher den Werth annehmen:

$$(206) \qquad K, B = \frac{a'}{1-f}\left\{1 + r''\frac{a}{a'}\frac{f}{1-f}\right\}.$$

Da nun die Reflexion an der Brücke $B_1$, welche in Luft liegt, nahezu eine totale ist, so ist nach den Formeln (171) nahezu:

$$f = \mathfrak{r}, \quad a = 2, \quad a' = 1 + \mathfrak{r}.$$

Daher wird (206) zu:

$$(207) \qquad K, B = \frac{1+\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}}\left\{1 + r''\frac{2\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}^2}\right\}.$$

Nun ist nach (188), (189) für $\gamma = 0$, $\tau = 0$:

$$r'' = \pm\, 4\varrho'\mathfrak{r}' e^{-2\pi\varkappa\left(k + \Delta'(-\frac{1}{2})\right)},$$

wobei das + Zeichen für eine Knotenlage des $B_2$, das — Zeichen für eine Bauchlage gilt, und wobei $k$ die Ordnungszahl des Knotens oder Bauches bedeutet.

Ferner ist nach den Formeln (129) für $\mathfrak{r}^2$ und (160) für $\mathfrak{r}'^2$:

$$(208) \qquad \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{r}'}{1-\mathfrak{r}^2} = \frac{\sqrt{1+\varkappa^2}}{4}.$$

Daher wird (207) zu:

$$(209) \qquad K, B = \frac{1+\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}}\left\{1 \pm 2\varrho'\sqrt{1+\varkappa^2}\, e^{-2\pi\varkappa\left(k + \Delta'(-\frac{1}{2})\right)}.\right\}$$

Für scheinbar isoabsorbirende Substanzen muss das zu 1 additiv oder subtractiv hinzutretende Glied bei gleichem Betrage der Ordnungszahl $k$ denselben Werth haben. Wenn man nun den Reflexionsfactor $\varrho'$ an der Brücke $B_2$ für beide Substanzen als gleich annimmt, was näherungsweise wenigstens gestattet ist, so erkennt man, dass die Gleichheit jenes Zusatzgliedes eintritt, wenn $\varkappa$ für beide Substanzen denselben Werth hat, denn auf $\Delta'$ kommt es in Anbetracht seiner

Kleinheit ($\Delta' < 0{,}1$) nicht sehr an und ausserdem ist es auch im Wesentlichen nur von $\varkappa$ allein abhängig.

Bei sehr kleiner zeitlicher Dämpfung sind daher näherungsweise die Absorptionsindices scheinbar isoabsorbirender Substanzen einander gleich, auch wenn ihre Brechungsexponenten verschieden sind.

Da $\varrho'$ für die Substanz mit stärkerem Brechungsexponenten nach den früheren Entwickelungen kleiner ist, als für die Substanz mit kleinerem Brechungsexponenten, so ist der Näherungswerth des $\varkappa$ in der Weise zu corrigiren, dass der Absorptionsindex der letzteren Substanz etwas grösser ist, als der der ersteren, d. h. die Correction findet in dem schon oben pag. 154 genannten Sinne statt. Es ist aber bemerkenswerth, dass diese Correction nach der Formel (209) nur wegen des Auftretens des Factors $\varrho'$ nöthig ist, d. h. wegen der verschieden starken Brückenreflexion in beiden Substanzen; dass dagegen die verschieden starke Reflexion an der Grenze beider Substanzen, d. h. die Verschiedenheit des $\mathfrak{r}$, bei der zeitlichen Dämpfung $\gamma = 0$ völlig aus dem Resultat verschwindet. Dies ist ein Fingerzeig dafür, dass auch bei grösserer zeitlicher Dämpfung $\gamma$ man nicht ohne speciellere Berechnung wird sagen können, in welchem Sinne Verschiedenheit des Reflexionsvermögens $\mathfrak{r}$ bei beiden Substanzen wirkt.

Auch bei grösserer zeitlicher Dämpfung $\gamma$ wird man als ersten Näherungswerth Gleichheit der Absorptionsindices zweier scheinbar isoabsorbirender Substanzen benutzen können. Ist nun der Absorptionsindex der einen Substanz bekannt, z. B. als theoretischer Werth für eine wässrige Lösung, die sich normal verhält, und berechnet man mit Benutzung dieses Absorptionsindex und der beobachteten Brechungsexponenten für beide Flüssigkeiten die Stärke des letzten mit einer Brücke $B_2$ gerade noch einstellbaren oder gerade nicht mehr einstellbaren Knotens oder Bauches nach den Formeln (184) bis (189), wobei der Werth der zeitlichen Dämpfung $\gamma$ ungefähr bekannt sein muss, so erhält man einen zweiten Näherungswerth des unbekannten Absorptionsindex $\varkappa'$ der einen Flüssigkeit, wenn man über den Factor $e^{-2\pi\varkappa'}$ in der Weise verfügt, dass nun der procentische Einfluss des Vorhandenseins der Brücke auf die Grösse der elektrischen Kraft in beiden scheinbar isoabsorbirenden Flüssig-

keiten derselbe ist. — Dieses Verfahren kann man wiederholen, um einen dritten Näherungswerth für $\varkappa$ zu bilden; es ist dies aber meist nicht nöthig, da die in den Formeln (184) bis (189) auftretenden Grössen, abgesehen von dem in $r''$ vorkommenden Factor $e^{-2\pi\varkappa k}$, sehr wenig sich mit $\varkappa$ ändern.

Auf diesem Wege soll jetzt die Berechnung der Absorptionsindices einer Anzahl von Flüssigkeiten mit anomaler Absorption vorgenommen werden, für welche ich früher[1]) die scheinbar isoabsorbirenden wässrigen Lösungen von Kupfersulfat ermittelt habe. Die Temperatur ist $17^0$.

**Glycerin.**

1) $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = 75 : 3.10^{10}$ sec.

$n = 5{,}0$. Es ist gerade noch der 1. Knoten einstellbar. Scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 170.10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist daher der erste Näherungswerth des Absorptionsindex:

$$\varkappa = 0{,}42 .$$

Mit Benutzung dieses Werthes und $\gamma = 0{,}15$ wird nun

$$\mathfrak{r} = 0{,}71 ; \quad \mathfrak{r}' = 0{,}189 ;$$

$$f = 0{,}70 ; \quad g = 1{,}16 ; \quad fg = c = 0{,}823 ; \quad \varrho' = 0{,}845 .$$

$$a = 1{,}94 ; \quad a' = 1{,}76 ; \quad a''_1 = 0{,}379 ; \quad a''_2 = 0{,}417 .$$

$$h_1 + 1 = 4{,}98 ; \quad h_2 + 1 = 4{,}50 .$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3{,}14\left(1 + 0{,}805 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 3{,}08\left(1 + 0{,}793 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right).$$

Da nun nach der Tabelle der pag. 150 für die isoabsorbirende wässrige Lösung $(K = 170.10^{-8})$ der procentische Einfluss der Brücke $B_2$ in der ersten Knotenlage im Zeitintervall I 3,1 %, im Intervall II 2,9 % beträgt, d. h. im Mittel 3,0 %, während er hier im Mittel $80 . e^{-2\pi\varkappa'}$ % beträgt, so muss sein:

$$0{,}030 = 0{,}80 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} ,$$

woraus als zweiter Näherungswerth folgt

$$\varkappa' = 0{,}52 .$$

1) »Arbeit I«.

Berechnet man nun die Hilfsgrössen mit diesem $\varkappa'$, so erhält man:

$$\mathfrak{r} = 0{,}730\,; \quad \mathfrak{r}' = 0{,}180\,.$$

$$f = 0{,}72\,; \quad g = 1{,}16\,; \quad fg = c = 0{,}835\,; \quad \varrho' = 0{,}842\,.$$

$$a = 1{,}94\,; \quad a' = 1{,}78\,; \quad a_1'' = 0{,}413\,; \quad a_2'' = 0{,}451\,.$$

$$h_1 + 1 = 4{,}90\,; \quad h_2 + 1 = 4{,}42\,.$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3{,}31\left(1 + 0{,}684 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 3{,}31\left(1 + 0{,}682 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right);$$

aus $0{,}030 = 0{,}683\,.\,e^{-2\pi\varkappa'}$ folgt der dritte Näherungswerth

$$\varkappa' = 0{,}50\,.$$

Dieser unterscheidet sich in der That nur unbedeutend vom zweiten Näherungswerth. — Die Genauigkeit, mit der $\varkappa'$ auf diese Weise bestimmt ist, ist ziemlich erheblich. Denn die Beobachtung ergab, dass eine Lösung der Leitfähigkeit $K = 180\,.\,10^{-8}$ schon eine bemerkbar stärkere Absorption besass. Nach der Tabelle der pag. 150 ist aber für diese Lösung der Einfluss des ersten Knotens nur um sehr wenig kleiner, als bei der Lösung, deren $K = 170\,.\,10^{-8}$ beträgt. $\varkappa'$ würde daher nur um 1 % grösser ausfallen, wenn die Lösung $K = 180\,.\,10^{-8}$ als scheinbar isoabsorbirend angesehen wäre. Selbst in Anbetracht der Unsicherheit der theoretischen Grundlagen, welche besonders in Berechnung der Reflexionsschwächung $\varrho'$ an der Brücke $B_2$ liegt, erscheint, weil $e^{-2\pi\varkappa'}$ sich mit Aenderung des $\varkappa'$ sehr stark ändert, die Bestimmung des Absorptionsindex $\varkappa'$ auf etwa 2 % nach dieser Methode erreicht.

2) $\lambda = 211$ cm, d. h. $T = 211 : 3\,.\,10^{10}$ sec.

$n = 6{,}25$. Der erste Knoten ist noch gut einstellbar, der zweite Bauch wurde wegen der Kürze des Troges, welcher das Glycerin enthielt, nicht eingestellt. Scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 34\,.\,10^{-8}$.

Zunächst ist bei diesen grösseren Schwingungsdauern $T$[1]) (die Tabelle der pag. 149 bezieht sich nur auf $\lambda = 75$ cm) für die wässrige Lösung:

1) Da $T$ grösser ist, so ist auch $\tau$ nach Formel (70) etwas grösser, als bei den vorigen Versuchen, nämlich: $\tau = 0{,}005$. Die zeitliche Dämpfung ist bei diesem grösseren Erreger nicht direct bestimmt worden. Es ist ebenfalls der Werth $\gamma = 0{,}15$ der Rechnung zu Grunde gelegt. Der Einfluss von $\gamma$ auf das Resultat ist gering.

$$s = 0{,}282\,;\quad n = 9{,}66\,;\quad \varkappa = 0{,}262\,.$$
$$\mathfrak{r} = 0{,}823\,;\quad \mathfrak{r}' = 0{,}1015\,.$$
$$f = 0{,}817\,,\quad g = 1{,}16\,;\quad fg = c = 0{,}948\,;\quad \varrho' = 0{,}895\,.$$
$$a = 1{,}93\,;\quad a' = 1{,}89\,;\quad a''_1 = 0{,}717\,;\quad a''_2 = 0{,}735\,.$$
$$h_1 + 1 = 6{.}23\,;\quad h_2 + 1 = 5{,}76\,.$$
$$K_1^{\mathrm{I}} = 5{,}00\,(1 + 0{,}155)\,,$$
$$K_1^{\mathrm{II}} = 4{,}93\,(1 + 0{,}169)\,,$$
$$B_2^{\mathrm{I}} = 5{,}00\,(1 - 0{,}060)\,,$$
$$B_2^{\mathrm{II}} = 4{,}93\,(1 - 0{,}063)\,.$$

Führt man nun dieselbe Berechnung für Glycerin durch, wobei man als Näherungswerth von $\varkappa$ den Betrag 0,30 annimmt (er ist etwas grösser gewählt, als der der Lösung, weil dadurch im Allgemeinen der zweite Näherungswerth $\varkappa'$ näher am ersten liegen wird), so erhält man für Glycerin:

$$\mathfrak{r} = 0{,}745\,;\quad \mathfrak{r}' = 0{,}157\,.$$
$$f = 0{,}740\,;\quad g = 1{,}16\,;\quad fg = c = 0{,}859\,;\quad \varrho' = 0{,}950\,.$$
$$a = 1{,}93\,;\quad a' = 1{,}80\,;\quad a''_1 = 0{,}458\,;\quad a''_2 = 0{,}492\,.$$
$$h_1 + 1 = 5{,}14\,;\quad h_2 + 1 = 4{,}67\,.$$

Für die 1. Knotenlage der Brücke $B_2$ würde folgen:

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3{,}50\left(1 + 0{,}840 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$
$$K_1^{\mathrm{II}} = 3{,}50\left(1 + 0{,}847 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right);$$

für die 2. Bauchlage der Brücke $B_2$:

$$B_2^{\mathrm{I}} = 3{,}50\left(1 - 0{,}689 \cdot e^{-2\pi\varkappa'\cdot 1{,}5}\right),$$
$$B_2^{\mathrm{II}} = 3{,}50\left(1 - 0{,}711 \cdot e^{-2\pi\varkappa'\cdot 1{,}5}\right).$$

Berechnet man $\varkappa'$ aus der Vergleichung mit der wässrigen Lösung bei der Knotenlage, so entsteht als zweiter Näherungswerth:

$$0{,}8435 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} = 0{,}162\,,\quad \varkappa' = 0{,}263\,.$$

Aus der Vergleichung der Bauchlage folgt:

$$0{,}700 \cdot e^{-2\pi\varkappa\cdot 1{,}5\cdot\varkappa'} = 0{,}0615\,,\quad \varkappa' = 0{,}258\,.$$

Als Mittel ergiebt sich daher

$$\varkappa' = 0{,}26\,.$$

Dies würde also genau zusammenfallen mit dem Absorptionsindex der wässrigen Lösung. Da aber der erste Näherungswerth hier bei

der Rechnung zu gross gewählt wurde, so fällt der dritte Näherungswerth von $\varkappa'$ etwas grösser als der zweite aus, und es ergiebt sich

$$\varkappa' = 0{,}27 .$$

Bei der grossen Schwingungsdauer ist daher der Absorptionsindex des Glycerins nur etwa halb so gross, als bei der dreimal schnelleren Schwingung. Die Absorption ist also sehr abhängig von der Schwingungsdauer, und geht den umgekehrten Gang, wie sie bei normal sich verhaltenden, leitenden Flüssigkeiten thut. Denn während letztere eine langsame Schwingung viel stärker absorbiren als eine schnelle, ist es beim Glycerin umgekehrt.

Bei den folgenden Substanzen ist die Absorption nur für die schnellen Schwingungen der Wellenlänge $\lambda = 75$ cm bestimmt worden.

**Amylalkohol.**

$\lambda = 75$ cm. $n = 2{,}34$. Es ist gerade noch der erste Knoten einstellbar; scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 180 \,.\, 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 gegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex 0,435. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0{,}52$ den Formeln zu Grunde, so folgt für Amylalkohol:

$$\text{r} = 0{,}510 ; \quad \text{r}' = 0{,}410 .$$

$$f = 0{,}504 ; \quad g = 1{,}16 ; \quad fg = c = 0{,}585 ; \quad \varrho' = 0{,}940 .$$

$$a = 1{,}94 ; \quad a' = 1{,}55 ; \quad a_1'' = 0{,}173 ; \quad a_2'' = 0{,}216 .$$

$$h_1 + 1 = 3{,}27 ; \quad h_2 + 1 = 2{,}86 .$$

$$K_1^{\text{I}} = 2{,}92\left(1 + 0{,}678 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\text{II}} = 2{,}73\left(1 + 0{,}709 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 180 \,.\, 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$K_1 = 4{,}62\,(1 + 0{,}029) .$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0{,}693 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} = 0{,}029 ,$$

$$\varkappa' = 0{,}51 .$$

Dieser zweite Näherungswerth liegt so nahe am ersten, dass es nicht mehr nothwendig ist, einen dritten Näherungswerth zu bestimmen.

**Aethylalkohol.**

$\lambda = 75$ cm. $n = 4{,}80$. Der zweite Knoten ist fast noch einstellbar; scheinbar isoabsorbirend mit wässriger Lösung von $K = 75 \cdot 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex $\varkappa = 0{,}212$. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0{,}25$ für Aethylalkohol zu Grunde, so folgt:

$$\mathfrak{r} = 0{,}670\,;\quad \mathfrak{r}' = 0{,}211\,.$$

$$f = 0{,}662\,;\quad g = 1{,}16\,;\quad fg = c = 0{,}767\,;\quad \varrho' = 0{,}851\,.$$

$$a = 1{,}94\,;\quad a' = 1{,}72\,;\quad a_1'' = 0{,}319\,;\quad a_2'' = 0{,}360\,.$$

$$h_1 + 1 = 4{,}30\,;\quad h_2 + 1 = 3{,}84\,.$$

$$K_2^{\mathrm{I}} = 2{,}91\left(1 + 0{,}422 \cdot e^{-4\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_2^{\mathrm{II}} = 2{,}91\left(1 + 0{,}458 \cdot e^{-4\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 75 \cdot 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$K_2 = 4{,}23\,(1 + 0{,}0315)\,.$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0{,}440 \cdot e^{-4\pi\varkappa'} = 0{,}0315\,,$$

$$\varkappa' = 0{,}21\,.$$

**Essigsäure.**

$\lambda = 75$ cm. $n = 2{,}51$. Der zweite Bauch ist einstellbar, der zweite Knoten nicht. Isoabsorbirend mit wässriger $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 80 \cdot 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex $\varkappa = 0{,}224$. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0{,}23$ für Essigsäure zu Grunde, so folgt:

$$\mathfrak{r} = 0{,}454\,;\quad \mathfrak{r}' = 0{,}450\,.$$

$$f = 0{,}449\,;\quad g = 1{,}16\,;\quad fg = c = 0{,}520\,;\quad \varrho' = 0{,}940\,.$$

$$a = 1{,}94\,;\quad a' = 1{,}49\,;\quad a_1'' = 0{,}142\,;\quad a_2'' = 0{,}185\,.$$

$$h_1 + 1 = 2{,}98\,;\quad h_2 + 1 = 2{,}58\,.$$

$$B_1^{\mathrm{I}} = 1{,}88\left(1 - 0{,}539 \cdot e^{-3\pi\varkappa'}\right),$$

$$B_2^{\mathrm{II}} = 1{,}87\left(1 - 0{,}430 \cdot e^{-3\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 80 \cdot 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$B_2 = 4{,}27\,(1 - 0{,}0575)\,.$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0{,}485 \cdot e^{-3\pi\varkappa'} = 0{,}0575\,,$$
$$\varkappa' = 0{,}226\,.$$

## Zusammenfassung der Hauptresultate.

1) Bei der Reflexion elektrischer Drahtwellen an einer Brücke tritt eine Schwächung ihrer Amplitude und eine Phasenverschiebung ein, welche im Wesentlichen abhängt von dem Verhältniss der Länge der Brücke zu der Wellenlänge. Wird letztere sehr klein, wie z. B. in dem Falle, dass die Drähte von Wasser umgeben sind, so kann auch die Schwächung der Amplitude bei der Reflexion selbst für sehr kurze Brückenlängen ziemlich bedeutend werden. Je mehr die reflectirte Amplitude an Stärke abnimmt, desto mehr gewinnt die über die Brücke weitergehende Amplitude der elektrischen Kraft. Bei kurzen Wellenlängen, z. B. elektrischen Schwingungen in Wasser, ist die weitergehende Amplitude so bedeutend, dass unter Umständen die Anordnung des Drahtsystems hinter der reflectirenden Brücke merkbaren Einfluss gewinnt auf die elektrische Kraft vor der Brücke. Die für Berechnung dieser Verhältnisse aufgestellten Formeln enthalten ausser direct zu messenden Grössen entweder beobachtbare Grössen (die beobachtbare Brücken- oder Bügelverkürzung), oder solche Grössen, welche entweder genau zu berechnen, oder wenigstens zu taxiren sind. Zu letzteren gehört das Verhältniss $\zeta$ der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke zu der der Paralleldrähte. — Die Brückenverkürzung hängt direct mit der Phasenverschiebung der Wellen bei der Reflexion zusammen.

2) Der Leitungswiderstand der Drähte gewinnt bei den gewöhnlichen experimentellen Anordnungen merkbaren Einfluss auf die Erscheinungen nur dann, wenn die zwei Brücken, zwischen denen sich stehende elektrische Wellen ausbilden, um sehr zahlreiche Wellenlängen von einander entfernt sind.

3) Die zeitliche Dämpfungsconstante $\gamma$ der elektrischen Schwingungen kann aus einer einfachen Beobachtung, nämlich der Anzahl beobachtbarer Knoten und Bäuche, gefunden werden, wenn die Empfindlichkeit des Wellenindicators bekannt ist. Letztere braucht aber nur taxirt zu werden, da geringe Aenderungen sich kaum

auf $\gamma$ äussern. Für die von mir gewählte Versuchsanordnung ist nahezu $\gamma = 0{,}15$.

4) Für den Erreger der Wellen sind mehrere harmonische Oberschwingungen nachweisbar.

5) Die Empfindlichkeit des Wellenindicators kann an der Hand aufgestellter Formeln genau ermittelt werden, wenn man die in einer wässrigen Lösung eines Elektrolyten beobachtbaren Knoten und Bäuche zählt.

6) Wässrige Lösungen von Kupfersulfat und Kochsalz besitzen normale Absorption der elektrischen Wellen, d. h. eine derartige, wie sie theoretisch aus ihrer Leitfähigkeit und ihrer Dielektricitätsconstanten folgt.

7) Die Phasenänderung bei der Reflexion der elektrischen Wellen an der Grenze Luft — wässriger Elektrolyt ist nur wenig von $\pi$ verschieden. Immerhin bewirkt diese geringe Differenz, dass die erste Bauchlage einer Brücke $B_2$ theoretisch nicht streng angebbar ist, wenn bei unveränderter Lage der Flüssigkeitsgrenze zu reinem Wasser mehr und mehr Salz zugesetzt wird. Daher kann man auch für wässrige Lösungen, in denen nur noch die erste Bauchlage einer Brücke $B_2$ einstellbar ist, nicht genau angeben, innerhalb welcher Genauigkeit ihre Dielektricitätsconstante mit der des reinen Wassers übereinstimmt.

8) Der Absorptionsindex $\varkappa$ einer beliebigen, auch anomal sich verhaltenden Flüssigkeit lässt sich durch einfache experimentelle Vergleichung mit einer scheinbar isoabsorbirenden wässrigen Lösung eines Elektrolyten ermitteln. Es ergeben sich für $\varkappa$ folgende Zahlen:

Glycerin: $\varkappa = 0{,}50$ bei $T = 25 \,.\, 10^{-10}$ sec.;
$\varkappa = 0{,}27$ bei $T = 70 \,.\, 10^{-10}$ sec.
Amylalkohol: $\varkappa = 0{,}51$ bei $T = 25 \,.\, 10^{-10}$.
Aethylalkohol: $\varkappa = 0{,}21$ bei $T = 25 \,.\, 10^{-10}$.
Essigsäure: $\varkappa = 0{,}23$ bei $T = 25 \,.\, 10^{-10}$.

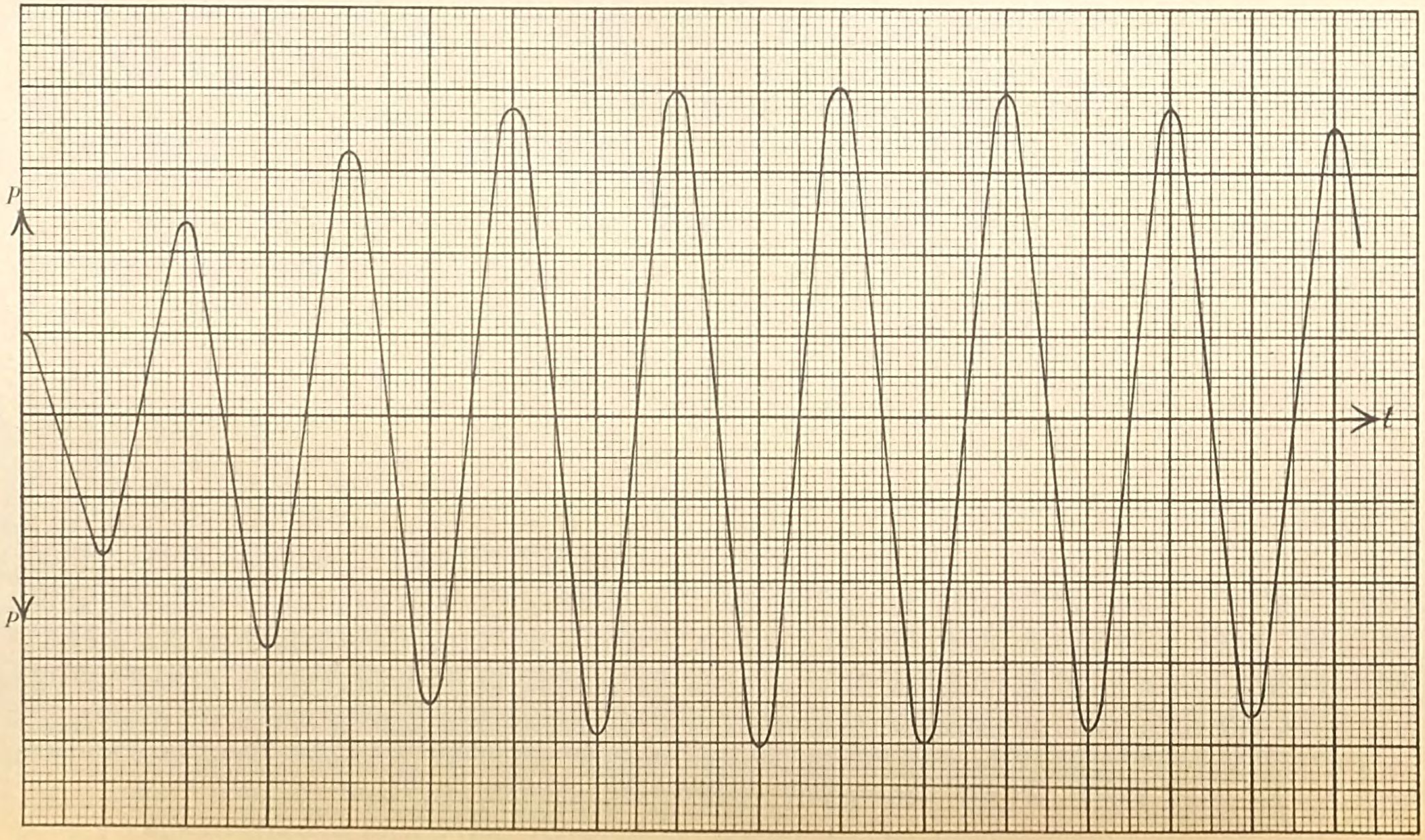



Fig. 1. Wasserreflexion, zeitlicher Verlauf. $\gamma = 0,15$.

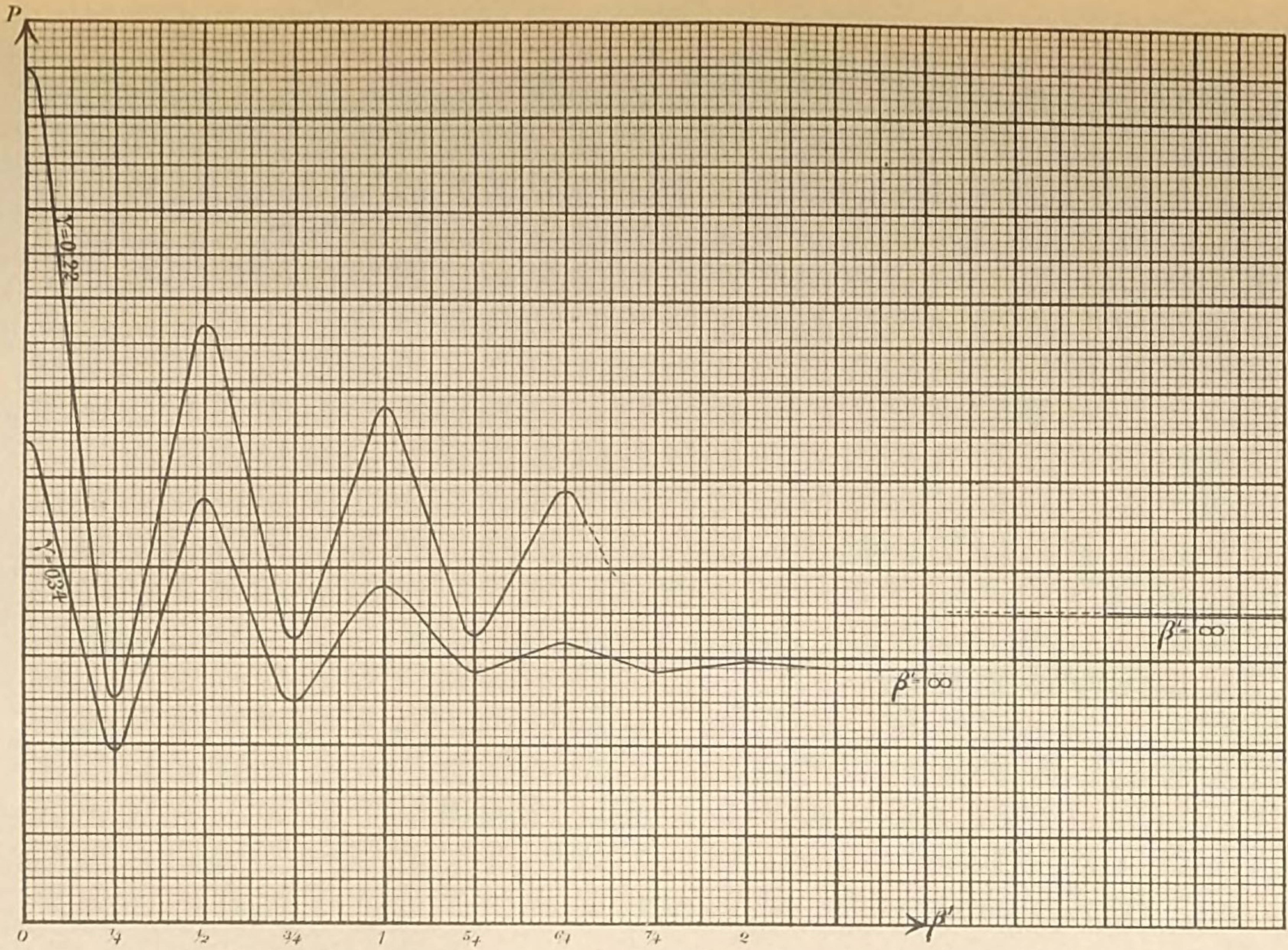



*Fig. 2. Einfluss der Lage einer reflektirenden Brücke im Wasser.*

Acad. 78 fa 4°

# UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

# SINNESFUNCTIONEN

DER

# MENSCHLICHEN HAUT.

ERSTE ABHANDLUNG:

## DRUCKEMPFINDUNG UND SCHMERZ

VON

**MAX VON FREY.**

Des XXIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº III.

MIT 16 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1896.

Das Manuscript eingeliefert am 1. Juli 1896.
Der Abdruck vollendet am 20. August 1896.

UNTERSUCHUNGEN

# Berichtigungen

zu M. v. Frey, Untersuchungen über die Sinnesfunctionen.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 238 | Zeile | 1 | v. u.: | 3.2 mgrmm | statt mgr/mm |
| » | 253 | » | 6 | v. u.: | 0.2 grmm | statt gr/mm |
| » | 254 | » | 2 | v. u.: | 0.0006 grmm | statt gr/mm |
| » | 266 | » | 10 | v. o.: | 1894 | statt 1874. |

Für den Fall ausserordentlich kleiner zeitlicher Dämpfung $\gamma$ lässt sich nun leicht ein Näherungswerth des Absorptionsindex einer Substanz angeben, wenn der der scheinbar isoabsorbirenden Substanz bekannt ist. Setzen wir nämlich $\gamma = 0$, so wäre die Grösse $g$ der Formeln (173) bis (176) gleich 1, während $f$ kleiner als 1 ist. Die Maxima der Amplituden würden daher nach unendlich langer Zeit erreicht werden, d. h. für $h = \infty$. Diese Maxima würden nach allen jenen vier Formeln daher den Werth annehmen:

$$(206) \qquad K, B = \frac{a'}{1-f}\left\{1 + r''\frac{a}{a'}\frac{f}{1-f}\right\}.$$

Da nun die Reflexion an der Brücke $B_1$, welche in Luft liegt, nahezu eine totale ist, so ist nach den Formeln (171) nahezu:

$$f = \mathfrak{r},\quad a = 2,\quad a' = 1 + \mathfrak{r}.$$

Daher wird (206) zu:

$$(207) \qquad K, B = \frac{1+\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}}\left\{1 + r''\frac{2\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}^2}\right\}.$$

Nun ist nach (188), (189) für $\gamma = 0$, $\tau = 0$:

$$r'' = \pm\, 4\varrho'\mathfrak{r}' e^{-2\pi\varkappa\left(k + \Delta'(-\frac{1}{2})\right)},$$

wobei das + Zeichen für eine Knotenlage des $B_2$, das — Zeichen für eine Bauchlage gilt, und wobei $k$ die Ordnungszahl des Knotens oder Bauches bedeutet.

Ferner ist nach den Formeln (129) für $\mathfrak{r}^2$ und (160) für $\mathfrak{r}'^2$:

$$(208) \qquad \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{r}'}{1-\mathfrak{r}^2} = \frac{\sqrt{1+\varkappa^2}}{4}.$$

Daher wird (207) zu:

$$(209) \qquad K, B = \frac{1+\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}}\left\{1 \pm 2\varrho'\sqrt{1+\varkappa^2}\, e^{-2\pi\varkappa\left(k + \Delta'(-\frac{1}{2})\right)}.\right\}$$

Für scheinbar isoabsorbirende Substanzen muss das zu 1 additiv oder subtractiv hinzutretende Glied bei gleichem Betrage der Ordnungszahl $k$ denselben Werth haben. Wenn man nun den Reflexionsfactor $\varrho'$ an der Brücke $B_2$ für beide Substanzen als gleich annimmt, was näherungsweise wenigstens gestattet ist, so erkennt man, dass die Gleichheit jenes Zusatzgliedes eintritt, wenn $\varkappa$ für beide Substanzen denselben Werth hat, denn auf $\Delta'$ kommt es in Anbetracht seiner

Kleinheit ($\Delta' < 0{,}1$) nicht sehr an und ausserdem ist es auch im Wesentlichen nur von $\varkappa$ allein abhängig.

Bei sehr kleiner zeitlicher Dämpfung sind daher näherungsweise die Absorptionsindices scheinbar isoabsorbirender Substanzen einander gleich, auch wenn ihre Brechungsexponenten verschieden sind.

Da $\varrho'$ für die Substanz mit stärkerem Brechungsexponenten nach den früheren Entwickelungen kleiner ist, als für die Substanz mit kleinerem Brechungsexponenten, so ist der Näherungswerth des $\varkappa$ in der Weise zu corrigiren, dass der Absorptionsindex der letzteren Substanz etwas grösser ist, als der der ersteren, d. h. die Correction findet in dem schon oben pag. 154 genannten Sinne statt. Es ist aber bemerkenswerth, dass diese Correction nach der Formel (209) nur wegen des Auftretens des Factors $\varrho'$ nöthig ist, d. h. wegen der verschieden starken Brückenreflexion in beiden Substanzen; dass dagegen die verschieden starke Reflexion an der Grenze beider Substanzen, d. h. die Verschiedenheit des $\mathfrak{r}$, bei der zeitlichen Dämpfung $\gamma = 0$ völlig aus dem Resultat verschwindet. Dies ist ein Fingerzeig dafür, dass auch bei grösserer zeitlicher Dämpfung $\gamma$ man nicht ohne speciellere Berechnung wird sagen können, in welchem Sinne Verschiedenheit des Reflexionsvermögens $\mathfrak{r}$ bei beiden Substanzen wirkt.

Auch bei grösserer zeitlicher Dämpfung $\gamma$ wird man als ersten Näherungswerth Gleichheit der Absorptionsindices zweier scheinbar isoabsorbirender Substanzen benutzen können. Ist nun der Absorptionsindex der einen Substanz bekannt, z. B. als theoretischer Werth für eine wässrige Lösung, die sich normal verhält, und berechnet man mit Benutzung dieses Absorptionsindex und der beobachteten Brechungsexponenten für beide Flüssigkeiten die Stärke des letzten mit einer Brücke $B_2$ gerade noch einstellbaren oder gerade nicht mehr einstellbaren Knotens oder Bauches nach den Formeln (184) bis (189), wobei der Werth der zeitlichen Dämpfung $\gamma$ ungefähr bekannt sein muss, so erhält man einen zweiten Näherungswerth des unbekannten Absorptionsindex $\varkappa'$ der einen Flüssigkeit, wenn man über den Factor $e^{-2\pi\varkappa'}$ in der Weise verfügt, dass nun der procentische Einfluss des Vorhandenseins der Brücke auf die Grösse der elektrischen Kraft in beiden scheinbar isoabsorbirenden Flüssig-

keiten derselbe ist. — Dieses Verfahren kann man wiederholen, um einen dritten Näherungswerth für $\varkappa$ zu bilden; es ist dies aber meist nicht nöthig, da die in den Formeln (184) bis (189) auftretenden Grössen, abgesehen von dem in $r''$ vorkommenden Factor $e^{-2\pi\varkappa k}$, sehr wenig sich mit $\varkappa$ ändern.

Auf diesem Wege soll jetzt die Berechnung der Absorptionsindices einer Anzahl von Flüssigkeiten mit anomaler Absorption vorgenommen werden, für welche ich früher[1]) die scheinbar isoabsorbirenden wässrigen Lösungen von Kupfersulfat ermittelt habe. Die Temperatur ist $17^0$.

### Glycerin.

1) $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = 75 : 3.10^{10}$ sec.

$n = 5{,}0$. Es ist gerade noch der 1. Knoten einstellbar. Scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 170.10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist daher der erste Näherungswerth des Absorptionsindex:

$$\varkappa = 0{,}42 .$$

Mit Benutzung dieses Werthes und $\gamma = 0{,}15$ wird nun

$$\mathfrak{r} = 0{,}71 ; \quad \mathfrak{r}' = 0{,}189 ;$$

$$f = 0{,}70 ; \quad g = 1{,}16 ; \quad fg = c = 0{,}823 ; \quad \varrho' = 0{,}845 .$$

$$a = 1{,}94 ; \quad a' = 1{,}76 ; \quad a''_1 = 0{,}379 ; \quad a''_2 = 0{,}417 .$$

$$h_1 + 1 = 4{,}98 ; \quad h_2 + 1 = 4{,}50 .$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3{,}14\left(1 + 0{,}805 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 3{,}08\left(1 + 0{,}793 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right).$$

Da nun nach der Tabelle der pag. 150 für die isoabsorbirende wässrige Lösung $(K = 170.10^{-8})$ der procentische Einfluss der Brücke $B_2$ in der ersten Knotenlage im Zeitintervall I 3,1 %, im Intervall II 2,9 % beträgt, d. h. im Mittel 3,0 %, während er hier im Mittel $80 . e^{-2\pi\varkappa'}$ % beträgt, so muss sein:

$$0{,}030 = 0{,}80 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} ,$$

woraus als zweiter Näherungswerth folgt

$$\varkappa' = 0{,}52 .$$

---

1) »Arbeit I«.

Berechnet man nun die Hilfsgrössen mit diesem $\varkappa'$, so erhält man:

$$\mathfrak{r} = 0{,}730\,; \quad \mathfrak{r}' = 0{,}180\,.$$

$$f = 0{,}72\,; \quad g = 1{,}16\,; \quad fg = c = 0{,}835\,; \quad \varrho' = 0{,}842\,.$$

$$a = 1{,}94\,; \quad a' = 1{,}78\,; \quad a_1'' = 0{,}413\,; \quad a_2'' = 0{,}451\,.$$

$$h_1 + 1 = 4{,}90\,; \quad h_2 + 1 = 4{,}42\,.$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3{,}31\left(1 + 0{,}684 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 3{,}31\left(1 + 0{,}682 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right);$$

aus $0{,}030 = 0{,}683 \,.\, e^{-2\pi\varkappa'}$ folgt der dritte Näherungswerth

$$\varkappa' = 0{,}50\,.$$

Dieser unterscheidet sich in der That nur unbedeutend vom zweiten Näherungswerth. — Die Genauigkeit, mit der $\varkappa'$ auf diese Weise bestimmt ist, ist ziemlich erheblich. Denn die Beobachtung ergab, dass eine Lösung der Leitfähigkeit $K = 180 \,.\, 10^{-8}$ schon eine bemerkbar stärkere Absorption besass. Nach der Tabelle der pag. 150 ist aber für diese Lösung der Einfluss des ersten Knotens nur um sehr wenig kleiner, als bei der Lösung, deren $K = 170 \,.\, 10^{-8}$ beträgt. $\varkappa'$ würde daher nur um 1 % grösser ausfallen, wenn die Lösung $K = 180 \,.\, 10^{-8}$ als scheinbar isoabsorbirend angesehen wäre. Selbst in Anbetracht der Unsicherheit der theoretischen Grundlagen, welche besonders in Berechnung der Reflexionsschwächung $\varrho'$ an der Brücke $B_2$ liegt, erscheint, weil $e^{-2\pi\varkappa'}$ sich mit Aenderung des $\varkappa'$ sehr stark ändert, die Bestimmung des Absorptionsindex $\varkappa'$ auf etwa 2 % nach dieser Methode erreicht.

2) $\lambda = 211$ cm, d. h. $T = 211 : 3 \,.\, 10^{10}$ sec.

$n = 6{,}25$. Der erste Knoten ist noch gut einstellbar, der zweite Bauch wurde wegen der Kürze des Troges, welcher das Glycerin enthielt, nicht eingestellt. Scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 34 \,.\, 10^{-8}$.

Zunächst ist bei diesen grösseren Schwingungsdauern $T$[1]) (die Tabelle der pag. 149 bezieht sich nur auf $\lambda = 75$ cm) für die wässrige Lösung:

---

1) Da $T$ grösser ist, so ist auch $\tau$ nach Formel (70) etwas grösser, als bei den vorigen Versuchen, nämlich: $\tau = 0{,}005$. Die zeitliche Dämpfung ist bei diesem grösseren Erreger nicht direct bestimmt worden. Es ist ebenfalls der Werth $\gamma = 0{,}15$ der Rechnung zu Grunde gelegt. Der Einfluss von $\gamma$ auf das Resultat ist gering.

$$s = 0{,}282\ ;\quad n = 9{,}66\ ;\quad \varkappa = 0{,}262\ .$$

$$\mathfrak{r} = 0{,}823\ ;\quad \mathfrak{r}' = 0{,}1015\ .$$

$$f = 0{,}817\ ,\quad g = 1{,}16\ ;\quad fg = c = 0{,}948\ ;\quad \varrho' = 0{,}895\ .$$

$$a = 1{,}93\ ;\quad a' = 1{,}89\ ;\quad a_1'' = 0{,}717\ ;\quad a_2'' = 0{,}735\ .$$

$$h_1 + 1 = 6{,}23\ ;\quad h_2 + 1 = 5{,}76\ .$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 5{,}00\,(1 + 0{,}155)\ ,$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 4{,}93\,(1 + 0{,}169)\ ,$$

$$B_2^{\mathrm{I}} = 5{,}00\,(1 - 0{,}060)\ ,$$

$$B_2^{\mathrm{II}} = 4{,}93\,(1 - 0{,}063)\ .$$

Führt man nun dieselbe Berechnung für Glycerin durch, wobei man als Näherungswerth von $\varkappa$ den Betrag 0,30 annimmt (er ist etwas grösser gewählt, als der der Lösung, weil dadurch im Allgemeinen der zweite Näherungswerth $\varkappa'$ näher am ersten liegen wird), so erhält man für Glycerin:

$$\mathfrak{r} = 0{,}745\ ;\quad \mathfrak{r}' = 0{,}157\ .$$

$$f = 0{,}740\ ;\quad g = 1{,}16\ ;\quad fg = c = 0{,}859\ ;\quad \varrho' = 0{,}950\ .$$

$$a = 1{,}93\ ;\quad a' = 1{,}80\ ;\quad a_1'' = 0{,}458\ ;\quad a_2'' = 0{,}492\ .$$

$$h_1 + 1 = 5{,}14\ ;\quad h_2 + 1 = 4{,}67\ .$$

Für die 1. Knotenlage der Brücke $B_2$ würde folgen:

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3{,}50\,(1 + 0{,}840 \cdot e^{-2\pi\varkappa'})\ ,$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 3{,}50\,(1 + 0{,}847 \cdot e^{-2\pi\varkappa'})\ ;$$

für die 2. Bauchlage der Brücke $B_2$:

$$B_2^{\mathrm{I}} = 3{,}50\,(1 - 0{,}689 \cdot e^{-2\pi\varkappa' \cdot 1{,}5})\ ,$$

$$B_2^{\mathrm{II}} = 3{,}50\,(1 - 0{,}711 \cdot e^{-2\pi\varkappa' \cdot 1{,}5})\ .$$

Berechnet man $\varkappa'$ aus der Vergleichung mit der wässrigen Lösung bei der Knotenlage, so entsteht als zweiter Näherungswerth:

$$0{,}8435 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} = 0{,}162\ ,\quad \varkappa' = 0{,}263\ .$$

Aus der Vergleichung der Bauchlage folgt:

$$0{,}700 \cdot e^{-2\pi\varkappa \cdot 1{,}5 \cdot \varkappa'} = 0{,}0615\ ,\quad \varkappa' = 0{,}258\ .$$

Als Mittel ergiebt sich daher

$$\varkappa' = 0{,}26\ .$$

Dies würde also genau zusammenfallen mit dem Absorptionsindex der wässrigen Lösung. Da aber der erste Näherungswerth hier bei

der Rechnung zu gross gewählt wurde, so fällt der dritte Näherungswerth von $\varkappa'$ etwas grösser als der zweite aus, und es ergiebt sich

$$\varkappa' = 0{,}27 .$$

Bei der grossen Schwingungsdauer ist daher der Absorptionsindex des Glycerins nur etwa halb so gross, als bei der dreimal schnelleren Schwingung. Die Absorption ist also sehr abhängig von der Schwingungsdauer, und geht den umgekehrten Gang, wie sie bei normal sich verhaltenden, leitenden Flüssigkeiten thut. Denn während letztere eine langsame Schwingung viel stärker absorbiren als eine schnelle, ist es beim Glycerin umgekehrt.

Bei den folgenden Substanzen ist die Absorption nur für die schnellen Schwingungen der Wellenlänge $\lambda = 75$ cm bestimmt worden.

### Amylalkohol.

$\lambda = 75$ cm. $n = 2{,}34$. Es ist gerade noch der erste Knoten einstellbar; scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 180 \,.\, 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 gegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex 0,435. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0{,}52$ den Formeln zu Grunde, so folgt für Amylalkohol:

$$\mathfrak{r} = 0{,}510 \; ; \quad \mathfrak{r}' = 0{,}410 \,.$$

$$f = 0{,}504 \; ; \quad g = 1{,}16 \; ; \quad fg = c = 0{,}585 \; ; \quad \varrho' = 0{,}940 \,.$$

$$a = 1{,}94 \; ; \quad a' = 1{,}55 \; ; \quad a_1'' = 0{,}173 \; ; \quad a_2'' = 0{,}216 \,.$$

$$h_1 + 1 = 3{,}27 \; ; \quad h_2 + 1 = 2{,}86 \,.$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 2{,}92\left(1 + 0{,}678 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 2{,}73\left(1 + 0{,}709 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 180 \,.\, 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$K_1 = 4{,}62\,(1 + 0{,}029) \,.$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0{,}693 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} = 0{,}029 \,,$$

$$\varkappa' = 0{,}51 \,.$$

Dieser zweite Näherungswerth liegt so nahe am ersten, dass es nicht mehr nothwendig ist, einen dritten Näherungswerth zu bestimmen.

**Aethylalkohol.**

$\lambda = 75$ cm. $n = 4,80$. Der zweite Knoten ist fast noch einstellbar; scheinbar isoabsorbirend mit wässriger Lösung von $K = 75 \,.\, 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex $\varkappa = 0,212$. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0,25$ für Aethylalkohol zu Grunde, so folgt:

$$\mathfrak{r} = 0,670\,; \quad \mathfrak{r}' = 0,211\,.$$

$$f = 0,662\,; \quad g = 1,16\,; \quad fg = c = 0,767\,; \quad \varrho' = 0,851\,.$$

$$a = 1,94\,; \quad a' = 1,72\,; \quad a_1'' = 0,319\,; \quad a_2'' = 0,360\,.$$

$$h_1 + 1 = 4,30\,; \quad h_2 + 1 = 3,84\,.$$

$$K_2^{\mathrm{I}} = 2,91\left(1 + 0,422 \cdot e^{-4\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_2^{\mathrm{II}} = 2,91\left(1 + 0,458 \cdot e^{-4\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 75 \,.\, 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$K_2 = 4,23(1 + 0,0315)\,.$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0,440 \cdot e^{-4\pi\varkappa'} = 0,0315\,,$$

$$\varkappa' = 0,21\,.$$

**Essigsäure.**

$\lambda = 75$ cm. $n = 2,51$. Der zweite Bauch ist einstellbar, der zweite Knoten nicht. Isoabsorbirend mit wässriger $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 80 \,.\, 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex $\varkappa = 0,224$. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0,23$ für Essigsäure zu Grunde, so folgt:

$$\mathfrak{r} = 0,454\,; \quad \mathfrak{r}' = 0,450\,.$$

$$f = 0,449\,; \quad g = 1,16\,; \quad fg = c = 0,520\,; \quad \varrho' = 0,940\,.$$

$$a = 1,94\,; \quad a' = 1,49\,; \quad a_1'' = 0,142\,; \quad a_2'' = 0,185\,.$$

$$h_1 + 1 = 2,98\,; \quad h_2 + 1 = 2,58\,.$$

$$B_1^{\mathrm{I}} = 1,88\left(1 - 0,539 \cdot e^{-3\pi\varkappa'}\right),$$

$$B_2^{\mathrm{II}} = 1,87\left(1 - 0,430 \cdot e^{-3\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 80 \,.\, 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$B_2 = 4,27(1 - 0,0575)\,.$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0{,}485 \cdot e^{-3\pi\varkappa'} = 0{,}0575\,,$$
$$\varkappa' = 0{,}226\,.$$

## Zusammenfassung der Hauptresultate.

1) Bei der Reflexion elektrischer Drahtwellen an einer Brücke tritt eine Schwächung ihrer Amplitude und eine Phasenverschiebung ein, welche im Wesentlichen abhängt von dem Verhältniss der Länge der Brücke zu der Wellenlänge. Wird letztere sehr klein, wie z. B. in dem Falle, dass die Drähte von Wasser umgeben sind, so kann auch die Schwächung der Amplitude bei der Reflexion selbst für sehr kurze Brückenlängen ziemlich bedeutend werden. Je mehr die reflectirte Amplitude an Stärke abnimmt, desto mehr gewinnt die über die Brücke weitergehende Amplitude der elektrischen Kraft. Bei kurzen Wellenlängen, z. B. elektrischen Schwingungen in Wasser, ist die weitergehende Amplitude so bedeutend, dass unter Umständen die Anordnung des Drahtsystems hinter der reflectirenden Brücke merkbaren Einfluss gewinnt auf die elektrische Kraft vor der Brücke. Die für Berechnung dieser Verhältnisse aufgestellten Formeln enthalten ausser direct zu messenden Grössen entweder beobachtbare Grössen (die beobachtbare Brücken- oder Bügelverkürzung), oder solche Grössen, welche entweder genau zu berechnen, oder wenigstens zu taxiren sind. Zu letzteren gehört das Verhältniss $\zeta$ der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke zu der der Paralleldrähte. — Die Brückenverkürzung hängt direct mit der Phasenverschiebung der Wellen bei der Reflexion zusammen.

2) Der Leitungswiderstand der Drähte gewinnt bei den gewöhnlichen experimentellen Anordnungen merkbaren Einfluss auf die Erscheinungen nur dann, wenn die zwei Brücken, zwischen denen sich stehende elektrische Wellen ausbilden, um sehr zahlreiche Wellenlängen von einander entfernt sind.

3) Die zeitliche Dämpfungsconstante $\gamma$ der elektrischen Schwingungen kann aus einer einfachen Beobachtung, nämlich der Anzahl beobachtbarer Knoten und Bäuche, gefunden werden, wenn die Empfindlichkeit des Wellenindicators bekannt ist. Letztere braucht aber nur taxirt zu werden, da geringe Aenderungen sich kaum

auf $\gamma$ äussern. Für die von mir gewählte Versuchsanordnung ist nahezu $\gamma = 0{,}15$.

4) Für den Erreger der Wellen sind mehrere harmonische Oberschwingungen nachweisbar.

5) Die Empfindlichkeit des Wellenindicators kann an der Hand aufgestellter Formeln genau ermittelt werden, wenn man die in einer wässrigen Lösung eines Elektrolyten beobachtbaren Knoten und Bäuche zählt.

6) Wässrige Lösungen von Kupfersulfat und Kochsalz besitzen normale Absorption der elektrischen Wellen, d. h. eine derartige, wie sie theoretisch aus ihrer Leitfähigkeit und ihrer Dielektricitätsconstanten folgt.

7) Die Phasenänderung bei der Reflexion der elektrischen Wellen an der Grenze Luft — wässriger Elektrolyt ist nur wenig von $\pi$ verschieden. Immerhin bewirkt diese geringe Differenz, dass die erste Bauchlage einer Brücke $B_2$ theoretisch nicht streng angebbar ist, wenn bei unveränderter Lage der Flüssigkeitsgrenze zu reinem Wasser mehr und mehr Salz zugesetzt wird. Daher kann man auch für wässrige Lösungen, in denen nur noch die erste Bauchlage einer Brücke $B_2$ einstellbar ist, nicht genau angeben, innerhalb welcher Genauigkeit ihre Dielektricitätsconstante mit der des reinen Wassers übereinstimmt.

8) Der Absorptionsindex $\varkappa$ einer beliebigen, auch anomal sich verhaltenden Flüssigkeit lässt sich durch einfache experimentelle Vergleichung mit einer scheinbar isoabsorbirenden wässrigen Lösung eines Elektrolyten ermitteln. Es ergeben sich für $\varkappa$ folgende Zahlen:

Glycerin: $\varkappa = 0{,}50$ bei $T = 25 . 10^{-10}$ sec.;
$\varkappa = 0{,}27$ bei $T = 70 . 10^{-10}$ sec.
Amylalkohol: $\varkappa = 0{,}51$ bei $T = 25 . 10^{-10}$.
Aethylalkohol: $\varkappa = 0{,}21$ bei $T = 25 . 10^{-10}$.
Essigsäure: $\varkappa = 0{,}23$ bei $T = 25 . 10^{-10}$.

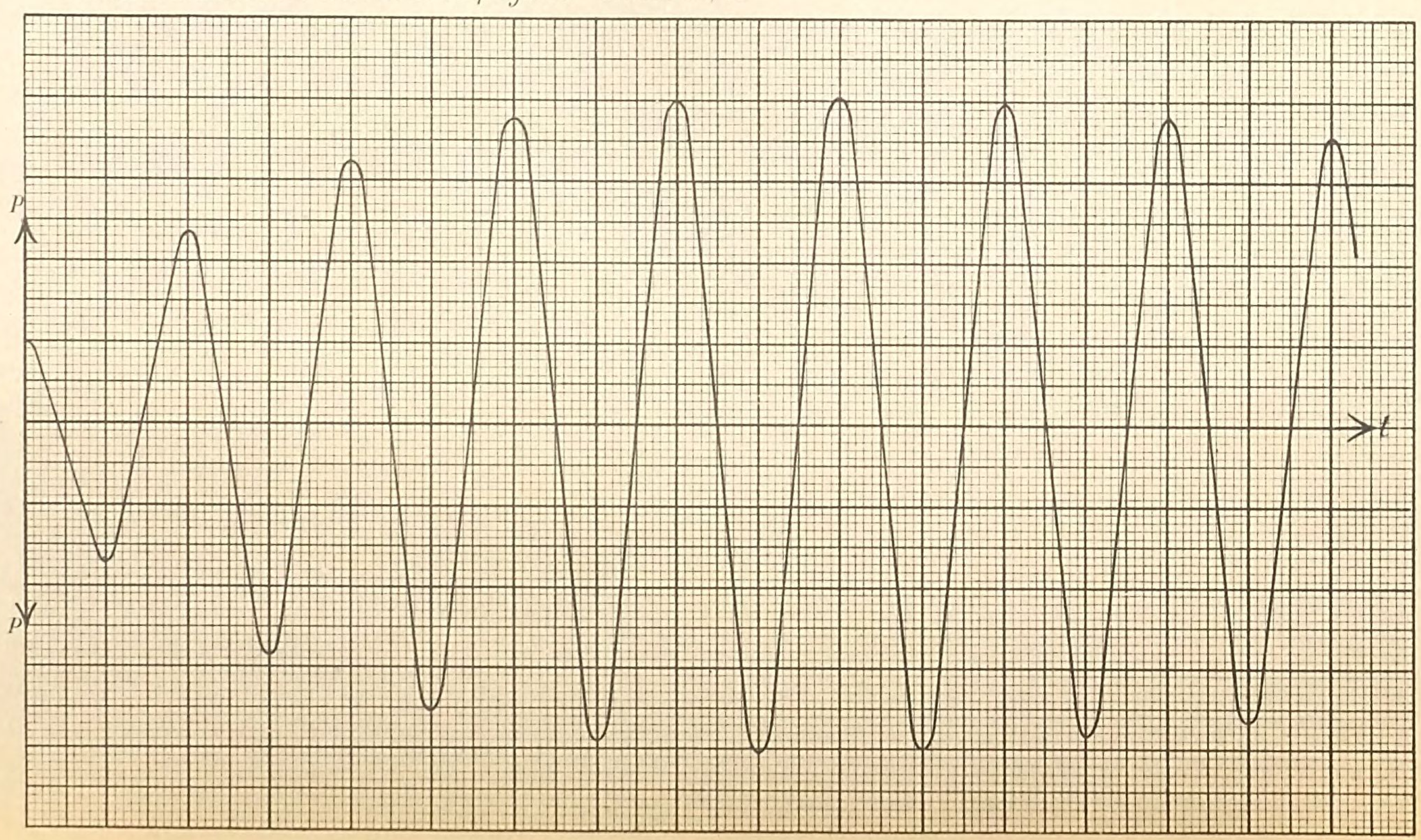



Fig. 1. Wasserreflexion, zeitlicher Verlauf. $\Upsilon = 0{,}15$.

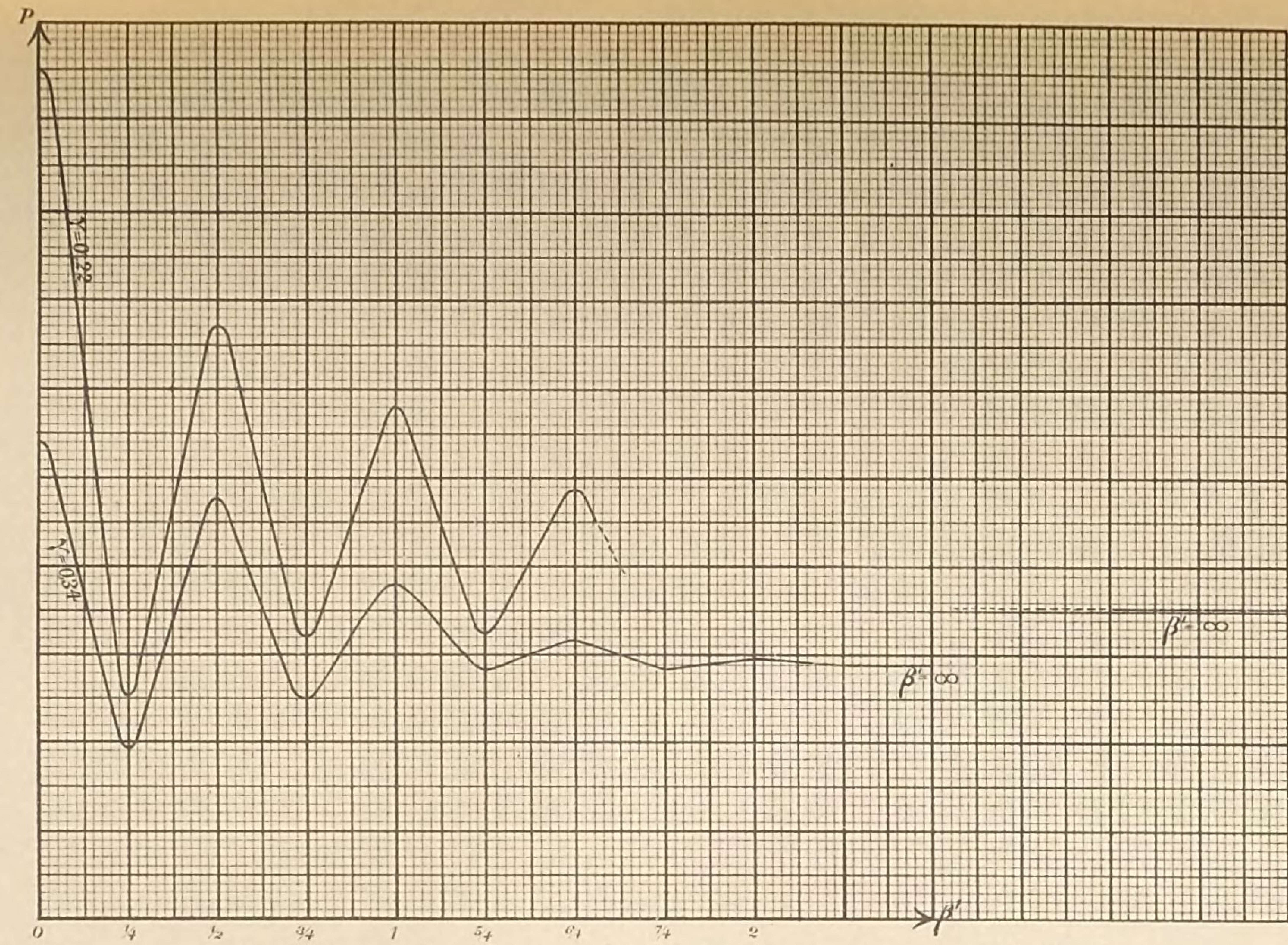



*Fig. 2. Einfluss der Lage einer reflektirenden Brücke im Wasser.*

Acad. 78 fa 4°

# UNTERSUCHUNGEN
ÜBER DIE
# SINNESFUNCTIONEN
DER
# MENSCHLICHEN HAUT.

ERSTE ABHANDLUNG:

## DRUCKEMPFINDUNG UND SCHMERZ

VON

MAX VON FREY.

Des XXIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº III.

MIT 16 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL
1896.

Das Manuscript eingeliefert am 1. Juli 1896.
Der Abdruck vollendet am 20. August 1896.

# Berichtigungen

## zu M. v. Frey, Untersuchungen über die Sinnesfunctionen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 238 | Zeile | 1 | v. u.: | 3.2 mgrmm statt mgr/mm |
| » | 253 | » | 6 | v. u.: | 0.2 grmm statt gr/mm |
| » | 254 | » | 2 | v. u.: | 0.0006 grmm statt gr/mm |
| » | 266 | » | 10 | v. o.: | 1894 statt 1874. |

# UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

# SINNESFUNCTIONEN

DER

# MENSCHLICHEN HAUT.

ERSTE ABHANDLUNG:

## DRUCKEMPFINDUNG UND SCHMERZ

VON

**MAX VON FREY**

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIED DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MIT 16 TEXTFIGUREN.

DEM ANDENKEN

MEINER ELTERN.

# INHALTSÜBERSICHT.


Seite

Einleitung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175

Erster Theil. Die Druckempfindung . . . . . . . . . . . . . . . . . . 177

Erster Abschnitt. Die Wahrnehmung andauernder Belastungen . . . . 177

Die Erkennung von Entlastungen . . . . . . . . . 183

Zweiter Abschnitt. Schwellenbestimmungen an makroskopischen Flächen, Versuche mit der Schwellenwage . . . . . . . . . 188

1. Abhängigkeit der Belastungsschwelle von der Belastungsgeschwindigkeit . . . . . . . . . . . . . . . . . . 198

2. Abhängigkeit der Belastungsschwelle von der Reizfläche 201

3. Abhängigkeit der Druckschwelle von dem Orte . . . 205

Dritter Abschnitt. Ueber den Gebrauch von Reizhaaren . . . . . . . 208

Vierter Abschnitt. Druckempfindungen durch Reizhaare, Lage und Dichte der Druckpunkte . . . . . . . . . . . . . . . . 218

Fünfter Abschnitt. Schwellenbestimmungen an Druckpunkten durch Reizhaare . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223

Sechster Abschnitt. Die Reizbarkeit der Haare . . . . . . . . . . . 237

Zweiter Theil. Die Schmerzempfindung . . . . . . . . . . . . . . . . 239

Siebenter Abschnitt. Die Schmerzpunkte und ihre Erregbarkeit . . . . 239

Achter Abschnitt. Topographie der Schmerzpunkte . . . . . . . . . 244

Neunter Abschnitt. Die Messung von Schmerzschwellen . . . . . . . 246

Dritter Theil. Beziehungen zwischen Druck- und Schmerzpunkten . . . . . 251

Zehnter Abschnitt. Schwellenvergleichung . . . . . . . . . . . . 251

Elfter Abschnitt. Anatomische Betrachtungen . . . . . . . . . . . 253

Organe der Druckempfindung . . . . . . . . . . 253

Organe des Schmerzes . . . . . . . . . . . . . . 256

Zwölfter Abschnitt. Bemerkungen zur Mechanik der Nervenerregung durch Druck- und Schmerzreize . . . . . . . . . . . . 258

Rückblick . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 262

Litteraturverzeichniss . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 265

# Einleitung.

Durch zahlreiche nervöse Einrichtungen ist die Haut im Stande das Bewusstsein von den sie treffenden Einwirkungen zu unterrichten in Gestalt von Empfindungen, welche theils der Haut allein eigenthümlich sind, theils auch von anderen Körpertheilen her ausgelöst werden können. Insoferne als diese Empfindungen für die Orientirung im Raume sowie für die Erkennung gewisser mechanischer Eigenschaften der ihn erfüllenden Körper von Wichtigkeit sind, kann man die Haut ein Sinnesorgan nennen. Es muss indessen erinnert werden, dass diese Bezeichnung hier nicht dieselbe Bedeutung hat wie anderwärts. So ist z. B. der Bau des Auges bis in's Kleinste der erstrebten Sinnesleistung dienstbar gemacht; es besteht überhaupt nur aus den specifischen nervösen Structuren, bezw. aus den diesen zugeordneten Hilfs-, Ernährungs- und Schutzvorrichtungen. In der Haut ist eine solche specialisirte Structur nicht nachweisbar und auch nicht zu erwarten, weil ihr im Haushalt des Körpers noch eine Reihe weiterer wichtiger Functionen zugetheilt sind: sie ist an der Wärmeregulation, an der Aufspeicherung von Reservestoffen betheiligt, sie dient zum Schutz des Körpers gegen mechanische und chemische Schädlichkeiten, sowie in mannigfaltiger Weise zur Einwirkung auf die Aussenwelt. Für die Erfüllung aller dieser Aufgaben müssen aber in der Structur der Haut gewisse Vorbedingungen gegeben sein.

Dieses Nebeneinander der Functionen ist nicht nur potentiell, sondern auch räumlich nachweisbar. Sowie nicht jedes Stück der Haut an der secretorischen Thätigkeit betheiligt ist, so lassen sich die der Haut eigenthümlichen Empfindungen nicht von jedem Flächenelement auslösen, ja sie können auf grösseren Strecken sogar ganz fehlen. Dementsprechend finden sich die nervösen Einrichtungen in

wechselnder Dichte in die Haut eingestreut und durch mehr oder minder grosse Strecken nicht nervösen Gewebes von einander getrennt. Jede Einwirkung auf die Haut, welche empfunden werden soll, wird eine grössere oder kleinere Zahl der Nervenenden sammt den zugehörigen Bahnen in Erregung versetzen müssen. Es stellen dieselben die kleinsten experimentell nicht weiter zerlegbaren Bestandtheile des Sinnesapparates der Haut dar, welche als die Sinneseinheiten oder Sinneselemente der Haut bezeichnet werden können.

Eine weitere Schwierigkeit für eine zusammenfassende Betrachtung entsteht dadurch, dass die Hautempfindungen nicht einen geschlossenen Qualitätenkreis bilden, wie dies beispielsweise mit den Empfindungen aus dem Gebiete des Gesichts- oder Gehörssinnes der Fall ist, welche bei aller Mannigfaltigkeit doch eine selbständige, von anderen Empfindungsarten streng geschiedene Gruppe darstellen. Die Verwandtschaft der Hautempfindungen ist viel lockerer, ja man kann sagen, dass sie theilweise zu Empfindungen aus dem Körperinneren in viel engerer Beziehung stehen, als die oberflächlichen Empfindungen untereinander.

Es wird sich nicht empfehlen, auf diese Beziehungen näher einzugehen, bevor die einzelnen sinnesphysiologischen Leistungen der Haut genauer untersucht sind. Die vorliegende Abhandlung setzt sich die Aufgabe, hierzu einen ersten Beitrag zu liefern, indem sie die beiden einfachen, durch mechanische Einwirkungen auf die Haut erweckbaren Empfindungen, Druckempfindung und Schmerz, herausgreift. Mittheilungen über weitere hier anschliessende Untersuchungen sind für die nächste Zeit beabsichtigt.

Innerhalb des gewählten engeren Gebietes ist die Zahl der zu lösenden Fragen noch immer so gross, dass wichtige Punkte, der Ortssinn, die Unterschiedsschwellen, das Kitzelgefühl, trotz ihrer nahen Beziehung zu dem behandelten Gegenstande vorläufig unberücksichtigt bleiben und auf die Fortsetzung verwiesen werden mussten. Trotzdem wäre mir eine Durchführung der Untersuchungen bis zu dem hier erreichten Punkte nicht möglich gewesen ohne die freundliche Mitwirkung, deren ich mich von verschiedenen Seiten zu erfreuen hatte. Es sei mir gestattet den Herren DDr. Berger, Brahn, S. Garten, F. Hofmann, Ch. H. Judd, meinen Collegen Professor Ambronn und Dr. J. Garten meine besondere Erkenntlichkeit dafür auszusprechen, dass

sie sich an den Versuchen als Reagenten oder sonstwie helfend betheiligten. Insbesondere ist es mir aber ein Bedürfniss, der stetigen und werthvollen Mitarbeiterschaft meines Freundes Dr. F. Kiesow dankbarst zu gedenken.

---

## Erster Theil.

# Die Druckempfindung.

## Erster Abschnitt.

### Die Wahrnehmung andauernder Belastungen.

Die nachfolgend beschriebenen Untersuchungen beschäftigen sich mit den Empfindungen, welche durch geringe Deformationen der Körperoberfläche erzeugt werden. Man nimmt an, dass die Haut an Empfindlichkeit gegen solche Einwirkungen alle anderen Körpertheile übertrifft; sicherlich ist sie im Stande das Bewusstsein über Tiefe und Ausbreitung der Deformation mit ziemlicher Genauigkeit zu unterrichten, so dass ein Urtheil über die Natur des geschehenen Eingriffs möglich wird. Diese Aussagen werden als Leistungen des Drucksinns der Haut betrachtet; sie stellen den wesentlichen Inhalt des sogenannten passiven Tastens dar.

In dieser Richtung ist vor allem beachtenswerth, dass die Haut durch ihren Drucksinn andauernde Deformationen als solche erkennen kann. Sie verhält sich darin ganz anders als der Nerv, bei welchem langsam ansteigender bezw. andauernder Druck in der Regel nicht zur Erregung führt. Deformationen, welche gross genug sind den Nerv leitungsunfähig zu machen, können erregungslos verlaufen, wie das sogenannte Einschlafen der Glieder beweist.

Es erschien zunächst wünschenswerth das Verhalten der Haut gegen dauernde Deformationen genauer zu untersuchen, unter Berücksichtigung der kleinsten noch wahrnehmbaren Reize. Zur Erzeugung minimaler Belastungen haben Aubert und Kammler (1) kleine an

Fäden hängende Gewichte auf die Haut herabgelassen. Dieses Verfahren ist mit mehreren Unzuträglichkeiten verknüpft. Das Gewicht wird immer mit einer gewissen Geschwindigkeit auf die Haut treffen, und daher durch seine lebendige Kraft vorübergehend eine Deformation erzeugen, welche grösser ist als der endlichen Ruhelage entspricht. Es ist ferner keine Sicherheit gegeben, dass das Gewicht sofort mit seiner vollen Fläche und nicht mit einer Kante auftrifft. Beide Uebelstände wirken in dem Sinne, die Reizschwelle zu niedrig erscheinen zu lassen. Endlich ist auch das Pendeln der Gewichte störend, wenn bestimmte Hautstellen gereizt werden sollen.

Um diese Nachtheile zu vermeiden und den Gewichten gewissermassen eine Führung zu geben, wurden sie nicht direct auf die Haut gesetzt, sondern an einen Hebel gehängt, der seinerseits durch einen endständig befestigten Stab oder Druckkörper auf die Haut wirkte. In Figur 1 stellt *H* den aus einem dünnen Holzstreifen

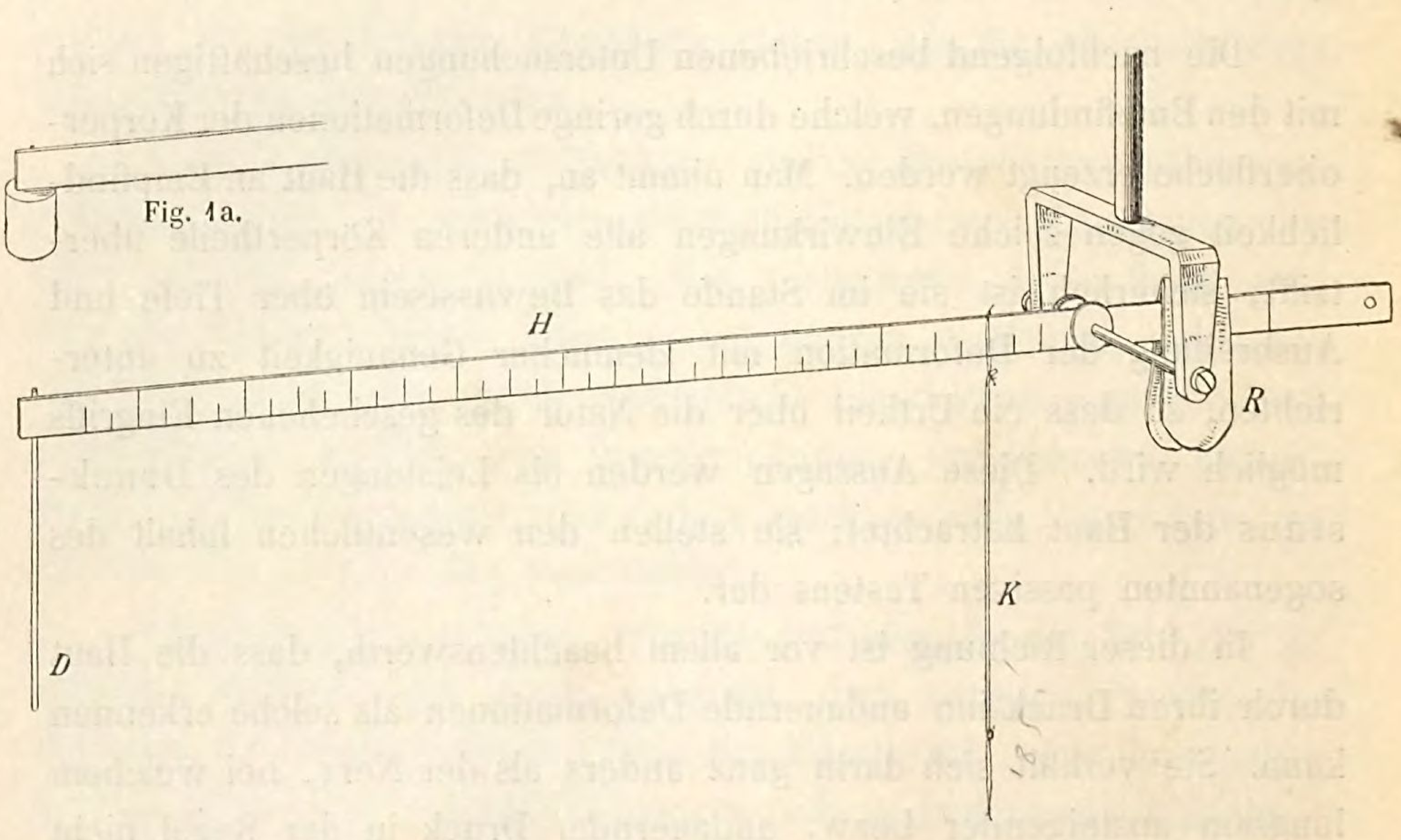



Fig. 1.

geschnittenen sehr leichten doppelarmigen Hebel dar. Derselbe war im unbelasteten Zustande durch den Reiter *R* äquilibrirt und stellte sich von selbst in die Horizontale ein. Die genaue Berührung des Druckstabes *D* mit der Haut wurde vor jeder Belastung in der Weise bewerkstelligt, dass der ganze Hebel, bezw. die Gabel in welcher seine Stahlaxe spielte, durch einen Trieb herabgelassen wurde. Auf

diese Weise konnte die untere ebene und kreisrunde Fläche des Stabes bis zur völligen Berührung mit der Haut und doch zugleich so leise und langsam eingestellt werden, dass keine Empfindung auftrat. Die benutzten Stäbe hatten Querschnitte von bezw. 1,3 und 2,5 $mm^2$. Für die Belastung grösserer Flächen dienten auswechselbare Korkscheiben von 3,8—100 $mm^2$, welche, wie Fig. 1[a] zeigt, an Stelle des Stabes befestigt werden konnten. Beim Aufsetzen dieser Druckkörper auf die Haut lässt sich Temperaturempfindung vermeiden, wenn man die Stäbe aus Holz oder Schilf, die Scheiben aus Kork fertigt. Die beschriebene Einrichtung hat eine gewisse Aehnlichkeit mit den von R. Dohrn (6) und H. Griffing (14 S. 20) zur Messung von Unterschiedswellen bezw. zu Gewichtsvergleichungen benützten Verfahren; doch besitzt der Hebel gegenüber der Wage mehrfache Vortheile.

Soll, wie beabsichtigt, das Aufsetzen der Druckscheibe des äquilibrirten Hebels unbemerkt bleiben, so muss die zu prüfende Hautstelle völlig ruhig gehalten werden. Für die nachfolgend beschriebenen Versuche, welche an der Volarseite des Unterarms und der Hand angestellt wurden, konnte eine sehr vollkommene Fixation in der Weise erzielt werden, dass die bezeichneten Gliederabschnitte in eine nach dem Arm des Reagenten gegossene Hohlform aus Gyps gebettet wurden, welche nur die zu prüfenden Hautstellen frei liess.

Auch bei der Belastung des Hebels mit Gewichten bedarf es einiger Vorsicht. Durch die Anbringung der Gewichte wird nämlich nicht nur ein Rotationsmoment erzeugt, sondern auch das Trägheitsmoment des Hebels vergrössert und es besteht die Gefahr, dass der die Haut berührende Hebel sich unter Schwingungen in die neue Gleichgewichtslage einstellt. Dabei können vorübergehend Deformationen der Haut entstehen, welche viel bedeutender sind als dem schliesslichen Gleichgewichtszustande entspricht. Auch bei der Entlastung können Schwingungen des zwar äquilibrirten aber nicht trägheitslosen Hebels in Frage kommen. Diese Schwingungen lassen sich vermeiden, wenn man zwischen Hebel und Gewicht einen Kautschukstreifen einschaltet. Man hängt das Gewicht in eine Fadenschlinge am unteren Ende des Kautschukstreifens Fig. 1 *K*, und lässt es auf der Hand langsam nach unten sinken. Dabei nimmt die Spannung allmählich zu und erreicht schliesslich den vollen Werth

ohne merkliche Schwingungen. Umgekehrt wird bei der Entlastung verfahren. Die Versuchsanordnung bringt es mit sich, dass die Belastung relativ langsam eintritt. Dies ist, wie spätere Versuche zeigen werden, nicht gleichgiltig, wenn es sich um Bestimmung von Belastungsschwellen im engeren Sinne handelt. Hier, wo es auf die Erkennung dauernder Belastung ankommt, ist das Verfahren zulässig.

Bei der Ausführung der Versuche sass der Reagent in bequemer Haltung mit der linken Seite gegen den Tisch, auf welchem Vorderarm und Hand horizontal ausgestreckt in der Gypsform ruhten; die Augen wurden geschlossen gehalten, um die Aufmerksamkeit möglichst auf die untersuchte Hautstelle zu concentriren. Von den auf seiner Haut vorgenommenen Manipulationen war der Reagent nicht unterrichtet; über die begleitenden Empfindungen wurde er befragt, sofern er nicht unaufgefordert berichtete. Die Fragen zielten darauf ab zu erfahren:

Ob die Belastung gefühlt wurde,

ob und wie lange sie als dauernd erkannt wurde,

ob Entlastung wahrgenommen wurde.

Als Beispiele seien zunächst die Versuchstabellen I—III, 8. und 9. August 1895, angeführt. Reagent F., belastete Hautfläche 100 $mm^2$; der Hebel war in diesen drei Versuchen nicht vollständig äquilibrirt, sondern belastete die Fläche mit 5 gr. Aufsetzen des leeren Hebels wurde in der Regel nicht gefühlt, jedenfalls verschwand die Empfindung nach kurzer Zeit. Die angegebenen Belastungen beziehen sich auf die untersuchte Hautfläche und nicht auf die wirkliche Grösse des näher der Axe angehängten Gewichtes. Dauer der Belastung jedesmal 15—20 Secunden. Die Aussagen des Reagenten sind doppelt umrandet.

Versuch I. 1. Phalange des Mittelfingers, Volarseite.

| Gewichte | angehängt | verbleibend | weggenommen |
|---|---|---|---|
| 17 gr | Schwacher Druck | bleibt | Entlastung deutlich erkannt |
| 33 „ | Stärkerer Druck | „ | „ |
| 17 „ | Druck wieder schwächer | „ | „ |
| 33 „ | Druck so stark w. d. zweitemal | „ | Entlastung |
| 50 „ | Vielleicht etwas stärker | „ | „ |
| 67 „ | Starker Druck | „ | „ |
| 83 „ | Starker Druck | „ | „ |

Versuch II. Volarseite des Handgelenks.

| Gewichte | angehängt | verbleibend | weggenommen |
|---|---|---|---|
| 17 gr | Schwache Belastung | wird schwächer | Berührung |
| 83 „ | Starker Druck | bleibt | Entlastung |
| 50 „ | Bel. aber schwächer wie vorher | „ | Vielleicht Entlastung |
| 33 „ | Druck wächst wieder | „ | Entl. nicht empfunden |
| 67 „ | Stärkerer Druck | „ | Entlastung |

Versuch III. Volarseite des Unterarmes, Grenze des mittleren und unteren Drittels.

| Gewicht | angehängt | verbleibend | weggenommen |
|---|---|---|---|
| 17 gr | Schwacher Druck | Unsicher ob noch da | Stoss, keine Entlastung |
| 33 „ | Etwas stärkerer Druck | Schwächt sich ab | Verstärkt oder Stoss |
| 50 „ | Deutliche Verstärkung | Da, aber weniger deutl. | ebenso |
| 67 „ | „ | bleibt | Berührung |
| 83 „ | „ | bleibt | Vielleicht Entlastung |

Diese drei Versuche lassen eine Verschiedenheit zwischen der Haut des Fingers und des Unterarms in der Richtung erkennen, dass an letzterem Orte die Entlastung nicht so sicher bezw. gar nicht erkannt wird. Die Unsicherheit wird noch grösser, wenn man die Gewichte längere Zeit verweilen lässt, wie der folgende Versuch zeigt.

Versuch IV. 28. Aug. 95. Reagent J. Volarseite des Handgelenks. Belastete Hautfläche 50 mm². Dauer der Belastung 60 Secunden.

| Belastung | angehängt | verbleibend | weggenommen |
|---|---|---|---|
| 200 gr | Druck | bleibt | Fraglich ob fort |
| 180 „ | Druck, mittelstark | bleibt | Ebenso, 30 Sec. nach Entlastung ist Reag. sicher, dass Gew. fort |
| 160 „ | Druck | bleibt, nimmt aber allmählich ab, nach 50 Sec. ist Reag. sicher, dass das Gew. fort ist. | Reag. merkt die Entl. nicht |
| 100 „ | Schwächerer Druck | bleibt, nach 45 Sec. giebt Reag. an, dass das Gew. fort ist | „ „ „ „ „ |
| 90 „ | Geringer Druck | Druckempf. verschwindet bald | „ „ „ „ „ |
| 80 „ | „ „ | Nach 15 Sec. Gew. angeblich fort | „ „ „ „ „ |

Die erwähnte Unsicherheit lässt sich, obgleich schwieriger, auch für die Fingerhaut constatiren, wenn man die Belastungen bis nahe an die Reizschwelle vermindert, z. B.

Versuch V. 2. Sept. 95. Reagent J. Mittelfinger 1. Phalange. Belastete Fläche 50 $mm^2$.

| Belastung | aufgelegt | verweilend | weggenommen |
|---|---|---|---|
| stets 7 gr durch 20 Sec. | Druck | bleibt | Fraglich ob noch da |
| | „ | unsicher ob noch da | Nach einigen Sek. ist Reag. sicher dass das Gew. entfernt ist |
| | „ | ebenso | Fraglich ob noch da |

und noch deutlicher in dem folgenden

Versuch VI. Reagent Be. Mittelfinger 1. Phalange, belastete Fläche 3,8 $mm^2$.

| Belastung | aufgelegt | verweilend | weggenommen |
|---|---|---|---|
| stets 0,4 gr durch 20 Sec. | Druck | nicht bemerkt | nicht bemerkt |
| | „ | „ | „ |
| | „ | „ | schwächerer Druck |
| | „ | „ | Bewegung |
| | „ | noch da | nicht bemerkt |
| | nicht bemerkt | nicht bemerkt | „ |
| | Druck | „ | „ |
| | „ | „ | „ |
| | „ | „ | „ |
| | „ | „ | „ |
| | „ | „ | „ |

Diese sowie eine grosse Zahl gleichartiger Versuche, welche demnächst durch Herrn Dr. KIESOW an einem anderen Orte mitgetheilt werden sollen, haben übereinstimmend ergeben:

1. Constante Belastungen können durch längere Zeit, wenn nicht als constante, so doch als andauernde erkannt werden, soferne es sich nicht um kleine, für die geprüfte Hautstelle in der Nähe der Schwelle liegende Gewichte handelt. Bei diesen wird die Empfindung sehr bald nach dem Auflegen des Gewichtes undeutlich oder verschwindet ganz.

2. Auflegen und Abheben der Gewichte wird im Allgemeinen als solches erkannt, doch treten bei der Entlastung falsche Angaben

viel häufiger auf als bei der Belastung. Die beobachteten Täuschungen bewegen sich in drei Richtungen:

a. die Entlastung wird gar nicht erkannt,
b. die Entlastung wird unvollständig erkannt,
c. die Entlastung wird als Belastung wahrgenommen.

a. Die Entlastung wird gar nicht erkannt.

Dieser Fall tritt hauptsächlich dann ein, wenn die Belastungen sich in der Nähe der Reizschwelle bewegen. Kurze Zeit nach dem Auflegen verschwindet dann die Druckempfindung und die Wegnahme des Gewichtes wird nicht wahrgenommen. Vgl. Versuch VI. Es ist theoretisch wichtig, dass die Entlastung von einem unmerklich gewordenen Gewichte niemals als Zug wahrgenommen wird.

b. Die Entlastung wird unvollständig wahrgenommen.

Diese Täuschung tritt im Gegensatz zu der unter a. angeführten bei grösseren Belastungen auf. In den mir vorliegenden Aufzeichnungen finden sich bei Wegnahme grösserer Gewichte folgende Aussagen der Reagenten: „Allmähliche Entlastung, theilweise Entlastung, Entlastung aber immer noch Druck“ u. dgl. mehr. Eine nach 10 bis 20 Secunden wieder eintretende Belastung wird als „Zuwachs oder Verstärkung des Druckes“, wie z. B. in Versuch III. bezeichnet. Uebrigens kommt es unter diesen Umständen auch vor, dass die Wegnahme gar nicht bemerkt wird und die Empfindung des vollen Druckes, nur ganz allmählich abnehmend, den Reiz für längere oder kürzere Zeit überdauert, wofür die Versuche II—IV. Beispiele bieten.

Auf dieser Thatsache beruht ein beliebter Vexirversuch. Drückt man einen harten flachen Gegenstand, z. B. ein Geldstück, durch einige Zeit auf die Stirn, so wird es, behutsam weggenommen, noch einige Zeit gefühlt und ein nicht Gewitzigter lässt sich leicht verleiten, die scheinbar anklebende Münze durch Stirnrunzeln zum Abfallen bringen zu wollen. In dieser Form angestellt ist der Versuch für den vorliegenden Zweck allerdings nicht rein, da auch Temperaturreize eine langdauernde Nachempfindung herbeiführen können. Der Versuch mit den thermisch nicht wirksamen Druckkörpern aus Holz oder Kork zeigt, dass die Nachdauer auch für die Druckempfindung vorhanden ist.

Nun ist bekannt, dass ein längere Zeit dauernder, nicht zu

schwacher Druck auf der Haut ein Abbild des drückenden Körpers hinterlässt oder ein Druckbild, wie man es nennen könnte. Es ist wahrscheinlich, dass es dieses Druckbild ist, welches nach dem Aufhören des Reizes noch gefühlt wird und die Fortdauer der ganzen oder eines Theiles der Belastung vortäuscht. Diese Annahme schliesst selbstverständlich nicht aus, dass der mit der Druckempfindung einhergehende nervöse Vorgang an sich schon mit einer gewissen Nachwirkung verknüpft ist. Dieselbe kommt aber für die hier besprochene Täuschung, welche sich auf viele Secunden ja Minuten erstrecken kann, nicht in Betracht. Wenn man berücksichtigt, dass gerade der Drucksinn zur Wahrnehmung oscillirender Reize in besonders hohem Grade befähigt ist (wovon später noch die Rede sein wird), so muss seinen Apparaten eine hohe Beweglichkeit und eine gegen die erwähnten Zeiten verschwindende Nachdauer der Erregung zu eigen sein.

Für die Anschauung, dass die lange Nachwirkung eines stärkeren Druckreizes auf der Langsamkeit beruht, mit welcher die Haut erlittene Deformationen wieder ausgleicht, lassen sich mehrere Beobachtungen anführen.

Zunächst ist das deutliche Auftreten der Nachwirkung (wie natürlich auch des Druckbildes) abhängig von der Dauer der Belastung. Belastet man z. B. eine Hautfläche von 100 $mm^2$ des Unterarms durch 20 Secunden mit einem Gewichte von 33 gr, so lässt sich unter den oben aufgezählten Cautelen das Gewicht abheben, ohne dass der Reagent es gewahr wird. Dauerte dagegen die Belastung nur eine Secunde, so wird die Entfernung immer bemerkt.

Eine andere hierher gehörige Beobachtung, welche ich Herrn KIESOW verdanke, betrifft die Reihenfolge, in welcher wechselnde Gewichte auf die Haut gesetzt werden und besagt, dass für ein gegebenes Gewicht die Fortdauer der Belastung um so leichter vorgetäuscht wird, je grössere Gewichte der gewählten Hautstelle vorher aufgelegen hatten, je grösser also die Deformation war, mit der die Hautstelle in den Versuch eintrat. Dem Einwand, dass die von den stärkeren Reizen zurückbleibende Ermüdung die Wahrnehmung der Entlastung verhindert, lässt sich leicht dadurch begegnen, dass zwischen die einzelnen Belastungen Pausen eingeschoben werden, welche zwar die Erholung des nervösen Apparates, nicht aber den

Ausgleich der gesetzten Deformation erlauben. Die jedesmal sehr präcisen Angaben über die neu eintretenden Belastungen schliessen erhebliche Ermüdungszustände aus.

Eine weitere hieher gehörige Erscheinung betrifft die ungleiche Befähigung verschiedener Hautstellen, die beschriebene Täuschung zu erzeugen. Wie die mitgetheilten Versuche lehren, sind die Volarflächen der Finger und der Hand dazu wenig geeignet, dagegen tritt sie auf den übrigen Flächen des Armes sehr leicht ein. Entsprechend diesem Verhalten kehren die zuerst genannten Flächen nach Aufhören der deformirenden Einwirkung rascher in ihre ursprüngliche Gestalt zurück. Es scheint, dass in Folge der derberen Structur der Tastflächen die Gewebsflüssigkeit weniger leicht dislocirt oder aber sehr rasch wieder erneuert wird. Vielleicht kommt hier der auffallende Reichthum an Blutgefässen in Betracht, durch den nach Spalteholz (27) die haarlosen Tastflächen der Hand und des Fusses sich auszeichnen. Jedenfalls ist beachtenswerth, dass gerade die Tastflächen den übrigen Hautbezirken nicht nur in der Wahrnehmung des Eintrittes, sondern insbesondere auch der Dauer und des Aufhörens einer Belastung überlegen sind.

c. Die Entlastung wird als Belastung wahrgenommen.

Diese Täuschung kann in allen jenen Fällen eintreten, in welchen die Erkennung der Entlastung aus den früher angegebenen Gründen verhindert oder erschwert ist. Eine bestimmte Gesetzmässigkeit in ihrem Auftreten ist aber nicht zu bemerken und es ist mir wahrscheinlich, dass sie in einem Fehler in der Ausführung der Versuche begründet ist. Wird nämlich das Gewicht rasch von dem Hebel abgehoben, so wird der Hebel von der sich ausdehnenden Hautstelle emporgeschleudert, schwingt aber sofort wieder zurück und verursacht eine neue Deformation der Haut, welche als Belastung imponirt. Zuweilen wird diese Erschütterung geradezu als solche gefühlt und es finden sich dann in den Aufzeichnungen für den Moment der Entlastung die Angaben: »Berührung, Stoss, Bewegung, Veränderung, Verschiebung, Erschütterung«, manchmal mit dem Zusatze »vielleicht Entlastung« oder »ungewiss ob Zu- oder Abnahme«. Die Richtigkeit dieser Erklärung wird dadurch bewiesen, dass bei der Wiederholung dieser Versuche mit der sogleich zu beschreibenden

trägheitsfreieren Schwellenwage der Irrthum kaum noch zur Beobachtung kam.

Es giebt also zwei wohl zu unterscheidende Fälle, in welchen die Erkennung einer Entlastung verhindert oder erschwert ist. Der erste Fall bezieht sich auf Belastungen, welche der Reizschwelle nahe liegen und kurze Zeit nach dem Auflegen nicht mehr gefühlt werden. Dieser Fall gilt für alle mit Drucksinn begabten Flächen ohne Ausnahme. Der zweite Fall bezieht sich auf Belastungen, welche so gross sind, so lange einwirken, oder denen solche Belastungen voraufgegangen sind, dass eine länger dauernde Deformation, ein Druckbild auf der Haut entsteht. Dieser Fall gilt hauptsächlich für jene Hautflächen, auf welchen leicht Druckbilder erzeugt werden, also nicht oder nur in sehr beschränktem Maasse für die eigentlichen Tastflächen.

Der aus den mitgetheilten Versuchen abzuleitende Satz, dass die Entlastungsschwelle stets höher liegt als die Belastungsschwelle, gilt, wie ich mich durch besondere Versuche überzeugte, auch für Unterschiedsschwellen. In dieser Anwendung wird ihm allerdings durch ältere Beobachtungen scheinbar widersprochen. R. DOHRN (6) belastete die zu prüfende Hautstelle in einer Ausdehnung von einigen Quadratmillimetern durch ein constantes Ausgangsgewicht von 1 g und bestimmte, wieviel Gewicht zugesetzt oder weggenommen werden musste, damit ein Unterschied in der Belastung fühlbar wurde. Ich entnehme seiner Tabelle der Mittelwerthe (Tab. IV. S. 362/63) folgende Zahlen, aus welchen hervorgeht, dass das abzuhebende Gewicht A stets kleiner war als das zuzusetzende Gewicht Z:

| | Abgehobenes Gewicht A | Zugelegtes Gewicht Z | D |
|---|---|---|---|
| 3. Phalanx. . . . . . . | 0.294 | 0.465 | 0.317 |
| 2. Phalanx. . . . . . . | 0.355 | 0.631 | 0.387 |
| 1. Phalanx. . . . . . . | 0.480 | 0.682 | 0.405 |
| Vola der Finger . . . . | 0.358 | 0.526 | 0.345 |
| Dorsum der Finger. . . | 0.398 | 0.653 | 0.395 |
| Daumen . . . . . . . . | 0.412 | 0.487 | 0.328 |
| Handrücken . . . . . . | 0.714 | 0.992 | 0.489 |
| Vorderarm . . . . . . . | 0.857 | 1.904 | 0.655 |

Es wurde z. B. auf dem Handrücken ein Druckzuwachs verspürt, wenn die Belastung im Mittel von 1 g auf 1.992 g erhöht, eine Druckabnahme, wenn sie von 1 g auf 1 — 0.714 = 0.286 g vermindert wurde. Nimmt man an, dass für die in sehr engen Grenzen sich bewegenden Belastungsänderungen das Weber'sche Gesetz gültig ist (Weber's Versuche mit Belastung der ruhenden Haut sind bisher noch niemals genügend nachgeprüft worden), so würden 2 Gewichte dann als eben merklich verschieden erkannt werden, wenn ihr Quotient einen bestimmten, von den speciellen Versuchsbedingungen abhängigen constanten Werth darstellt. Nun verhält sich

$$0.511 : 1 = 1 : 1.992.$$

Stellt also die Gewichtsvermehrung von 1 auf 1.992 einen eben merklichen Reizzuwachs dar, so ist nach dem Weber'schen Gesetz dasselbe auch von einer Gewichtsvermehrung von 0.511 auf 1 zu erwarten. Dieser letztere Zusatz $D = 1 - 0.511 = 0.489$ ist im dritten mit $D$ überschriebenen Stab der Tabelle eingetragen und ebenso bedeuten die übrigen Zahlen dieses Stabes die Differenzen zwischen 1 g und einem Ausgangsgewicht $Q = 1 - D$, welches sich zu 1 gerade so verhält wie 1 zu $1 + Z$. Was den Handrücken betrifft, so ist die durch den Versuch gefundene eben merkliche mittlere Entlastung = 0.714 wesentlich grösser als die auf Grund des Weber'schen Gesetzes berechnete 0.489, woraus folgt, dass die Entlastungsschwelle höher ist als die aus der Annahme berechnete Belastungsschwelle. Besser stimmen die berechneten und gefundenen Entlastungen für die Fingerhaut überein, für welche nach meinen Versuchen die Entlastungsschwelle nur wenig höher ist als die Belastungsschwelle. Die Versuche Dohrn's stehen also, soweit vergleichbar, nicht im Widerspruch mit den meinigen.

Ueberblickt man die im ersten Abschnitt beschriebenen Versuche, so lehren sie, dass die Druckempfindung im Allgemeinen mit den durch äussere Einwirkungen auf der Haut gesetzten Deformationen auf's Engste zusammenhängt. Die Bedeutung dieses Factors zeigt sich namentlich darin, dass die Druckempfindung fortdauert, wenn der Reiz ein Druckbild hinterlässt. Da hier von einer Erhöhung des Gewebsdruckes nicht mehr die Rede sein kann, so scheint es die Dislocation der Gewebsflüssigkeit in erster Linie zu sein, von der die

Intensität der Empfindung abhängt. Wenn trotzdem ein durch längere Zeit anhaltender Druck unter Umständen nicht mehr gefühlt wird, so steht dies mit der eben ausgesprochenen Folgerung nicht im Widerspruch. Denn es ist eine Eigenthümlichkeit aller nervösen Gebilde, dass die durch einen constanten Reiz bewirkte Erregung sehr bald an Intensität einbüsst und früher oder später auf den Werth Null herabsinkt.

## Zweiter Abschnitt.

### Schwellenbestimmungen an makroskopischen Flächen, Versuche mit der Schwellenwage.

Die bisher mitgetheilten Versuche genügen nicht zu einem Einblick in die Bedingungen, von welchen das Zustandekommen und die Intensität einer Druckempfindung abhängt. Der Werth der Reizschwelle zeigt sich nämlich nicht nur von dem deformirenden Gewicht abhängig, sondern auch von der Grösse der getroffenen Fläche, von der gewählten Hautstelle und endlich von der Geschwindigkeit, mit welcher die Deformation erzeugt wird. Was den letzten Punkt betrifft, so lässt sich seine Bedeutung nicht etwa in der Weise demonstriren, dass man das Gewicht verschieden rasch auf die Haut herablässt. Denn je grösser die Geschwindigkeit, bzw. die lebendige Kraft ist, mit der das Gewicht auf die Haut trifft, desto tiefer wird es über die schliessliche Gleichgewichtslage hinaus in die Haut eindringen; mit anderen Worten, es wird mit der Geschwindigkeit auch die Deformation wachsen, woraus sich die stärkere Erregung des Drucksinns genügend erklärt. In diesem Sinne ist also die Angabe von DOHRN (6 S. 366) und GRIFFING (14 S. 54) zu verstehen, dass rasch aufgesetzte Gewichte stärker wirken. Herr Dr. KIESOW hat bei Gelegenheit der im ersten Abschnitt beschriebenen Versuche diesem Bedenken Rechnung zu tragen versucht. Da die Belastungen, wie erwähnt, nicht direct, sondern durch Vermittlung eines Kautschukfadens an den Druckhebel gehängt wurden, so war es möglich, sie mit verschiedener Geschwindigkeit herabzulassen, aber ohne merkliche Ueberschreitung der schliesslichen Gleichgewichtslage, die sich durch

Hüpfen des freigelassenen Gewichtes an seinem Kautschukfaden verrathen hätte. Hierbei zeigten sich die rasch ausgeführten Deformationen zweifellos stärker erregend, woraus sich die Nothwendigkeit ergab, bei Schwellenbestimmungen auf diese Variable Rücksicht zu nehmen.

Eine Bestimmung von Druckschwellen, welche sich die Gewinnung allgemein gültiger Werthe zur Aufgabe setzt, hat daher die Berücksichtigung bezw. Messung folgender Werthe anzustreben:

Grösse der Belastung,
Geschwindigkeit der Belastung,
Grösse der belasteten Fläche,
Ort der Reizung.

Diesen Anforderungen genügte der in Figur 2 a. f. S. abgebildete Apparat, den ich als Schwellenwage bezeichnen werde. Derselbe besteht im Wesentlichen aus zwei um parallele Axen drehbaren und durch ein Stück Uhrfeder mit einander verkuppelten Hebeln. Der untere Hebel $H_1$ um die Axe $A_1$ drehbar, besteht aus einem dünnen, gegen das Ende sich zuschärfenden, $8\frac{1}{4}$ cm langen Holzstreifen, von dem ein kurzer stumpfer Holzstift *St* nach unten vorragt. Durch die Mutter $M_1$ kann der auf die Axe gesteckte Hebel sowie das untere Ende der Uhrfeder in beliebig gewählter Lage auf der Axe festgeklemmt werden. Der obere zweiarmige Hebel $H_2$ besteht aus einem vierkantigen Holzstäbchen, welches durch die Mutter $M_2$ auf der Axe $A_2$, ebenfalls in beliebiger Lage, festzuklemmen ist. Der kürzere Arm von $H_2$ ragt nach der Seite von $H_1$ heraus und lehnt sich gegen das untere Ende der Stellschraube *S*. Auf der Axe $A_2$ ist ferner aufgesteckt und unverrückbar befestigt die kleine Zwinge *Z* für das obere Ende der Uhrfeder, endlich der Korkstreifen *K* mit einer auf starkes Papier gedruckten, 50 Winkelgrade umfassenden Theilung.

Die beiden Axen $A_1$ und $A_2$ laufen in Spitzen innerhalb einer Gabel, deren Träger *T* durch eine Universalklemme gesteckt ist und nach Lösung nur einer Schraube um jede beliebige Axe gedreht, auch nach oben oder unten verstellt werden kann. Auf diesem Wege wird die grobe Einstellung der Schwellenwage bewerkstelligt, während die feine Einstellung durch die Mutter $M_3$ geschieht.

Da die kuppelnde Uhrfeder den beiden Hebeln, sobald sie einmal auf ihren Axen festgeklemmt sind, eine unveränderliche Neigung gegen einander als Ruhelage anweist, so entspricht jeder Aenderung

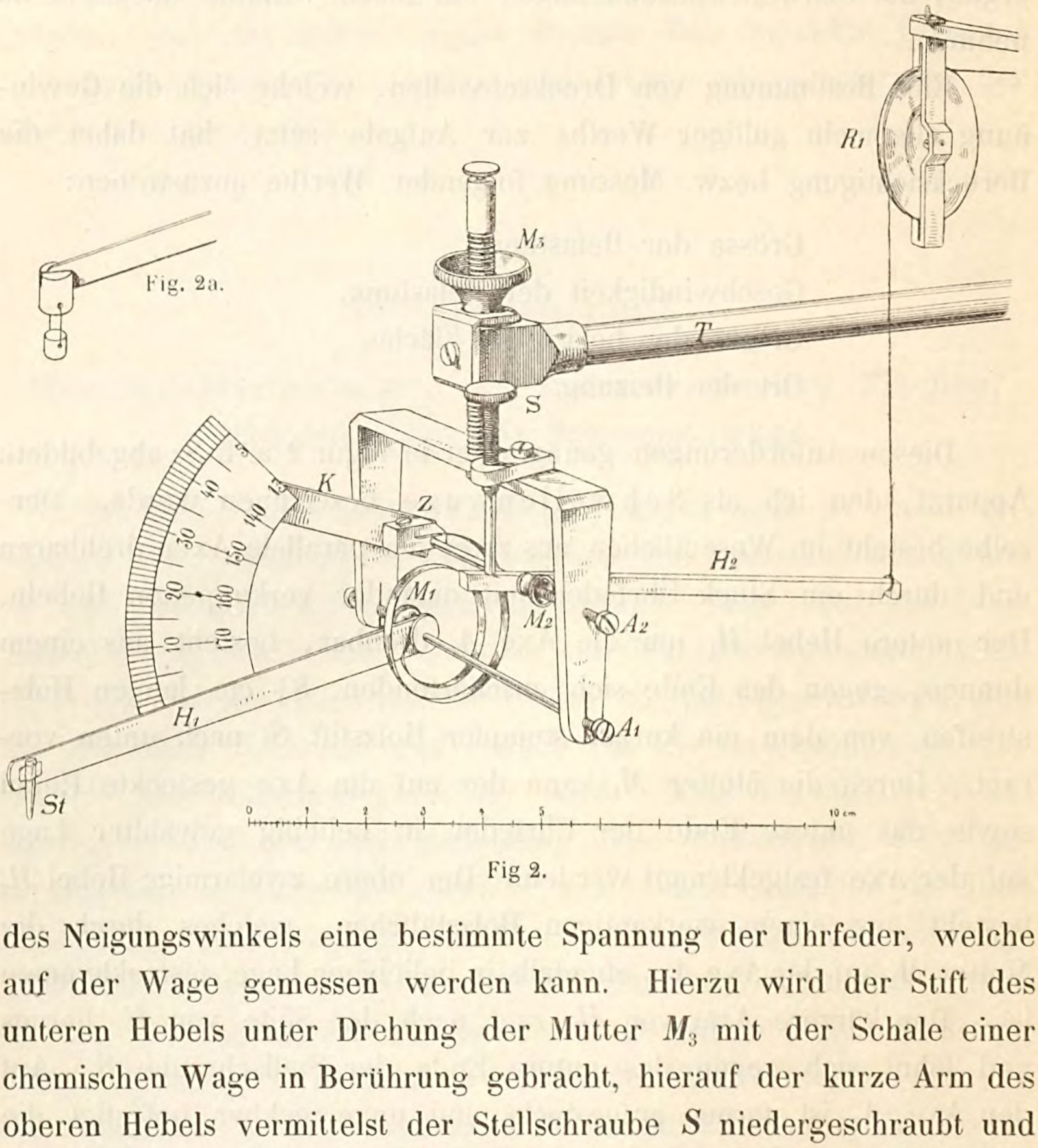


Fig. 2a.

Fig 2.

des Neigungswinkels eine bestimmte Spannung der Uhrfeder, welche auf der Wage gemessen werden kann. Hierzu wird der Stift des unteren Hebels unter Drehung der Mutter $M_3$ mit der Schale einer chemischen Wage in Berührung gebracht, hierauf der kurze Arm des oberen Hebels vermittelst der Stellschraube *S* niedergeschraubt und damit gegen den unteren Hebel um einen abzulesenden Winkelwerth gedreht. Die dem Drehungswinkel entsprechende Spannung der Uhrfeder wird dann ausgewogen. Noch rascher kommt man zum Ziele, wenn man den Winkelwerth eines gegebenen Gewichtes bestimmt. Man stellt hierzu wie früher den unteren Hebel zur Berührung mit der Wagschale ein, legt auf die andere Wagschale das Gewicht, löst die Arretirung und schraubt den kurzen Arm des oberen Hebels unter Drehung von *S* so lange nieder, bis die Zunge der Wage auf Null einspielt.

Die mit der oberen Axe $A_2$ verbundene Kreistheilung ist so orientirt, dass ihr Mittelpunkt in die Axe $A_1$ fällt. Wird der obere Hebel und mit ihm die Kreistheilung gegen den unteren gedreht, so rückt ihr Mittelpunkt aus $A_1$ nach rückwärts heraus. Dies würde natürlich bei grossen Drehungen eine beträchtliche Differenz zwischen dem abgelesenen und dem wirklichen Neigungswinkel beider Hebel zur Folge haben. Bei Drehungen bis zu 20° fallen aber die Abweichungen unter den Werth der Ablesungsfehler und können vernachlässigt werden. Die bei den Versuchen benutzten Drehungen sind in der Regel kleiner als 20°; nur ganz ausnahmsweise wurde dieser Werth erreicht oder um weniges überschritten. Für diese Drehungen ergab die Aichung auf der Wage Spannungen, welche den Winkeln proportional waren.

Dass es zweckmässig ist die Neigung der beiden Hebel gegeneinander und nicht etwa nur die Drehung des oberen Hebels um *seine* Axe zu messen, ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass im ersteren Falle der abgelesene Winkelwerth auch dann ohne weiteres auf den ausgewogenen Spannungswerth bezogen werden darf, wenn der Stift des unteren Hebels in das nachgiebige Gewebe einsinkt.

Zur möglichsten Variation der Spannungen innerhalb des zulässigen Umfanges der Drehungen wurden verschieden starke Uhrfedern in den Apparat eingesetzt. Zu den Versuchen dienten 6 solcher Federn, welche bei Drehungen um bezw. 2.3, 4, 5, 6, 12.5 und 30° die Spannung von 1 g entwickelten.

Die Deformation der Haut wurde bewirkt durch kleine kreisrunde Scheibchen von ausgemessener Fläche, welche entweder aus weissem Carton verschiedener Stärke gestanzt oder aus Korkplatten mit scharfen Korkbohrern geschnitten waren. Zur Verwendung kamen:

Cartonscheiben von 3.5, 8.0, 12.6 und 19.6 mm² Fläche und Gewichten zwischen 1 und 9 Milligramm;

Korkscheiben von 10.7 und 21.2 mm² Fläche und bezw. 9 und 12 Milligramm Gewicht.

Belastung beliebiger Hautstellen mit diesen Scheiben wurde nirgends dauernd empfunden, das Aufsetzen selbst, wenn vorsichtig ausgeführt, blieb ebenfalls unbemerkt. Bei den ersten Versuchen wurde auf die Vermeidung jeder vorgängigen Reizung der zu prüfenden Hautstellen grosse Sorgfalt verwendet. Es wurden daher

ursprünglich nur die Korkscheiben benutzt, und dieselben vermittelst eines dünnsten Seidenfadens an den unteren Hebel gehängt, dessen Ende, wie Figur 2[a] zeigt, statt des Stiftes ein kleines Korkkissen trug. Liess man durch Drehung der Mutter $M_3$ die Schwellenwage herab, so legte sich zuerst die Korkscheibe auf die gewählte Hautstelle, der Seidenfaden erschlaffte und endlich trat das Kissen mit der Scheibe in Berührung, alles ohne die leiseste Empfindung von Seiten des Reagenten. Später stellte sich heraus, dass das Auflegen der Cartonscheiben mit der Pincette und die dabei eventuell auftretende flüchtige Berührungsempfindung für den Erfolg des Versuchs ohne jede Bedeutung war. Es wurden daher zuletzt ausschliesslich die Cartonscheiben gebraucht, welche bei sehr kleiner Fläche noch vollkommen eben und kreisrund herzustellen und leicht auszuwechseln sind, sich der Haut völlig flach anlegen und von den in Betracht kommenden Kräften nicht durchgebogen werden. Auf den Mittelpunkt der in richtiger Weise auf die Haut gelegten Cartonscheibe wurde dann der Stift der Schwellenwage herabgelassen.

Es ist nicht gerathen, die Scheiben an dem unteren Hebel zu befestigen, weil es trotz der sehr freien Verstellbarkeit der Schwellenwage kaum möglich ist, die Scheibe mit der Haut in genügend gleichmässige Berührung zu bringen.

Soweit bis jetzt beschrieben, genügt der Apparat, um den Ort, die Stärke und die Flächenausdehnung des Reizes zu variiren. Um auch die Geschwindigkeit der gesetzten Deformation innerhalb gewisser Grenzen messbar verändern zu können, war die Anordnung getroffen, dass der lange Arm des oberen Hebels $H_2$ Fig. 2 von der Trommel eines BALTZAR'schen Uhrwerkes eine Strecke weit mitgenommen wurde. Die hierzu benutzte einfache Einrichtung ist in Fig. 3 von oben gesehen schematisch dargestellt. *T* ist die Trommel des Uhrwerkes *U*, *D* ein auf dem oberen Rande der Trommel festgeschraubter Daumen, *L* eine aus polirtem hartem Holz gefertigte um die verticale Axe *P* drehbare leichte Leiste, welche von dem Daumen der Trommel ein Stück weit mitgeführt wird. An der Leiste *L* ist der Faden $F_1$ befestigt, welcher zuerst ein Stück horizontal läuft, dann durch die kleine, sehr leicht spielende Rolle $R_2$ nach oben, durch eine gleiche Rolle $R_1$ wieder nach abwärts geführt wird, wo er an den oberen Hebel $H_2$ der Schwellenwage geknüpft

ist. Vgl. auch Fig. 2. Indem also der Daumen *D* die Leiste *L* zur Seite schiebt, zieht der Faden $F_1$ den oberen Hebel der Schwellenwage empor, wodurch die Spitze des unteren Hebels auf die Haut gedrückt wird. Sobald der Daumen die Leiste frei lässt, würde

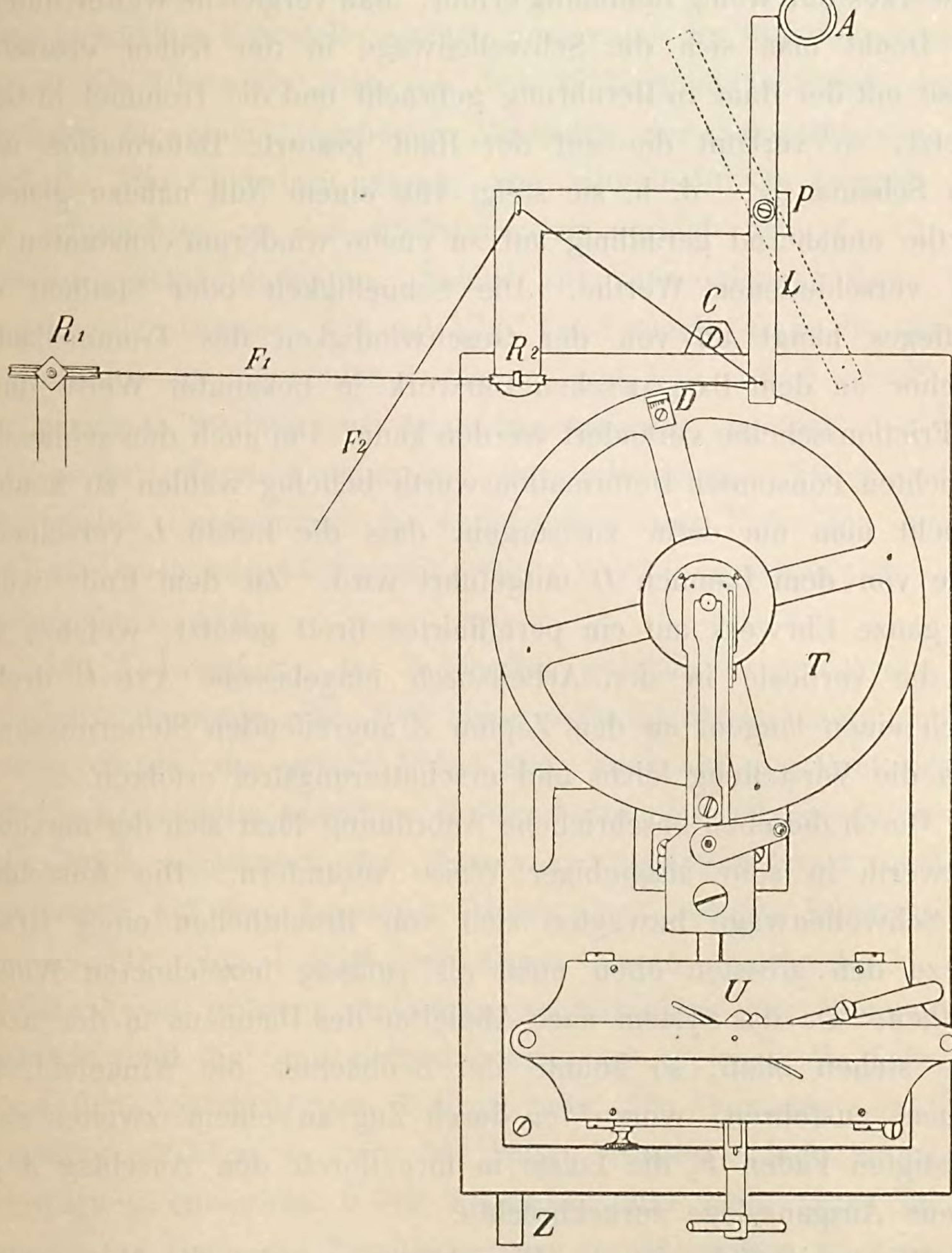



Fig. 3.

durch die gespannte Uhrfeder das System zurückschnellen, gegen die Stellschraube *S* stossen und unter mehr oder minder heftiger Erschütterung zur Ruhe kommen. Um die dabei auftretenden zur Bestimmung von Schwellenwerthen nicht brauchbaren Erregungen

zu vermeiden, wird die als Axe dienende Schraube *P* gerade soviel angezogen, dass die Leiste *L* durch Reibung festgehalten wird. Da in den Versuchen die Spannung der Uhrfeder niemals über 4 oder 5 g hinausging, so genügte zur Verhinderung des Zurückschnellens ein sehr geringer Grad von Reibung, durch welchen der Gang des Uhrwerkes nur wenig Hemmung erfuhr. Man vergleiche weiter unten.

Denkt man sich die Schwellenwage in der früher erörterten Weise mit der Haut in Berührung gebracht und die Trommel in Gang gesetzt, so verläuft die auf der Haut gesetzte Deformation nach dem Schema _/‾ d. h. sie steigt von einem Null nahezu gleichen Werthe annähernd geradlinig auf zu einem wiederum constanten von Null verschiedenen Werthe. Die Schnelligkeit oder Steilheit des Anstieges hängt ab von der Geschwindigkeit des Trommellaufes, welcher an dem BALTZAR'schen Uhrwerk in bekannter Weise durch die Frictionsscheibe verändert werden kann. Um auch den schliesslich erreichten constanten Deformationswerth beliebig wählen zu können, braucht man nur dafür zu sorgen, dass die Leiste *L* verschieden lange von dem Daumen *D* mitgeführt wird. Zu dem Ende wurde das ganze Uhrwerk auf ein paraffinirtes Brett gesetzt, welches sich um die verticale in den Arbeitstisch eingelassene Axe *C* drehte. Durch einen langen, an dem Zapfen *Z* angreifenden Steuerungshebel kann die Verstellung leicht und erschütterungsfrei erfolgen.

Durch die eben beschriebene Anordnung lässt sich der maximale Reizwerth in sehr ausgiebiger Weise verändern. Die Ausschläge der Schwellenwage bewegten sich von Bruchtheilen eines Grades bis zu den grössten oben noch als zulässig bezeichneten Winkelwerthen. Da das System nach Abgleiten des Daumens in der neuen Lage stehen blieb, so konnte der Beobachter die Winkelablesung bequem ausführen, worauf er durch Zug an einem zweiten an *L* befestigten Faden $F_2$ die Leiste in ihre durch den Anschlag *A* gegebene Ausgangslage zurückbrachte.

Wie ersichtlich, ist die Einrichtung nur für die Messung von Belastungsschwellen bestimmt; die Entlastung, welche mit der Hand ausgeführt wurde, ist zwar ihrer Grösse, nicht aber ihrer Geschwindigkeit nach bekannt. Durch eine geeignete Modification liesse sich die Schwellenwage auch für diese Aufgabe einrichten. Da indessen die Wahrnehmung der Entlastung stärkere, deutlich über

der Schwelle liegende Belastungen voraussetzt, die beiden Aufgaben also kaum gleichzeitig in Bearbeitung genommen werden können, die Entlastungsschwellen ausserdem, wie oben angedeutet, in recht verwickelter Weise von dem Reizverfahren abhängen, so ist auf ihre Untersuchung vorläufig verzichtet worden.

Es ist ersichtlich, dass die Schnelligkeit, mit der die Belastung einer gewählten Hautstelle wächst, ausser von der Rotationsgeschwindigkeit des Uhrwerks auch von dem Widerstande abhängt, den die Uhrfeder für einen gegebenen Ausschlag der Schwellenwage entwickelt. Die Uhrfedern waren, wie mitgetheilt, so gewählt, dass die schwächste zu der stärksten sich verhielt wie 1 : 13. Die Rotationsgeschwindigkeiten, welche zur Verwendung kamen, lagen zwischen den Grenzen 4.2 und 37.5° pro Secunde, d. h. die minimale verhielt sich zur maximalen fast genau wie 1 : 9. Man erhielt daher die geringste Steilheit des Spannungsanstieges, nämlich den Werth 0.14 gr/sec. durch Combination der schwächsten Feder mit der langsamsten Umdrehung; im entgegengesetzten Falle den höchsten Steilheitswerth von 16.3 gr/sec. Diese Werthe verhalten sich zu einander wie 1 : 116.

Die Auswerthung der Steilheiten geschah in der Weise, dass die Schwellenwage wie bei einer Schwellenbestimmung in Gang gesetzt wurde, der untere Hebel aber nicht auf der Haut, sondern auf einer Glasplatte aufruhte, während der obere Hebel durch einen Schreibstift verlängert die ihm vom Trommeluhrwerk ertheilten Drehungen auf dem berussten Papier eines zweiten Kymographions verzeichnete. Fig. 4 zeigt drei solcher Curven, welche der kleinsten, mittleren und grössten Rotationsgeschwindigkeit der Trommel entsprechen und die Steilheiten angeben, mit welchen die Schwellenwage den Ausschlag von 7 Grad oder die Spannung von 0.56 g (Uhrfeder 12.5 °/g) in den drei Fällen erreicht. Jede Stimmgabelschwingung entspricht 0.018 Secunde. Man sieht, dass bei dem langsamsten Gang die Trommel etwas zurückgehalten wird und erst nach 0.8 Sec. (oder einem Ausschlag von 2.9°) mit constanter Geschwindigkeit weiter geht. Anderseits vollführt die Schwellenwage bei der grössten Geschwindigkeit kleine Eigenschwingungen, welche den anfänglichen Anstieg nicht streng geradlinig machen und eine kleine Ueberschreitung der endlichen Gleichgewichtslage um nicht

ganz einen halben Grad bedingen. Daraus folgt, dass für diese extremen Geschwindigkeiten kleine Ausschläge zu vermeiden sind, bezw. dass die minimalen und maximalen Belastungssteilheiten besser

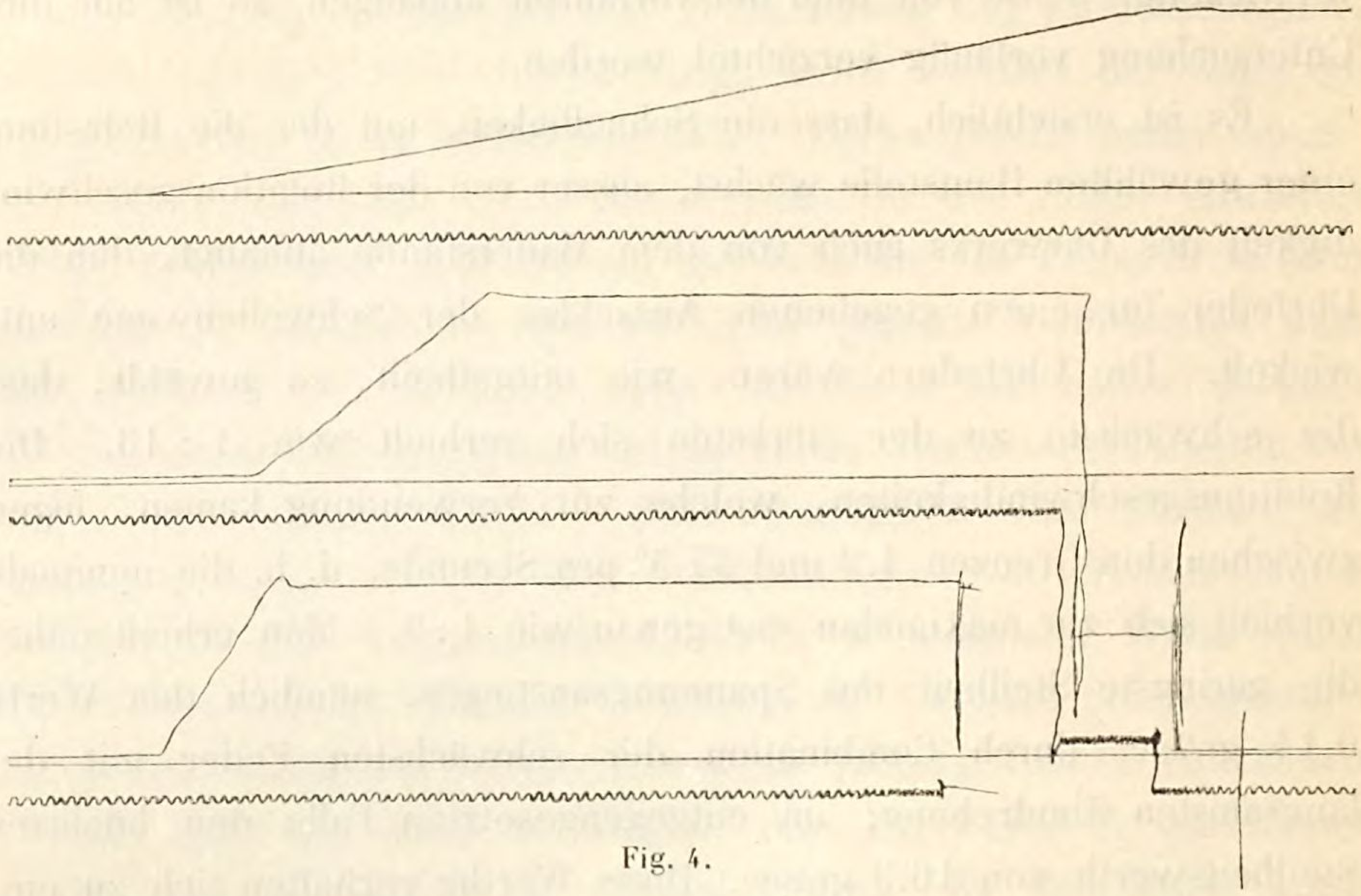


Fig. 4.

Die Curven, insbesondere die der Stimmgabel sind mangelhaft nachgezeichnet.

durch Wahl geeigneter Uhrfedern als durch die extremen Rotationsgeschwindigkeiten des Uhrwerks erzielt werden.

Den mit der beschriebenen Schwellenwage auszuführenden Versuchen waren drei Aufgaben gestellt. Es sollte bestimmt werden die Abhängigkeit der Belastungsschwelle

1. von der Spannungssteilheit,
2. von der Grösse der getroffenen Hautfläche,
3. von der gereizten Oertlichkeit.

Die Versuche wurden sämmtlich an der Vola manus sowie an der Beugeseite des Handgelenks, d. h. an unbehaarten Körperstellen ausgeführt. Die Beschränkung auf die genannten Gebiete hat sich für's erste als nothwendig herausgestellt, weil durch die Anwesenheit der Haare, selbst wenn sie rasirt sind, ganz uncontrollirbare Fehlerquellen in die Versuchsanordnung eingehen. Aus später zu erwähnenden Beobachtungen ist indessen der Schluss berechtigt, dass die für die Hand gefundenen Sätze im Wesentlichen auch für die behaarten Körperflächen gelten.

Was die sonstige Technik der Versuche betrifft, so versteht es sich von selbst, dass für bequeme Haltung des Reagirenden und Fixirung des Arms in der Gypsform Sorge getragen wurde. Ermüdung kann sich bei den Versuchen in doppelter Weise störend bemerklich machen: Erstens kann durch häufige Wiederholung des Reizes an einer Stelle deren Empfindlichkeit abgestumpft und ein Steigen der Schwellenwerthe veranlasst werden. Für die beschriebene Versuchsanordnung mit nur einmaliger minimaler Reizung während eines Trommelumganges, d. h. mit Intervallen von längstens 67 und kürzestens 7.5 Secunden, kommt diese Gefahr wohl kaum in Betracht. Richtig angestellte Versuche zeigen sogar unter diesen Bedingungen häufig eine Abnahme des Schwellenwerthes im Laufe des Versuchs, wovon unten noch die Rede sein wird. Viel gefährlicher ist die Ermüdung, welche aus der Anspannung der Aufmerksamkeit und der erzwungenen Körperhaltung entsteht. Wie bequem man letztere auch zu Anfang finden mag, und wie sicher der Arm durch die Gypsform fixirt erscheint, so entsteht doch bald aus der erzwungenen Lage ein wachsendes Unbehagen, im Arme stellen sich spannende und kriebelnde Gefühle ein und es bedarf immer grösserer Willensanstrengung, um die Ruhe aufrecht zu erhalten. Ist es einmal so weit, so ist eine Fortsetzung des Versuchs völlig zwecklos. Die subjectiven Empfindungen von Seiten der Haut fesseln die Aufmerksamkeit, es kommt zu Verwechslungen mit dem künstlich gesetzten Reiz und die Angaben werden schwankend und unsicher. Hier hilft nur Unterbrechung des Versuchs bezw. Wechsel der Rollen zwischen Reagent und Beobachter. Es ergibt sich daraus die Regel, den einzelnen Versuch nicht lange auszudehnen und für die Schwellenbestimmung ein rasch förderndes Verfahren zu wählen. Es empfiehlt sich daher, den gesuchten Werth durch Annäherung von beiden Seiten her einzuengen, d. h. durch alternirende Verwendung unter- und überschwelliger Reize. Unnöthige Anspannung der Aufmerksamkeit wurde dadurch vermieden, dass der Reagent kurz vor dem Einsetzen des Reizes durch ein »Jetzt« benachrichtigt, bei sehr langsamer Drehung der Trommel durch die Ankündigungen »halbe«, »dreiviertel« auch von dem Ablauf der Pause unterrichtet wurde. Sonstige Störungen, Unruhe im Versuchsraum, Anwesenheit dritter Personen u. s. w. sind möglichst fern zu halten, wenn zuverlässige Resultate erhalten werden

sollen. Einige weitere Vorsichtsmassregeln, die zu berücksichtigen sind, können erst bei der Mittheilung der Resultate besprochen werden. Die Versuche sind vorläufig nur soweit durchgeführt worden, als zur Feststellung der wesentlichen Bedingungen und Ergebnisse nöthig erschien. Ausführlichere Versuchsreihen werden durch Herrn Dr. KIESOW an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

### 1. Die Abhängigkeit der Belastungsschwelle von der Belastungsgeschwindigkeit.

Zur Feststellung dieser Abhängigkeit wurden bei unveränderter Grösse und Lage der drückenden Fläche für eine Stufenfolge von Geschwindigkeiten die Belastungen bezw. die Spannungen der Schwellenwage gesucht, welche eben bemerkt wurden. Die Belastungsschwelle nimmt stets mit wachsender Steilheit ab; die nähere Form der Abhängigkeit wird am besten aus einer graphischen Darstellung einiger

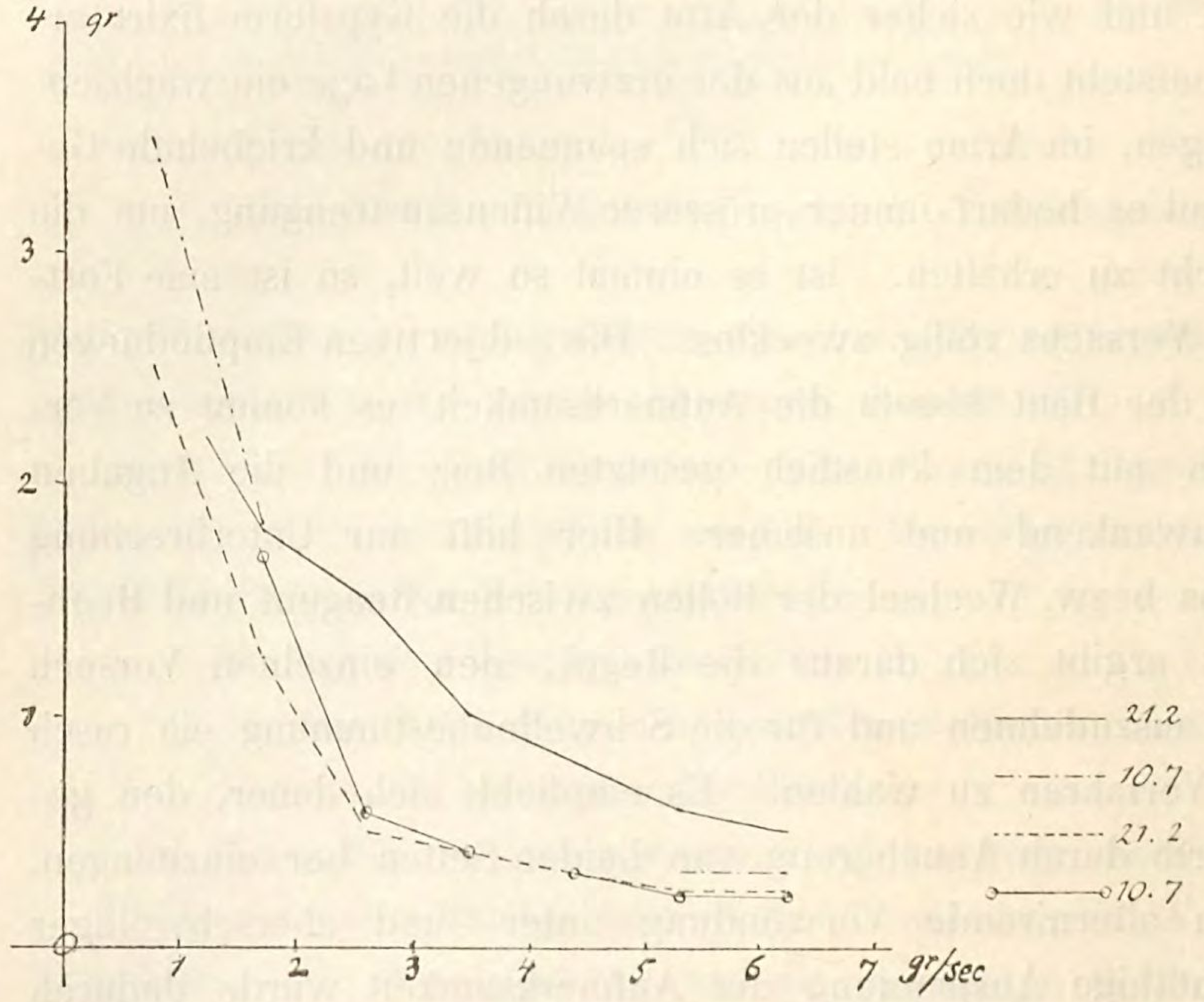



Fig. 5.

Versuchsergebnisse zu erkennen sein, wie es in Fig. 5 für die Versuche vom 22., 25., und 26. Januar 96 geschehen ist. In derselben bedeuten die Abscissen Belastungs- oder Spannungsgeschwindigkeiten, die Ordinaten Schwellenwerthe in Gewichten. Die zugehörigen Zahlen sind:

| Belastungs-Geschwindigkeit in gr/sec. | Belastungsschwellen | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 21.2 mm² K 22. I. 96 | 10.7 mm² K 25. I. 96 | 21.2 mm² K 25. I. 96 | 10.7 mm² K 26. I. 96 |
| 0.75 | | 3.50 | 2.50 | |
| 1.2 | 2.2 | | | |
| 1.7 | 1.8 | 1.83 | 1.25 | 1.67 |
| 2.6 | 1.5 | | 0.50 | 0.58 |
| 3.5 | 1.0 | | 0.41 | 0.41 |
| 4.4 | 0.8 | | 0.33 | 0.33 |
| 5.3 | 0.6 | 0.33 | 0.25 | 0.23 |
| 6.25 | 0.5 | 0.33 | 0.25 | 0.23 |

Der erste und dritte Versuch beziehen sich auf eine Fläche von 21,2 $mm^2$, der zweite und vierte auf eine Fläche von 10,7 $mm^2$; alle auf dem Daumenballen der linken Hand des Reagenten K.

Die Figur lässt erkennen, dass die Curven das Bestreben haben, sich für sehr kleine Werthe der Belastungsgeschwindigkeit der Ordinatenaxe, für grosse Werthe einer der Abscissenaxe parallelen Linie asymptotisch zu nähern. Wächst also die Belastung von Null ausgehend sehr langsam an, so tritt die Druckempfindung erst bei grossen Gewichten ein. Man kann auch sagen, dass man sich bei sehr langsamer Belastungszunahme in grosse Gewichte einschleichen kann. Anderseits ist nicht zu verkennen, dass Belastungsgeschwindigkeiten, welche den Werth 5 gr/sec. übersteigen, nur wenig an Wirksamkeit gewinnen, so dass es z. B. in den Versuchen 25. I und und 26. I keinen deutlichen Unterschied macht, ob das zur Auslösung der Empfindung nöthige Gewicht von $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{3}$ gr in $\frac{1}{20}$ oder in $\frac{1}{25}$ Sec. erreicht wird. Nennt man, wie es von v. KRIES (17) für constante Ströme vorschlägt, Reize, welche den Schwellenwerth in verschwindend kurzer Zeit erreichen, Momentanreize, alle übrigen Zeitreize, so würde hier bei einer Geschwindigkeit von 5 gr/sec. nahezu die Grenze erreicht sein, von welcher ab die Zeitreize merklich gleiche Wirksamkeit haben, wie die Momentanreize. Das Interesse, welches sich an die Bestimmung dieser Grenze knüpft, beruht auf dem Umstande, dass, wie v. KRIES hervorhebt, sie eine Aussage darstellt über die Beweglichkeit des reizbaren Apparates.

Vielleicht noch anschaulicher als aus Fig. 5 erhellt die Bedeutung der Belastungsgeschwindigkeit für die Belastungsschwelle aus

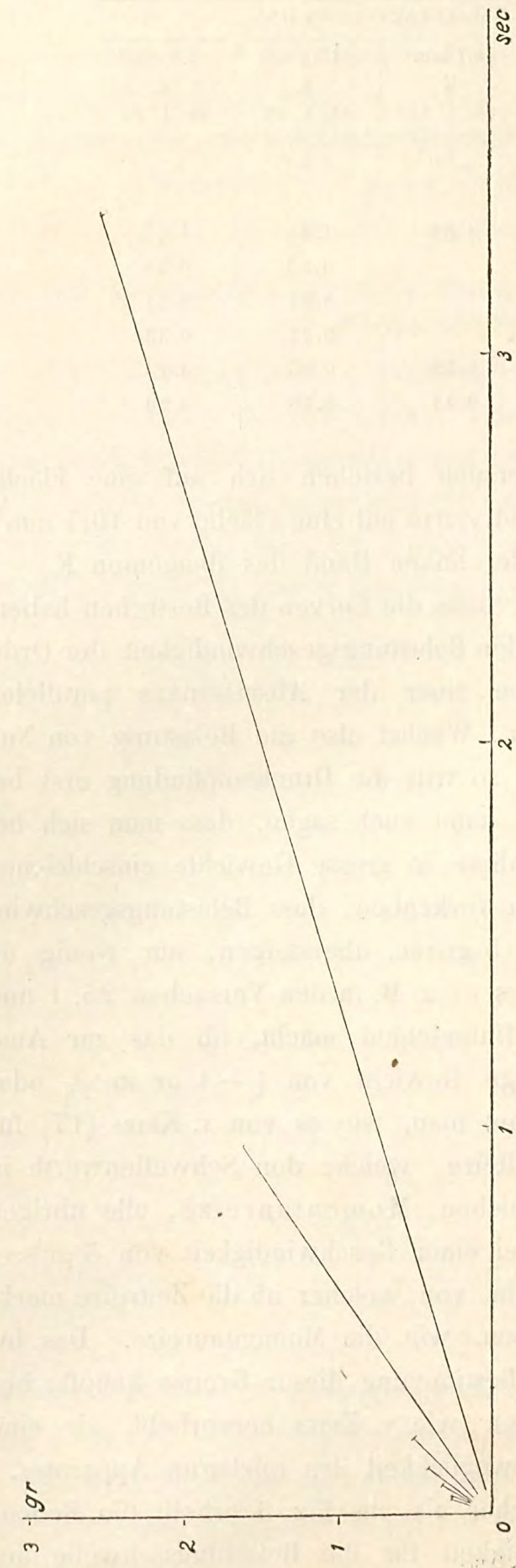



Fig. 6.

einer anderen Darstellung der Ergebnisse des dritten Versuchs, wie sie in Fig. 6 gewählt ist. In derselben stellen die Abscissen Zeiten, die Ordinaten Gewichte dar. Betrachtet man die am weitesten nach rechts gelegene Marke mit den Coordinaten 3.34 Sec. und 2.5 g, so bedeutet dieselbe, dass Empfindung erst bei 2.5 g eintritt (Daumenballen, 21.2 mm$^2$ Fläche), wenn die Belastung von Null geradlinig ansteigend 3.34 Sec. braucht, um den genannten Werth zu erreichen. Verbindet man die Marke durch eine gerade Linie mit dem Anfangspunkt des Coordinatensystems, so stellt dieselbe für die gewählten Maasseinheiten unmittelbar die Belastungsgeschwindigkeit dar. Trägt man auch die übrigen in dem betreffenden Versuch verwendeten Belastungsgeschwindigkeiten als gegen die Coordinatenaxen verschieden geneigte Gerade ein, zieht sie aber von $O$ nur so lange aus, bis der zugehörige Schwel-

lenwerth der Belastung erreicht ist, so ist die stärker erregende Wirkung steiler Reize sehr deutlich zu zu erkennen.

**2. Abhängigkeit der Belastungsschwelle von der Reizfläche.**

Legt man bei constanter Belastungsgeschwindigkeit die Carton- oder Korkscheiben verschiedener Fläche derart auf die Haut, dass stets derselbe empfindlichste Punkt (siehe unten) vom Reiz getroffen wird, so bedarf es zur Auslösung einer Empfindung für die grosse Fläche eines grösseren Gewichtes. Die Abhängigkeit des Schwellengewichtes von der Reizfläche ist aber keine einfache; sie zeigt sich nämlich selbst wieder beeinflusst durch die gewählte Belastungsgeschwindigkeit. Es ist zweckmässig, hier zwei Fälle zu unterscheiden.

A. Bei kleiner Belastungsgeschwindigkeit wachsen die Schwellengewichte rascher als die Flächen, z. B.

| Datum | Reagent | Belastungsgeschwindigkeit | Reizfläche | Schwellengewicht | Ort |
|---|---|---|---|---|---|
| 20. I. 96 | F | 1.2 gr/sec. | 10.7 mm² | 0.83 g | Daumenballen |
| | | | 21.2 „ | 2.83 „ | „ |
| 22. I. 96 | K | 1.7 „ | 10.7 „ | 0.67 „ | „ |
| | | | 21.2 „ | 1.83 „ | „ |
| | | 2.6 „ | 10.7 „ | 0.58 „ | „ |
| | | | 21.2 „ | 1.50 „ | „ |
| 24. I. 96 | F | 1.7 „ | 10.7 „ | 0.17 „ | „ |
| | | | 21.2 „ | 0.54 „ | „ |
| 20. IV. 96 | F | 4.3 „ | 10.7 „ | 0.54 „ | Beere des Ringfingers |
| | | | 21.2 „ | 1.96 „ | |

B. Bei grosser Belastungsgeschwindigkeit sind die Schwellenwerthe annähernd proportional den Flächen.

| Versuch | Reagent | Belastungsgeschwindigkeit | Fläche | Schwellengewicht | Ort der Reizung |
|---|---|---|---|---|---|
| 16. I. | K | 11 gr/sec. | 10.7 mm² | 0.9 g | Handgelenk |
| | | | 21.2 „ | 2.1 „ | „ |
| 20. I. | F | 6.25 „ | 10.7 „ | 2.0 „ | Handgelenk |
| | | | 21.2 „ | 4.0 „ | „ |
| 22. I. | K | 6.25 „ | 10.7 „ | 0.3 „ | Daumenballen |
| | | | 21.2 „ | 0.5 „ | „ |
| 28.. I | F | 6.25 „ | 10.7 „ | 0.25 „ | Handgelenk |
| | | | 21.2 „ | 0.50 „ | „ |

Zu diesen Angaben muss bemerkt werden, dass unter Belastungsgeschwindigkeit die pro Secunde zuwachsenden Gewichts- oder Kraftwerthe gemeint sind ohne Rücksicht auf die belastete Fläche. Bezeichnet man, wie in der Hydrostatik, die auf die Flächeneinheit wirkende Kraft als Druck, so erhält man die der Flächeneinheit pro Secunde zuwachsenden Gewichte oder die Druckgeschwindigkeit, indem man die Belastungsgeschwindigkeit durch die Fläche dividirt. Lässt man die Schwellenwage mit stets gleicher Spannungs- oder Belastungsgeschwindigkeit wirken auf Hautflächen, welche sich in Bezug auf ihre Grösse zu einander verhalten wie 1 : 2, so ist die Druckgeschwindigkeit für die kleinere Fläche doppelt so gross wie für die grössere. Hat z. B. die Belastungsgeschwindigkeit den Werth 2 gr/sec., so beträgt die Druckgeschwindigkeit für eine Fläche von 10 $mm^2$ 0.2 $gr/mm^2sec.$, für eine Fläche von 20 $mm^2$ 0.1 $gr/mm^2sec.$

Die Verschiedenheit zwischen den unter A. und B. angeführten Ergebnissen könnte nun sehr wohl davon herrühren, dass der mit der Aenderung der Fläche einhergehende Wechsel der Druckgeschwindigkeit die Grösse des Schwellengewichtes mit bestimmt.

Fasst man zunächst die unter B. verzeichneten Versuche in's Auge, so handelt es sich um Belastungsgeschwindigkeiten, für welche wie oben nachgewiesen wurde, ein Unterschied gegenüber Momentanreizen kaum noch besteht. Unter diesen Umständen kann dem Wechsel der Druckgeschwindigkeit kein wesentlicher Einfluss auf das Resultat mehr zukommen und es müssen die Versuche B. den Einfluss der Fläche auf die Reizschwelle klarer erkennen lassen als die Versuche A. Die Versuche B. ergeben aber annähernde Gleichheit solcher Reize, bei welchem die Gewichte proportional den Flächen wachsen, oder welche gleich sind in Bezug auf ihren Druckwerth im hydrostatischen Sinne.

Legt man die erwähnte Auffassung zu Grunde, so eröffnet sich die Möglichkeit einer Prüfung auch bei den Versuchen A. mit geringer Belastungsgeschwindigkeit. Wählt man nämlich für jede Fläche eine ihr proportionale Belastungsgeschwindigkeit, so dass die auf die Haut wirkende Druckgeschwindigkeit constant bleibt, so müssen die Reizschwellen den Flächen proportional gefunden werden. Die in dieser Richtung unternommenen Versuche ergaben:

C. Bei constanter Druckgeschwindigkeit sind die Reizschwellen den Reizflächen annähernd proportional.

Versuch 17. VI. 96, Reagent F. Handgelenk, Flächen 3.5 und 8 $mm^2$ mit den proportionalen Belastungsgeschwindigkeiten 2.1 und 4.76 gr/sec.

| Fläche | Schwellengewicht | Aussagen des Reagenten |
|---|---|---|
| 8 $mm^2$ | 0.40 g | wird eben erkannt |
| 3.5 „ | 0.16 „ | „ |
| 8 „ | 0.36 „ | »vielleicht eine Spur« oder »nein« |
| | 0.40 „ | wird nicht jedesmal gefühlt |
| | über 0.40 „ | regelmässig »ja«, wenn auch »sehr schwach« |
| 3.5 „ | 0.16 „ | wird eben erkannt |
| 8 „ | 0.32 „ | »mag sein«, »ich glaube noch eine Spur«, »vielleicht eben eine Andeutung« |
| | 0.36 „ | »eben noch«, »ganz schwach«, »ja wohl ganz leise« |
| | 0.40 „ | »ja«, »ja schwach«, »ja«. |

Versuch 17. VI. 96, Reagent F. Handgelenk andere Stelle. Flächen und proportionale Belastungsgeschwindigkeiten wie oben.

| Fläche | Schwellengewicht | Aussagen des Reagenten |
|---|---|---|
| 8 $mm^2$ | 1.92 g | werden gefühlt und absteigend bis 1.6 g. Von 1.44 g aufsteigend tritt erst bei 1.84 bis 1.92 Empfindung auf |
| 3.5 „ | 0.8 „ | »vielleicht eine Spur« |
| | 0.88 „ | »ja« |
| 8 „ | 1.52 „ | »vielleicht eine Spur« |
| | 1.60 „ | »ganz schwach« |
| | 1.68 „ | »ja«. |

Versuch 19. VI. 96, Reagent F. Handgelenk, dritte Stelle, sonst wie oben.

| Fläche | Schwellengewicht | |
|---|---|---|
| 3.5 $mm^2$ | 0.72 g | Hier trat durch Einübung auf die anfangs schwer zu erkennende Erregung eine Erniedrigung der Schwelle auf. |
| 8 „ | 1.44 „ | |
| 3.5 „ | 0.56 „ | |
| 8 „ | 1.20 „ | |

Wird Ermüdung ausgeschlossen, so sinken im Allgemeinen die Schwellenwerthe im Laufe eines längeren Versuchs, weil der Reagent sich auf die zu erkennende, stets sehr schwache Empfindung einübt.

Die Ergebnisse stimmen mit der oben ausgesprochenen Vermuthung so gut überein, als bei der nicht unerheblichen Schwierigkeit der Versuche erwartet werden kann. Daraus folgt aber mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass die Erregung eine Function

des von dem Reize gesetzten hydrostatischen Druckes ist, bezw. der Geschwindigkeit, mit welcher derselbe ansteigt. Legt man in dem Worte Drucksinn der Silbe Druck die eben ausgesprochene Bedeutung bei, so bezeichnet sie in ganz treffender Weise die Reizqualität, welche für diesen Sinn adäquat ist.

Die mitgetheilten Versuche erweisen die bezeichnete Abhängigkeit nur für Schwellenreize, doch ist kaum zu zweifeln, dass sie auch für überschwellige Reize besteht. Eine Ausdehnung der Versuche in dieser Richtung stellen sich eigenthümliche Schwierigkeiten in den Weg, auf welche noch zu verweisen sein wird.

Ferner ist zu beachten, dass der ausgesprochene Satz zunächst nur für die hier gebrauchten Flächen zwischen 3.5 und 21.2 $mm^2$ zu Recht besteht und für andere Flächen erst zu erweisen ist. In der That zeigt sich, dass bei Ueberschreitung dieser Grenzen, nach unten sowohl wie nach oben, früher oder später abweichende Verhältnisse Platz greifen, deren Besprechung aber ebenfalls auf später verschoben werden muss.

Die Abhängigkeit der Erregung des Drucksinns von dem hydrostatischen Druck des Reizes bezw. seiner ersten Ableitung nach der Zeit lässt erkennen, dass bei der Vergleichung verschiedener Reizflächen nur dann zuverlässige Ergebnisse zu erwarten sind, wenn die Reizflächen stets in voller Ausdehnung und gleichmässig der Haut anliegen. Wählt man als Druckkörper ebene Carton- oder Korkscheiben, so muss auch die zu reizende Hautstelle eben, weder nach aussen noch nach innen gewölbt sein. Wenn diese Bedingung auch nirgends streng zu erfüllen sein wird, so kann doch eine genügende Annäherung um so eher erreicht werden, je kleiner man die Reizflächen wählt. Dies der Grund, warum in den mitgetheilten Versuchen grössere Flächen als 21.2 $mm^2$ nicht zur Verwendung kamen, vielfach sogar mit erheblich kleineren Flächen operirt wurde.

Aber selbst bei allseitiger Berührung der Reizfläche mit der Haut ist eine ungleichmässige Wirkung noch immer dann gegeben, wenn der Stift der Schwellenwage nicht auf den Mittelpunkt der Fläche wirkt. Es wird dann eine Kante der Scheibe stärker in die Haut gedrückt und die Beziehung der gefundenen Reizschwelle auf die Reizfläche ist illusorisch.

Eine weitere und sehr wichtige Fehlerquelle liegt in der bisher

stillschweigend gemachten Annahme, dass die Empfindlichkeit der Haut innerhalb der einzelnen Körperabschnitte merklich constant und nirgends sprungartig wechselnd sei. Diese Annahme ist aber nicht richtig. Wie unten zu zeigen sein wird, kann die Empfindlichkeit selbst innerhalb kleiner Flächen, z. B. innerhalb eines Quadratcentimeters, eine sehr verschiedene und für Schwellenreize sogar eine sprungartig wechselnde sein. Wie es gelingt, die für Schwellenbestimmungen daraus entstehenden Schwierigkeiten zu überwinden, wird sofort zu besprechen sein.

### 3. Abhängigkeit der Druckschwelle von dem Orte.

Der Vergleich verschiedener Hautstellen in Bezug auf ihre

| Datum | Reagent | Ort | Fläche mm² | Belastungsgeschwindigkeit gr/sec. | Belastungsschwelle g | Druckschwelle mgr/mm² |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20. I. | K | Handgelenk Volarseite | 21.2 | 1.7 | 0.5 | 24 |
| " | " | " | " | " | 0.8 | 38 |
| 20. I. | " | Daumenballen | " | " | > 4.0 | > 189 |
| 22. I. | " | " | " | " | 1.8 | 85 |
| 25. I. | " | " | " | " | 1.25 | 59 |
| 26. I. | " | " | " | " | 0.83 | 39 |
| 20. I. | F | Handgelenk Volarseite | " | " | > 5.0 | > 236 |
| 28. I. | " | " | " | " | 1.17 | 55 |
| 24. I. | " | Daumenballen | " | " | 0.5 | 24 |
| " | " | " | " | " | 0.6 | 28 |
| 26. I. | " | " | " | " | 1.0 | 47 |
| 30.IV. | " | " | 3.5 | 3.0 | 0.24 | 70 |
| " | " | " | " | " | 0.28 | 80 |
| " | " | " | " | " | 0.40 | 114 |
| " | " | " | " | " | 0.16 | 45 |
| " | " | " | " | " | 0.16 | 45 |
| " | " | " | " | " | 0.48 | 140 |
| " | " | " | " | " | 0.72 | 200 |
| 14. V. | " | Fingerbeere | " | " | 0.10 | 28 |
| " | " | " | " | " | 0.40 | 114 |
| " | " | " | " | " | 0.48 | 137 |
| " | " | " | " | " | 0.60 | 170 |
| " | " | " | " | " | 0.10 | 28 |
| " | " | Handgelenk Volarseite | " | " | 0.10 | 28 |
| " | " | " | " | " | 2.24 | 640 |
| " | " | " | " | " | 1.12 | 320 |

Empfindlichkeit gegen Deformation ist nur möglich, wenn stets gleiche Flächen mit gleichen Belastungsgeschwindigkeiten gereizt oder verschiedene Flächen durch Combination mit proportionalen Belastungsgeschwindigkeiten gleichen Druckgeschwindigkeiten ausgesetzt werden. Aus den mir zur Verfügung stehenden Versuchsdaten lassen sich vorstehende nach dem ersten Verfahren gruppirte Zahlen zusammenstellen.

Aus diesen wenigen Zahlen geht bereits das eine mit Sicherheit hervor, dass die Schwellenwerthe selbst innerhalb eines im anatomischen Sinne einheitlichen Hautgebietes sehr beträchtliche Schwankungen aufweisen, so z. B. auf der Fingerbeere im Verhältniss von 1 : 6. Noch grösser sind die Verschiedenheiten auf der Volarseite des Handgelenks, doch können auch hier neben sehr hohen, sehr niedrige, den tiefsten Schwellen an der Fingerbeere gleiche Schwellen gefunden werden. Es ist ferner sehr leicht zu zeigen, dass mit Verkleinerung der Fläche die Schwankungen zunehmen, was ebenfalls aus vorstehender Tabelle abgelesen werden kann, wenn man die Werthe für Daumenballen oder Handgelenk bei Anwendung einmal der grossen (21.2 $mm^2$), das andere Mal der kleinen Fläche (3.5 $mm^2$) vergleicht.

Es weist dies alles darauf hin, dass die Bestimmung von Druckschwellen von der hier gebrauchten Grösse beeinflusst wird durch die Dichte und Empfindlichkeit jener Orte niedrigster mechanischer Reizschwelle, welche von Blix (3) zuerst als die Druckpunkte der Haut bezeichnet wurden.

Da die Eigenthümlichkeiten dieser Punkte noch genauer zu untersuchen sein werden, so sei hier nur bemerkt, dass es sich, wie schon Blix angab und Goldscheider (11) und ich (I, II) bestätigen konnten, um ganz unverrückbar auf oder in der Haut gelegene, stets wieder auffindbare, wenn auch in ihrer Erregbarkeit veränderliche Orte handelt. Mit Hülfe der unten zu beschreibenden Methode der Reizhaare, welche eine sehr umschriebene und abstufbare mechanische Reizung gestattet, lässt sich ihre Zahl, Lage und relative Empfindlichkeit mit genügender Genauigkeit messen, so dass ein Vergleich mit den bisher beschriebenen Schwellenbestimmungen möglich ist. Bezeichnet man die mittelst der Reizhaare bestimmten Schwellen der Druckpunkte als Punktschwellen, dagegen als Flächen-

schwellen die mit der Schwellenwage gewonnenen Werthe, so ergeben sich folgende Beziehungen:

1. Niedrigste Flächenschwellen finden sich stets dort, wo die reizende Fläche einen Ort niedrigster Punktschwelle bedeckt.

2. Je kleiner die reizende Fläche oder je grösser der Abstand der Druckpunkte von einander, desto leichter kann die reizende Fläche in Lücken zwischen Druckpunkten zu liegen kommen, wobei auffallend hohe Flächenschwellen zur Beobachtung kommen.

3. Beim Vergleich von Flächenschwellen verschiedener Fläche können verwerthbare Resultate nur dann erhalten werden, wenn sämmtliche zu vergleichenden Flächen denselben oder dieselben Orte niedrigster Punktschwelle bedecken.

Es ist schon oben S. 36 erwähnt worden, dass die in kleinen Abständen stark wechselnde Druckempfindlichkeit der Haut eine ernsthafte Schwierigkeit bildet für Versuche, welche sich die Bestimmung von Flächenschwellen verschieden grosser Hautflächen zur Aufgabe setzen. Bedeute in nebenstehender Figur 7 der äussere Kreis die Umgrenzung einer grösseren, der innere die Umgrenzung einer kleineren Hautstelle, welche abwechselnd durch Belastungen gereizt werden, und besitzen beide Kreise in *a* einen Ort, dessen Punktschwelle tiefer liegt als die von *b*, so ergiebt der Versuch, gleiche Druckgeschwindigkeit vorausgesetzt, die unter C. besprochene Abhängigkeit der eben merklichen Belastung von der getroffenen Fläche. Ist dagegen die Punktschwelle von *b* tiefer als die von *a*, so werden die eben merklichen Gewichte nicht mehr proportional den Flächen sein, sondern die grössere Fläche wird bei relativ oder selbst absolut kleinerer Belastung wirksam werden. Daraus folgt, dass sich eindeutige Resultate nur dann erzielen lassen, wenn auf die Lage und relative Empfindlichkeit der Druckpunkte Rücksicht genommen wird. Es ist daher vor Ausführung der oben beschriebenen Versuche mit der Schwellenwage die gewählte Hautstelle stets erst daraufhin untersucht und die Reizfläche so aufgelegt worden, dass sie einen Punkt grosser Empfindlichkeit und daneben nur noch wenig empfindliche Druckpunkte bedeckte. Der auf Seite 35 beschriebene Versuch vom 19. VI. 1896 betrifft einen isolirten Druckpunkt.

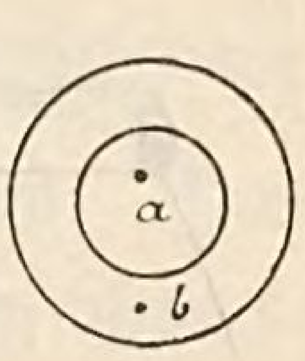


Fig. 7.

## Dritter Abschnitt.

## Ueber den Gebrauch von Reizhaaren.

Es ist ersichtlich, dass die mit der Schwellenwage ausgeführten Bestimmungen stets abhängig sein werden von der Zahl und Empfindlichkeit der Druckpunkte, welche bei dem Versuch getroffen werden. Um diese Zufälligkeit auszuschliessen und schärfere Angaben machen zu können über das, was man die Feinheit des Drucksinns oder die Druckempfindlichkeit einer Hautstelle genannt hat, erscheint es daher vor allem geboten, die Schwellenbestimmungen für die einzelnen Druckpunkte durchzuführen.

Hierzu eignen sich die von mir beschriebenen Reizhaare, kurze Stücke von Haaren mit leicht schmelzendem Kitt in rechtem Winkel an das Ende eines Holzstäbchens geklebt, welches als Handhabe dient, Fig. 8. Ich gebrauche vierkantige Stäbchen aus Erlenholz von 4 mm Seite und 80 mm Länge. Die Haare müssen schlicht d. h. nicht gekräuselt sein. Am besten sind Kopfhaare

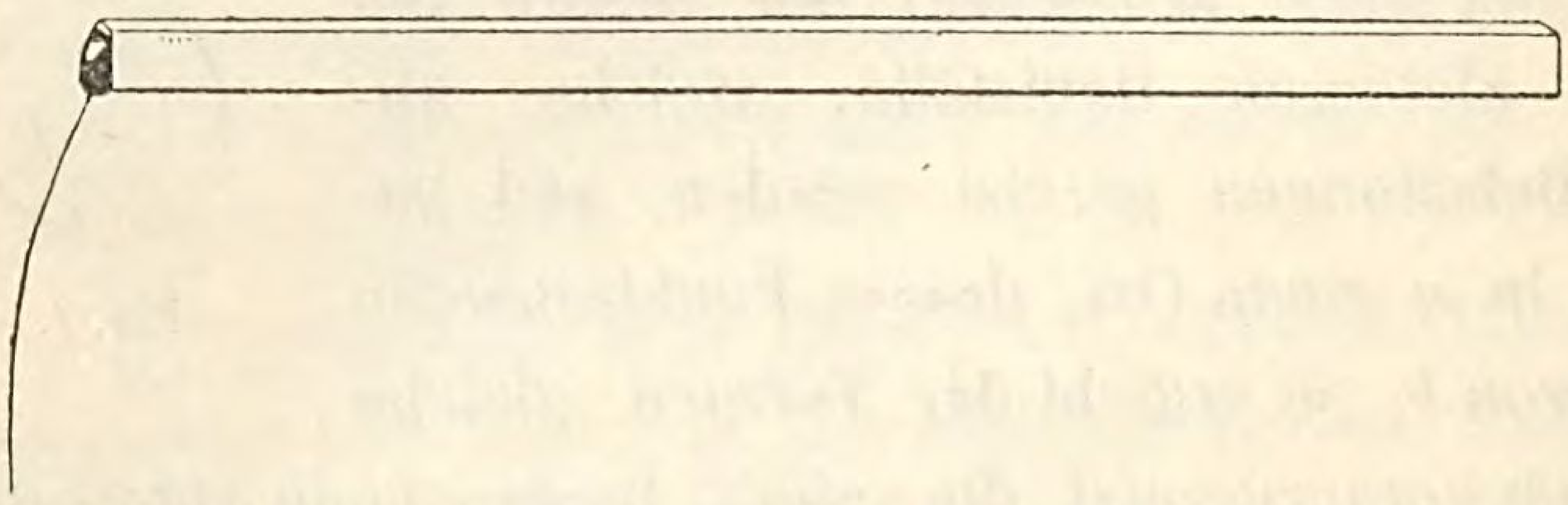


Fig. 8.

mit mittleren Durchmessern von 40—100 $\mu$ (Kinder-, Frauen-, Männerhaare). Weniger geeignet sind Barthaare, weil sie meist stärkere Krümmungen und oft auch sehr unregelmässige (nierenförmige, herzförmige etc.) Querschnitte haben. Für stärkere Reize sind Schwanzhaare des Pferdes sehr brauchbar, welche sich durch geringe Kräuselung und fast kreisrunden Querschnitt von 160—250 $\mu$ Durchmesser auszeichnen. Schweinsborsten sind für die meisten Zwecke zu steif und nur in Ausnahmsfällen zu verwenden. Die Haare sollen ferner innerhalb der gebrauchten Längen ihren Durchmesser möglichst wenig ändern. Auch in dieser Richtung empfehlen sich menschliche Kopfhaare und Pferdehaare am meisten.

Der Vortheil, den diese Reizhaare als Mittel zur mechanischen

Reizung der Haut bieten, ist ein doppelter. Erstens wirken sie auf sehr kleine Flächen und zweitens ist die Intensität der Reizung abstufbar. Zur Bestimmung ihres Reizwerthes müssen zwei Constanten bekannt sein:

1. Der Durchmesser des Haares, oder, da elliptische Querschnitte die Regel bilden, der grösste und kleinste Durchmesser.

2. Das Gewicht, welches von dem Haar gehoben wird, wenn man es mit seinem Querschnitt gegen die Wagschale stemmt.

Zur Ausmessung der Durchmesser habe ich das Stativ eines älteren englischen Mikroskops mit Kreuztisch (beweglichem Objecttisch) benutzt, dessen Tubus durch Trieb in sehr weitem Umfange verstellbar ist. Das optische System bestand aus Zeiss *D* und Okular I mit Netzmikrometer. Die Tubuslänge war so gewählt, dass der Abstand zweier Linien des Mikrometers 0.02 mm repräsentirte. Ist der Durchmesser eines Haares zu *a* Mikrometertheilen bestimmt, so beträgt dann die Länge des Halbmessers (bezw. der halben Axe der Ellipse) $\frac{a}{100}$ mm. Zur Messung wird Blendung und Condensor aus dem Stativ entfernt und nur der Spiegel zurückgelassen. Das Stäbchen des Reizhaares wird mit etwas Klebwachs auf dem Objecttisch so befestigt, dass das Haar nach oben ragt. Längere Haare werden durch den Ausschnitt des Tisches durchgesteckt und der Griff unterhalb befestigt. Der Querschnitt des Haares soll mit einer scharfen Scheere senkrecht zur Axe angelegt und parallel zur Ebene des Tisches orientirt sein; er muss staubfrei sein. Dünne Haare werden durch den leisesten Luftzug bewegt; schon die Athmung des Beobachters genügt, sie in beständigem Schwanken zu erhalten, welches eine Messung unmöglich macht. Man hilft sich, indem man das Haar nahe dem Ende zwischen zwei Objectträger einklemmt. Auch bei Einhaltung aller dieser Vorschriften sind die Ränder des Querschnittes manchmal nicht scharf zu sehen. Hier kommt man durch gute Beleuchtung, Wechsel zwischen geradem und schiefem Licht etc. in der Regel zum Ziele. Hilft dies alles nicht, so muss ein neuer Querschnitt angelegt werden.

Die zweite auszuführende Bestimmung ist eine Kraftmessung und betrifft den Widerstand, den das Haar einer Zusammendrückung in der Richtung seiner Längsaxe entgegensetzt. Ich werde diese

Form der Beanspruchung, um einen kurzen Ausdruck zu haben, als Stauchen bezeichnen. In Wirklichkeit kommt es allerdings nicht oder nicht in nachweisbarem Grade zu einer Stauchung; das Haar biegt vielmehr nach der Seite aus und entwickelt einen von seiner Biegsamkeit abhängigen Widerstand. Von Wichtigkeit für den vorliegenden Zweck ist, dass dieser Widerstand sehr rasch einem Maximum zustrebt. Der Vorgang möge durch die schematische Figur 9 *A* und *B* veranschaulicht sein. *A* stellt das Reizhaar vor, wenn es auf die Haut im Punkte *F* aufgesetzt, aber noch nicht gestaucht ist. In *B* ist der Griff durch Parallelverschiebung der Haut genähert und das Haar zu einer S-förmigen Curve gebogen, deren Wendepunkt in *W* ist. Liegt *W* senkrecht über dem Fusspunkte *F*, so übt das Haar eine ausschliesslich drückende Wirkung auf die Haut. Weicht dagegen *W* nach der Seite ab, so entsteht neben der drückenden eine schiebende Componente. Die letztere tritt nun, wie man die Verbiegung des Haares auch vornehmen mag, regelmässig dadurch auf, dass das Haar sehr bald beginnt sich aus der Ebene herauszudrehen, d. h. aus der ebenen S-Curve wird eine Raumcurve.

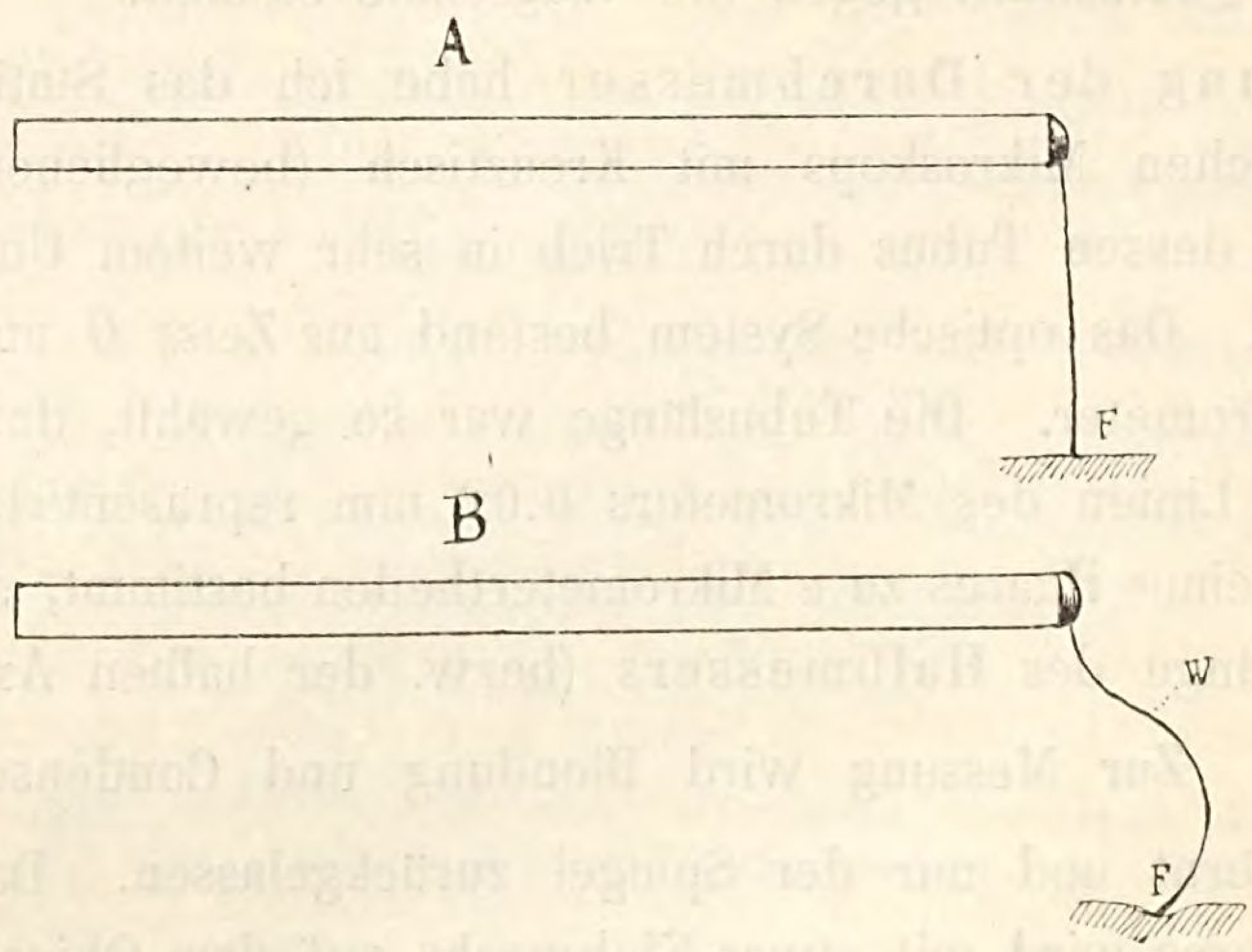


Fig. 10.

Nimmt man die Verbiegung des Haares auf der Wage vor, indem man es gegen die Wagschale oder, wenn die Construction es erlaubt, von oben her gegen eine horizontale Fläche des Gehänges genau so wie gegen die Haut zu stauchen versucht, so äussert sich das Herausdrehen des Haares aus der Krümmungsebene dadurch, dass sein mit zunehmender Krümmung anfangs wachsender Widerstand wieder abnimmt. Legt man also auf die andere Wagschale Gewichte, welche die zur Verdrehung des Haares nöthige Krümmung herbei-

führen, so werden diese nicht mehr gehoben, während kleinere Gewichte von dem Haar überwunden werden. Das grösste Gewicht, welches von dem Haar noch gehoben wird, soll weiterhin die Kraft des Haares genannt werden.

Das Herausdrehen aus der Krümmungsebene kommt wahrscheinlich durch den nicht ganz regelmässigen, insbesondere oft leicht spiraligen Bau des Haares zu Stande. Elastische Stäbe oder Stränge von homogener oder parallelfaseriger Beschaffenheit, wie Kautschukfäden oder Fischbeinstäbe, lassen diese Erscheinung gar nicht oder nur in geringem Grade beobachten, deutlich aber gedrehte Gebilde wie steife Bindfäden, Darmsaiten, Spiralfedern. So ausgesprochen wie bei den Haaren habe ich sie allerdings nirgendwo gefunden und ich möchte darin eine Eigenthümlichkeit erblicken, welche nicht ohne praktischen Werth ist. Indem das Haar sich verdreht und abgleitet, kann es in vielen Fällen einer Ueberschreitung seiner Elasticitätsgrenze und einer Knickung aus dem Wege gehen.

Dass der als maximale Kraft des Haares bezeichnete maximale Stauchungswiderstand sich mit einer für den vorliegenden Zweck genügenden Genauigkeit messen lässt, möge folgendes Beispiel zeigen:

Haar $27 \times 46\ \mu$, $3900\ \mu^2$.

Kraftbestimmung auf der Wage am 30. October 1894:

30 mgr werden sofort gehoben,
31 „ ebenso,
32 „ ebenso, aber langsamer,
33 „ werden langsam gehoben, starke Biegung nöthig,
34 „ ebenso,
35 „ werden zuweilen spurweise gehoben,
36 „ werden nicht gehoben.

Nachprüfung desselben Haares am 1. October 1895:

35 mgr werden etwas gehoben,
35.5 „ kaum noch bewegt,
36 „ werden nicht gehoben.

Der Werth hat für das gegebene Haar die Bedeutung einer Constanten, wenigstens ergeben, wie vorstehendes Beispiel zeigt, in beliebigen Intervallen vorgenommene Nachprüfungen in den Grenzen von wenigen Procenten schwankende Werthe, vorausgesetzt dass das Haar nicht geknickt oder sonstwie beschädigt worden ist. Ob

das geringe Schwanken der Werthe mit den hygroskopischen Eigenschaften der Haare zusammenhängt, habe ich nicht näher untersucht.

Das Verdrehen des Haares und der damit verbundene Nachlass des Druckes ist ein sehr bequemes Mittel, um die Leistung des Haares zu kennzeichnen. Für die Schwellenbestimmung auf der Haut ist es aber nicht zulässig, die Verbiegung so weit zu treiben wie in Fig. 9 *B*, weil dann der Querschnitt des Haares sich schräg stellt und mit seiner Kante in die Haut eindringt. Wie gross ist aber die Kraft des weniger stark verbogenen Haares?

Die Antwort lautet: Ein der maximalen Kraft des Haares naheliegender Widerstand wird schon erreicht, bevor das Haar eine merkliche Durchbiegung erfahren hat. Es sind die letzten zur Erreichung des Grenzwerthes nöthigen Zusatzgewichte, welche eine rasch zunehmende Verbiegung und schliesslich die Verdrehung des Haares herbeiführen.

Von dieser Thatsache kann man sich in folgender Weise überzeugen. Der Griff des Reizhaares wird von einem Muskelhalter gefasst, welcher eine feine Einstellung besitzt und Senkungen von 0.1 mm an einer Schraubentrommel abzulesen gestattet. Das Haar wird in verticaler Richtung so eingestellt, dass es die eine Wagschale gerade berührt, wenn die Zunge der leeren Wage auf Null steht. Nun werden auf die andere Wagschale Gewichte gelegt und das nunmehr gebogene Haar so lange vermittelst der Schraube niedergelassen, bis die Zunge wieder auf Null einspielt. Beispiele:

1. Kopfhaar 23 $\times$ 40 $\mu$, 2800 $\mu^2$, 15.5 mm Länge.

10 mgr. werden ohne merkliche Biegung des Haares getragen.
20 „ ebenso.
22 „ Senkung um 0.1 mm nöthig.
23 „ „ „ 0.2 „ „
24 „ „ „ 4.0 „ noch nicht ausreichend, das Haar wird verdreht und durchgebogen.

2. Pferdehaar 83 $\times$ 88 $\mu$, 23000 $\mu^2$, 24 mm Länge.

0.5 gr beanspruchen eine Senkung um 0.4 mm
0.6 „ „ „ „ „ 0.7 „
0.65 „ Das Haar wird verdreht und durchgebogen.

Es werden also mindestens 90 % des maximalen Kraftwerthes ohne störende Verbiegung bezw. Schrägstellung des Haares erreicht. Die hierzu nöthige geringe Senkung des Griffes ist u. a. eine Function

der Länge des Haares. Aus diesem Grunde sowie wegen des lästigen Schwankens und der damit verbundenen Unsicherheit beim Aufsetzen der Haare werden Längen von 50 mm und darüber besser vermieden. Aber auch sehr kurze Haare, z. B. Stücke von Kopfhaaren unter 5 mm Länge, sind für den gewöhnlichen Gebrauch unzweckmässig, weil bei der Verbiegung so kurzer Haarstücke Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze stattfindet, das Haar daher nicht sofort wieder in seine Ausgangslage zurückkehrt. Die Bestimmung der Kraft solcher Haare und ebenso ihre Benutzung zur Reizung der Haut ist daher nur unter Einschaltung genügend langer Pausen zwischen den einzelnen Verbiegungen ausführbar.

Ist die Bestimmung des Halbmessers (der halben Axen) des Haares sowie seiner Kraft nach den beschriebenen Verfahrungsarten erfolgt, so werden die Werthe auf dem Holzgriff vermerkt. Dasselbe geschieht mit dem daraus abgeleiteten Reizwerth, welcher zunächst, auf Grund der Versuche mit der Schwellenwage, abhängig gesetzt werden soll von dem Verhältniss zwischen Kraft und Fläche. Der Werth dieses Quotienten wird als Druck des Haares bezeichnet werden.

Die Angaben auf dem Griff eines derartig geaichten Reizhaares lauten demnach:

$28 \times 47\ (36)\ \mu$
$4130\ \mu^2$
$37$ mgr
$9$ gr/mm$^2$.

Die beiden ersten Zahlen sind die beiden halben Axen des elliptischen Querschnittes und 36 $\mu$ der Radius eines Kreises, welcher mit der Ellipse gleiche Fläche besitzt, nämlich 4130 $\mu^2$. Es ist zweckmässig die Angaben über die vier Flächen des Griffes so zu vertheilen, dass die einzelnen Constanten stets in derselben Weise in Bezug auf die Richtung des Haares orientirt sind. Der Reizwerth muss in dem geordneten Satze zuerst in die Augen springen.

Die schwächsten Drucke, die man durch Frauenhaare von noch handlicher Länge erzielt, liegen bei 1 gr/mm$^2$. Will man noch weiter herabgehen, z. B. für die Cornea, so empfiehlt es sich, an Coconfäden von geeigneter Länge ganz kurze, nur wenige Millimeter lange Stücke von Kopf- oder Barthaaren mit einer Spur von Canadabalsam

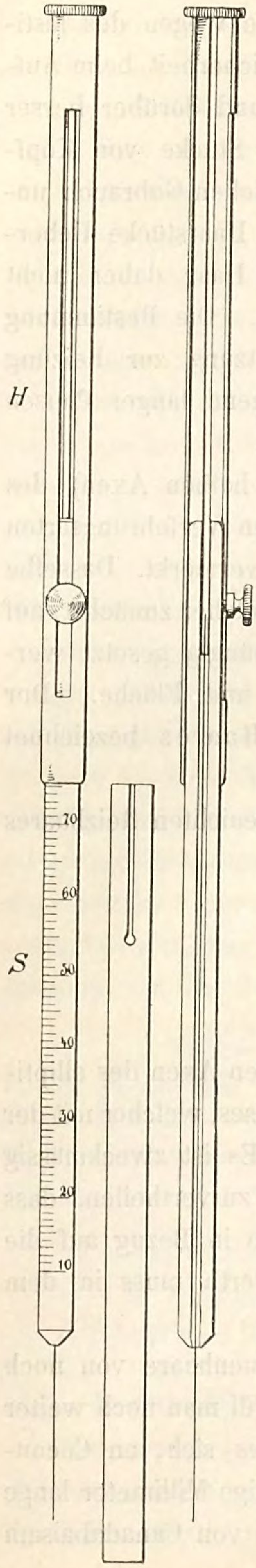


Fig. 10.

anzukleben. Man vermeidet dadurch den stets sehr unregelmässigen Querschnitt der Coconfäden und vereinigt den Vortheil einer sehr biegsamen Faser mit einem relativ grossen Querschnitt.

Ein Satz derartiger Reizhaare mit genügend verschiedenen Constanten, nach ihren Reizwerthen geordnet und in geeigneten Kästchen verwahrt, bildet ein sehr handliches Instrumentarium für eine grosse Zahl von Versuchen und kann bei richtiger Verwendung trotz täglichen Gebrauchs jahrelang in gutem Stande bleiben.

Da in der Praxis des Arztes, insbesondere des Nervenarztes, die Bestimmung von mechanischen Reizschwellen nicht selten werthvoll werden kann, es aber nicht jedermanns Sache ist, die zwar nicht schwierige aber immerhin umständliche Arbeit der Aichung eines Satzes von Reizhaaren durchzuführen, so habe ich ein Aesthesiometer anfertigen lassen, welches auf dem Princip der Reizhaare beruht, aber gestattet, mit einem einzigen Haar eine grosse Reihe von Druckwerthen zu durchlaufen. Denkt man sich ein stärkeres Haar z. B. ein Pferdehaar eingezogen in eine Capillare, etwa in ein Thermometerrohr von so engem Lumen, dass das Haar sich eben noch leicht darin verschieben lässt, so kann bei dem Stauchungsversuch nur der von der Capillare nicht umschlossene Theil des Haares sich verbiegen und wird eine Kraft entfalten, die um so grösser ist, je weiter man das Haar in die Capillare zurückzieht.

In der Ausführung ist die Capillare ersetzt durch ein Messingrohr sehr enger Bohrung *S* Fig. 10, auf welchem eine Hülse *H* mit geringer Reibung gleitet. In der Axe der Hülse

und von gleicher Länge wie diese verläuft ein Drähtchen, welches in die Bohrung des Rohres *S* passt und an dessen Ende das Reizhaar befestigt ist. Wird die Hülse ganz über den Stab geschoben, so ragt das Haar in grösster Länge hervor, und hat demgemäss nur geringe Kraft. Wird anderseits die Hülse möglichst weit zurückgeschoben, so verschwindet der grösste Theil des Haares in der Bohrung, und der kurze noch vorragende Theil leistet einen sehr erheblichen Stauchungswiderstand. Um ein Abziehen der Hülse von dem Rohre zu vermeiden, ist erstere mit einem Schlitze versehen, dessen Enden in den extremen Lagen gegen eine Stellschraube stossen, durch welche die Hülse auch in jeder zwischenliegenden Stellung festgehalten und somit das Reizhaar auf eine beliebige Länge eingestellt werden kann. Eine Millimetertheilung auf dem Rohre, mit deren Hilfe eine gegebene Länge des Reizhaares stets wieder gefunden werden kann und eine Schutzhülse für das frei herausragende Haarende vervollständigen die Einrichtung.

Die Aichung des Haares nimmt man am besten an einer Federwage vor, die man sich eventuell aus einem Muskelhebel und einer guten Spiralfeder leicht in genügender Empfindlichkeit herstellen und durch Gewichte graduiren kann. Man bestimmt für jeden fünften oder zehnten Strich der Millimetertheilung die Kraft des Haares und interpolirt für die zwischenliegenden. Die Theilung des Aesthesiometers ist so orientirt, dass den höchsten Zahlen die kürzesten Längen, also die grössten Kräfte des Haares entsprechen. Die kleinsten Kraftwerthe verhalten sich zu den grössten wie 1 : 50 und man kann mit dem Instrument sowohl unter die Druckschwelle der meisten Hautstellen herabgehen, wie über die Schmerzschwelle steigen. Ueber eine grössere Zahl praktischer Erfahrungen wird Herr Dr. R. Berger an einer anderen Stelle berichten.

Die Methode der Reizhaare steht, wie ich nachträglich erfahren habe, in einer gewissen Verwandtschaft zu dem Verfahren von Bloch (4). Ich habe mir nach dessen Angaben einen Spannungszeiger verfertigt und gebe in Fig. 11 eine Abbildung. Die an einem Griff befestigte Schweinsborste trägt an ihrem Ende ein quadratisches Stück Papier von 2 oder 3 mm Seite. Eine am Griff befestigte Scala giebt die den Verbiegungen der Borste entsprechenden Gewichte an. Ich muss gestehen, dass es sehr schwierig ist, das Papier-

quadrat aus freier Hand auf die zu prüfende Hautstelle so aufzulegen, dass es dieselbe allseitig berührt und nicht schon vor jeder Verbiegung der Borste durch das Scheuern und Reiben der Kanten und

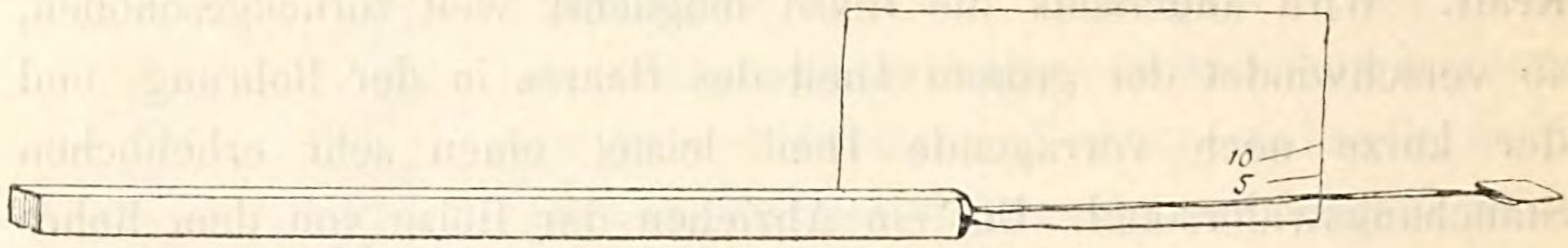



Fig. 11.

Ecken eine Empfindung auslöst. Die abnorm niedrigen Reizschwellen die BLOCH angiebt, sowie die Behauptung, dass die Reizfläche ohne Einfluss auf die Reizschwelle sei, lassen mich glauben, dass auch der Erfinder diese Schwierigkeit nicht überwunden hat. Eine Modification dieses Verfahrens hat neuerdings GRIFFING (14 S. 17) benützt.

Die Handhabung der Reizhaare zum Zwecke der Erregung der Haut ist eine ähnliche wie bei ihrer Aichung auf der Wage. Man stösst oder staucht das Haar senkrecht gegen die zu untersuchende Hautstelle, wobei darauf zu achten ist, dass die Reizung auf den zuerst getroffenen Punkt beschränkt bleibt, d. h. das Haar nicht gleitet oder ausspringt. Stärkere Verbiegung des Reizhaares ist daher aus diesem Grunde sowie wegen der Schrägstellung des Querschnittes (siehe oben) zu vermeiden. Auch beim Abheben namentlich stärkerer Haare ist darauf zu achten, dass das federnde Haar nicht neue Hautstellen trifft. Das Aufsetzen der Reizhaare soll ferner so geschehen, dass Körperhaare nicht berührt werden, weil eine abstufbare Erregung derselben auf diesem Wege nicht gelingt. Dieselbe ist in anderer Weise auszuführen, worüber weiter unten nähere Angaben folgen werden.

Werden Reizhaare von kleinen Druckwerthen in der geforderten Weise benutzt, so erhält man je nach der gewählten Stelle verschiedene Empfindungen:

1. Am häufigsten kommt es zu einer sehr schwachen, indifferenten, sofort verschwindenden Empfindung, ähnlich jener, welche entsteht, wenn man ein einzelnes Körperhaar aus seiner normalen Richtung herausbiegt. Ich werde diese Art von Empfindung als **Berührungsempfindung** bezeichnen, bemerke aber ausdrücklich, dass ich in

ihr nicht etwas von der eigentlichen Druckempfindung wesentlich Verschiedenes erblicke. Sie unterscheidet sich von der letzteren nur durch die geringe Intensität und die kurze Dauer. Die Projection ausserhalb des Körpers kann bei ihr, wie bei der Druckempfindung, vorhanden sein oder auch fehlen; es hängt das von Nebenumständen ab, auf welche hier nicht eingegangen werden kann.

2. Bei Verstärkung des Reizes geht sie ohne scharfe Grenze in die Druckempfindung über, von welcher im nächsten Abschnitt die Rede sein wird.

3. Vereinigt, wenn auch nicht streng gleichzeitig mit der Berührungs- bezw. Druckempfindung tritt zuweilen Kitzel auf, welcher durch die lange über die Zeit der Reizung anhaltende Dauer, die Ausbreitung nach der Fläche, die lebhafte und zwar unangenehme Gefühlsbetonung sowie durch die Tendenz Reflexe auszulösen ausgezeichnet ist. Dass der Kitzel eine die Berührungs- bezw. Druckempfindung nur begleitende Erscheinung ist, geht aus verschiedenen Eigenthümlichkeiten hervor. Die Intensität des Kitzels ist bei stets gleicher Reizung ausserordentlich variabel, wird durch Wiederholung abgeschwächt und kann durch Kneten und Reiben der Haut für längere Zeit verschwinden, während die Druckempfindung nur mit erhöhter Schwelle bestehen bleibt. Die Tendenz zur Kitzelempfindung durch einmaliges kurzes Aufsetzen eines Reizhaares ist an den einzelnen Hautstellen, wenn überhaupt vorhanden, sehr verschieden je nach Stimmung, Willensthätigkeit etc. Die Beziehung des Kitzels zum Drucksinn ist bereits von Goldscheider betont worden (11, S. 92). Ich fasse den Kitzel nicht als eine primäre Empfindung auf, sondern als eine secundäre im Sinne von H. Quincke (23).

4. Aufsetzen von Reizhaaren führt an manchen Körperstellen unmittelbar zur Schmerzempfindung, z. B. auf der Cornea, der Conjunctiva, der Glans penis. An anderen Orten, wie auf dem weichen Gaumen, im tiefsten Theile des inneren Gehörganges, ist die Reizung, wenn nicht geradezu schmerzhaft, so doch in eigenthümlicher Weise unangenehm. Ueber Versuche betreffend die Schmerzempfindlichkeit der Haut und der Schleimhäute wird weiter unten berichtet werden. Zunächst sollen die durch Reizhaare ausgelösten Druckempfindungen besprochen werden.

## Vierter Abschnitt.

### Druckempfindungen durch Reizhaare. Lage und Dichte der Druckpunkte.

Die durch Reizhaare erregten Druckempfindungen zeigen folgende Eigenthümlichkeiten, welche vielfach an die Wirkung grösserer Druckflächen erinnern:

1. Schwache Reize werden nur anfänglich wahrgenommen. Sofort oder kurze Zeit nach dem Aufsetzen verschwindet die Empfindung, auch wenn das Haar noch auf der Haut verweilt. Man hat die Empfindung einer flüchtigen Berührung oder eines schwachen Stosses (Berührungsempfindung). Es bedarf ziemlich starker Reize, um eine länger andauernde Empfindung hervorzurufen. Die Entlastungsschwelle ist stets höher als die Belastungsschwelle.

2. Die Geschwindigkeit des Aufsetzens hat einen gewissen, aber geringen Einfluss in dem Sinne, dass der rascher eintreffende Reiz wirksamer ist. Man thut daher gut, die Haare mit möglichst constanter Geschwindigkeit aufzusetzen, wozu man übrigens aus Gründen der Bequemlichkeit von vorneherein geneigt ist. So geringe Steilheiten, wie sie mit der Schwellenwage erzielt werden können und für die Reizschwelle von ausschlaggebender Bedeutung sind, lassen sich mit der Hand nicht erreichen. Die kleinen Aenderungen, die wohl immer stattfinden, sind nicht von Belang. Eine stärkere Deformation der Haut durch den steileren Reiz ist nicht nachzuweisen und auch wenig wahrscheinlich, da die bewegten Massen zu klein sind. Raschere Bewegung der Hand bezw. des Griffes wird nur dazu führen, das Reizhaar schneller zu verbiegen.

3. Mit dem Wechsel des Reizungsortes gehen sehr auffällige Aenderungen in der Intensität der Empfindung einher. Stärkere Reize werden allerdings fast überall empfunden, führen aber doch zur deutlichen Unterscheidung von Stellen maximaler bezw. minimaler Erregbarkeit. Schwächt man den Reiz fortschreitend ab, so verschwindet zuerst die Erregung der Minima, die nun unempfindlichen Stellen gewinnen an Umfang, während die noch empfindlichen mehr und mehr eingeengt werden, bis man schliesslich zu einem Reizwerth gelangt, für den das empfindliche Gebiet auf die

Grösse des Querschnittes der noch wirksamen Reizhaare zusammenschrumpft. Es giebt dann für das betreffende Reizhaar nur eine einzige Stellung, in welcher es wirksam wird.

Obwohl diese Orte als Punkte im strengen Sinne des Wortes nicht bezeichnet werden können, weil es nicht möglich ist mit dem gewählten Verfahren die Einengung weiter zu treiben als bis etwa 0.001 $mm^2$, so scheint es mir doch passend, den von Blix (3) eingeführten Namen Druckpunkte für sie beizubehalten. Thatsächlich pflegt man als Punkte alle Objecte zu bezeichnen, deren Gesichtswinkel unter den für normale Sehschärfe zulässigen Grenzwerth von etwa 1 Minute herabgeht. Dies ist aber für Flächen der angegebenen Grösse bezw. für Kreise von dem Durchmesser 0.04 mm bei einer Sehweite von 20 cm bereits der Fall. Ueberdies hat sich das Wort Druckpunkte bereits genügend eingebürgert, um die Gefahr eines Missverständnisses auszuschliessen.

4. An gewissen Hautflächen liegen die Druckpunkte so weit auseinander, dass man sie einzeln mit relativ starken Reizen erregen kann. Es ist schon unter 1. erwähnt worden, dass auch bei solchen stärkeren Reizen die Intensität der Empfindung nicht constant bleibt, sondern von einem anfänglichen Maximum ziemlich rasch absinkt. Aber selbst während dieser Zeit ist die Erregung nicht völlig continuirlich, sondern mehr oder weniger deutlich oscillirend. Ich weiss die Empfindung, welche hierbei auftritt, nach ihrem zeitlichen Verlauf mit nichts besser zu vergleichen, als mit dem sog. unvollständigen Schliessungstetanus, welcher am Nerv-Muskelpräparat bei Reizung mit constanten Strömen häufig auftritt. Wie gesagt antwortet auch der Druckpunkt auf den constanten mechanischen Reiz mit einer Reihe von Erregungsstössen von rasch abnehmender Amplitude. Ich bemerke, dass nicht auf jedem Druckpunkt die Erscheinung in gleich deutlicher Weise auslösbar ist, d. h. der Tetanus kann ein mehr oder weniger continuirlicher oder vollständiger sein. Es finden sich aber nicht wenige Druckpunkte, bei denen die Discontinuität der Empfindung mit voller Schärfe zum Bewusstsein kommt.

Diese Erscheinung steht in naher Beziehung zu einigen Beobachtungen, die ich in früheren Mittheilungen beschrieben habe (II. S. 293, III. S. 173). Ich hatte gefunden, dass bei der unipolaren Reizung der Druckpunkte nicht nur der faradische Strom discontinuirlich empfunden wird,

selbst bis zu 130 Unterbrechungen des primären Stroms in der Secunde sondern dass auch der constante Strom, mit einem spitzen Pinsel als differenter Electrode zugeführt, insbesondere bei Kathodenschliessung, eine discontinuirliche Erregung veranlasst. Sehr schwache Ströme geben allerdings nur eine der Schliessungszuckung des Muskels analoge Momentanerregung; man braucht aber die Stromstärke nur wenig über den Schwellenwerth zu steigern, um einen an die »Schliessungszuckung« für kürzere oder längere Zeit sich anschliessenden »Schliessungstetanus« der Druckpunkte wahrzunehmen. Ich hatte schon damals gefunden, dass die Discontinuität der Schliessungserregung nicht bei allen Druckpunkten gleich deutlich zu Tage tritt. Sehr gut liess sich dieselbe an der Lippenschleimhaut insbesondere in der Medianlinie nahe der Umschlagsstelle auf dem Kiefer beobachten. Die Druckpunkte dieser Gegend gerathen durch einen constanten Strom von mässiger Stärke in ein trillerartiges Schwirren. Hier gelingt auch am leichtesten der Nachweis der oscillatorischen Erregung durch einen constanten mechanischen Reiz (durch Reizhaare).

Wird eine grössere Zahl von Druckpunkten gleichzeitig gereizt, so verwischt sich in der Regel der oscillatorische Charakter der Erregung. Dies ist aber nicht der Fall, wenn die Nerven der Druckpunkte in ihrem Verlaufe erregt werden. Reizt man den Nervus ulnaris am Ellbogengelenk durch den constanten Strom oder mechanisch, oder ist ein Extremitätennerv in Begriff einzuschlafen bezw. aus diesem Zustande zu erwachen, so kann das Schwirren der Druckpunkte höchst deutlich und frei von schmerzhaften Sensationen zur Erscheinung kommen. Hierher gehören auch zahlreiche Parästhesien, welche als Kriebeln, Ameisenlaufen etc. beschrieben werden.

5. Die Druckpunkte sind Orte constanter immer wieder auffindbarer Lage auf der Haut. Innerhalb eines anatomisch gleichartigen Hautbezirkes sind die nachweisbaren Druckpunkte von ungleicher Schwelle. Ausserdem ist auch die Schwelle des einzelnen Punktes veränderlich. Namentlich auffällig ist die Erhöhung der Schwelle durch E r m ü d u n g, von welcher man zwei Arten unterscheiden muss: eine locale physiologische und eine allgemeine psychische. Die locale Ermüdung wird durch wiederholte rasch aufeinanderfolgende Reizungen eines Druckpunktes herbeigeführt und äussert sich in der Nothwendigkeit, die Reizstärke zu steigern und den Angriffspunkt

des Reizes genau auf die empfindlichste Stelle zu richten. Man kann die Ermüdung eines Punktes so weit treiben, dass er erst auf Reize anspricht, welche bereits auf benachbarte Punkte übergreifen, also für isolirte Erregung zu stark sind. Sich selbst überlassen, kehrt der Punkt bald wieder in seine normale Empfindlichkeit zurück.

Die Ermüdungserscheinungen an isolirten Druckpunkten sind viel auffälliger, als man nach den aus täglicher Erfahrung bekannten Leistungen des Tastsinnes erwarten sollte. Der Unterschied beruht darauf, dass die Haut bei dem gewöhnlichen Gebrauch als Tastorgan bewegt wird, die mechanische Erregung also mit Aenderungen des Ortes und der Intensität stattfindet, so dass den einzelnen Druckpunkten Zeit zur Erholung gegönnt ist. Es liegen hier Verhältnisse vor, welche zu bekannten Erscheinungen aus dem Gebiete des Gesichtssinnes in naher Analogie stehen.

Geistige Abspannung und Ermüdung führt ebenfalls zur Erhöhung der Druckschwelle, wobei die Unfähigkeit, die Aufmerksamkeit auf die gereizte Stelle zu concentriren, wohl eine grosse Rolle spielt. Aehnliche Beziehungen hat unlängst H. GRIESBACH (13) zwischen geistiger Ermüdung und Grösse der Raumschwelle der Haut nachgewiesen. In dieser Richtung dürften auch Untersuchungen über die intensive Schwelle nicht uninteressante Ergebnisse versprechen. Im gleichen Sinne wirkt starkes Hervortreten subjectiver Empfindungen, wie das oben S. 20 bereits geschildert wurde.

Die Temperatur der Haut hat anscheinend geringen Einfluss auf den Werth der Druckschwellen. Hierfür spricht ein Versuch mit starker Abkühlung der Haut (Eintauchen in Wasser von 8° C.), den ich früher beschrieben habe (II. S. 285), sowie neuere durch Herrn KIESOW mit der Schwellenwage ausgeführte Versuche, welche an einem anderen Orte mitgetheilt werden sollen.

6. Die Bestimmung der Dichte der Druckpunkte, d. h. ihrer Zahl in der Flächeneinheit, ist eine für viele Fragen wichtige, für gewisse Versuche nothwendige Aufgabe. Dieselbe für die ganze Körperoberfläche zu lösen ist dem Einzelnen nicht durchführbar. Anderseits bringt die Trennnng der Rollen in Reagent und Beobachter neue Fehlerquellen herein, macht die Versuche umständlich und setzt ein Zusammenarbeiten von seltener Interessengemeinschaft und Adaptationsfähigkeit voraus. Man wird sich daher vorläufig mit einigen

Stichproben begnügen müssen, Bestimmungen, welche für besondere Versuchszwecke an dem einen oder anderen Orte des Körpers vorgenommen worden sind.

Für die behaarten Stellen der Körperoberfläche, das sind etwa 95 %, ist die Aufgabe dadurch erleichtert, dass die Dichte der Druckpunkte aus der Dichte der Behaarung erschlossen werden kann. Leider ist über die Dichte der menschlichen Behaarung so gut wie nichts bekannt, wenigstens ist sie meines Wissens niemals zum Gegenstand systematischer Untersuchung gemacht worden, obwohl, wie S. EXNER (7) kürzlich gezeigt hat, der Frage von mehr als einer Seite Interesse abzugewinnen ist.

Aus eigener Erfahrung kann ich folgende Angaben machen:

| Obere Extremität | Fläche in $cm^2$ | Haare | Haare pro $cm^2$ |
|---|---|---|---|
| Oberarm Beugeseite | 1 | 16 | 16 |
| Unterarm, Mitte, radialer Rand der Dorsalfläche | 1 | 26 | 26 |
| Handrücken zwischen 3. und 4. Metacarpus | 1 | 22 | 22 |
| Mittelfinger 1. Phalange, Dorsalfläche | 1 | 79 | 79 |
| Untere Extremität | | | |
| Oberschenkel unteres Drittel, medialer Rand des Extensor cruris | 0.88 | 13 | 14.8 |
| Kniescheibe | 8.0 | 180 | 22 |
| Unterschenkel Wade | 1.0 | 9 | 9 |
| „ „ andere Stelle | 9.74 | 99 | 10 |

Endlich finde ich bei EXNER (7, Sonderabdruck S. 11) die Angabe, dass bei einem mässig dicht behaarten Kopfe etwa 300 Haare auf den $cm^2$ kommen. Die Gesichtshaut, welche einen sehr dichten Bestand feinster Härchen trägt, dürfte hinter dieser Zahl kaum zurückstehen. Bei einer Körperfläche von 2 $m^2$ oder 20,000 $cm^2$ und einer mittleren Haardichte von 25 auf den $cm^2$ würde auf den Menschen eine halbe Million Haare zu rechnen sein.

Sucht man eine behaarte Stelle nach den vorhandenen Druckpunkten ab, so finden sich dieselben, wie ich schon in früheren Mittheilungen hervorgehoben habe (I. S. 190, II. S. 287), in einem sehr charakteristischen Lageverhältniss zu den Haaren. Jedes Haar hat einen Druckpunkt nahe seiner Austrittsstelle und in der Projection des schief stehenden Balges auf die Oberfläche. Der Verlauf des Haares unter der Haut ist bei dunklen Haaren ein Stück weit

zu verfolgen. Er ist ferner dadurch festzustellen, dass das Haar in Bewegung geräth, wenn man die Oberfläche der Haut über dem Haarbalg mit einer Nadelspitze, Borste oder dergl. berührt. Reizung des Druckpunktes führt immer zu deutlicher Bewegung des Haares.

Man kann indessen nicht sagen, dass die Zahl der Druckpunkte ganz genau zusammenfällt mit der Zahl der Haare. Erstens stehen die Haare häufig paarweise oder zu dritt und dann so eng beisammen, dass es nicht immer gelingt, die Existenz gesonderter Druckpunkte nachzuweisen. Ausserdem finden sich innerhalb der behaarten Flächen verstreute Druckpunkte, denen kein Haar entspricht. Ueber die Häufigkeit dieses Vorkommens an der oberen Extremität fehlen mir vorläufig Zahlenbelege, doch ist sicher, dass die haarlosen Druckpunkte nur vereinzelt vorkommen. Nähere Angaben wird demnächst Herr Dr. BRAHN machen, der bei Gelegenheit von Schwellenbestimmungen mit Hülfe von Reizhaaren dieser Frage Beachtung geschenkt hat. Auf der unteren Extremität habe ich ein 9.74 $cm^2$ grosses Stück der Wade daraufhin durchsucht und drei haarlose Druckpunkte gefunden.

Diese Angaben lauten allerdings sehr verschieden von denen A. GOLDSCHEIDER's, welcher in Tafel V seiner Abhandlung (11) den Raum zwischen den Haaren mit Druckpunkten dicht erfüllt zeichnet. Es beruht dies zweifellos auf einem Irrthum, hervorgerufen durch ungenügende Abstufung der Reizstärken.

Ueber die Dichte der Druckpunkte an nicht behaarten Stellen folgen unten einige Angaben.

## Fünfter Abschnitt.

## Schwellenbestimmungen an Druckpunkten durch Reizhaare.

Bei Discussion der Versuchsergebnisse mit der Schwellenwage zeigten sich die auffälligen Schwankungen in den Flächenschwellen benachbarter Hautstellen abhängig von der Topographie und den Einzelschwellen der Druckpunkte. Es entstand daher die Aufgabe, die Punktschwellen zu bestimmen. Einen ersten Versuch in dieser Richtung stellt die in meiner ersten Mittheilung zur Sinnesphysiologie der Haut auf S. 188 enthaltene Tabelle dar, welche vor genauer Kenntniss der Beziehung der Druckpunkte zu den Haarbälgen entworfen wurde.

Die Reizhaare waren nach Drücken geaicht und als Maasseinheit 1 gr/mm² gewählt. Vergleicht man die dort aufgeführten Punktschwellen mit den auf der Schwellenwage erhaltenen Flächenschwellen, so sind die hohen Werthe der ersteren auffällig. Für die Fingerspitzen ist z. B. dort der Werth 3 gr/mm² angegeben, während die Flächenschwellen für dieselbe Stelle bis auf 28 mgr/mm² herabgehen, d. h. auf einen mehr als hundertfach kleineren Werth. Die Unverträglichkeit dieser Befunde liess es fraglich erscheinen, ob die Messung des Reizwerthes in hydrostatischen Drücken, welche für grössere Flächen als nothwendig nachgewiesen worden war, für so kleine Flächen noch angängig sei. Dass Zweifel in dieser Richtung berechtigt waren, zeigte ein Versuch zur Schwellenbestimmung an einer grösseren Zahl von Druckpunkten, wobei sich ergab, dass durch ein Reizhaar von 8 gr/mm² mehr Punkte zu erregen waren als durch ein anderes von 12.5 gr/mm².

Zur Prüfung der Frage wurden Reizhaare zugerichtet, welche bei gleichem Druckwerth möglichst verschiedene Querschnitte und Kräfte aufwiesen, z. B.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1tes Paar | 31 $\mu$ | 3020 $\mu^2$ | 22 mgr | 7 gr/mm² |
| | 70 $\mu$ | 15400 $\mu^2$ | 110 „ | 7 „ |
| 2tes Paar | 36 $\mu$ | 4150 $\mu^2$ | 82 „ | 20 „ |
| | 78.6 $\mu$ | 18100 $\mu^2$ | 360 „ | 20 „ |

Wurden die Haare eines solchen Paares abwechselnd benutzt, um eine Zahl Druckpunkte zu erregen, so fand sich stets, dass das Haar grösserer Fläche und Kraft trotz gleichen Drucks wirksamer war.

Der Widerspruch, in dem diese Erfahrungen zu den Ergebnissen der Schwellenwage stehen, liess sich am besten erklären unter der Annahme, dass die Organe des Drucksinns nicht ganz oberflächlich gelegen sind und dass daher, sobald die vom Reiz getroffene Hautfläche sehr klein wird, der oberflächlich herrschende Druck im Niveau des empfindlichen Organs nicht mehr voll zur Geltung kommt.

Um eine Vorstellung zu gewinnen über die Art, wie ein auf die Oberfläche ausgeübter Druck in die Tiefe der Haut wirkt, wird es zweckmässig sein die Versuchsbedingungen schematisch zu vereinfachen. Denkt man sich eine homogene elastische Platte, von sehr grosser Ausdehnung im Verhältniss zu ihrer Dicke (Haut), ausgebreitet auf einer

starren ebenen Unterlage (Knochen), so wird ein auf die freie Oberfläche der Platte ausgeübter Druck, wenn er auf eine Fläche wirkt, die klein ist im Verhältniss zur Dicke der Platte, nach der Tiefe zu rasch abnehmen, da die Theile im Innern der Platte nach der Seite ausweichen können. Die Deformation gewinnt mit wachsender Tiefe an Breite, was eine Abnahme des Druckes, ein Druckgefälle in der Ausbreitungsrichtung zur Folge haben muss. Wird dagegen die drückende Fläche gross im Verhältniss zur Dicke der Platte, so kann ein Ausweichen nach der Seite nur noch in beschränktem Maasse stattfinden, das Druckgefälle wird klein, d. h. der oberflächliche Druck wird mit nur geringer Abnahme nach der Tiefe fortgepflanzt. Im Grenzfalle endlich, bei gleichmässigem Druck auf die ganze Platte, wird das Gefälle streng gleich Null, die ganze Dicke der Platte befindet sich unter dem gleichen, nämlich dem oberflächlichen Druck.

Herr Professor W. VOIGT in Göttingen, dem ich diese Ueberlegungen mittheilte, hatte die Güte, mich mit den Hülfsmitteln zur strengen Behandlung des Problems, zugleich aber auch mit den Schwierigkeiten bekannt zu machen, welche der Uebertragung der theoretischen Ergebnisse auf die in der Haut gegebenen Verhältnisse entgegenstehen. Es sei mir gestattet, ihm für sein freundliches Entgegenkommen auch an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen.

Es erschien unter diesen Umständen richtiger, die Anwendbarkeit der ausgeführten Betrachtungen auf die bei den Schwellenbestimmungen an der Haut in Betracht kommenden Verhältnisse statt auf theoretischem Wege durch den Versuch am Modell zu erproben. Auf den Rath meines Freundes und Collegen Professor H. AMBRONN

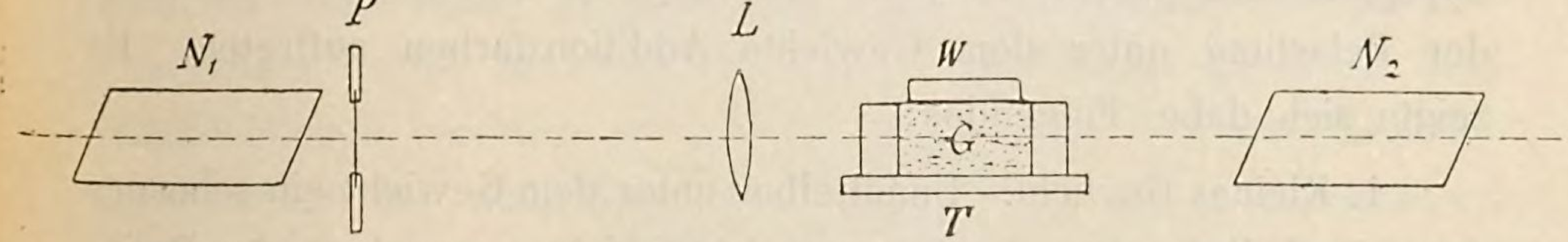


Fig. 12.

habe ich mich dazu folgender durch Fig. 12 schematisch dargestellten Versuchsanordnung bedient. Durch Eingiessen in einen aus Glasleisten hergestellten Trog *T* wurde eine Platte oder richtiger ein

Streifen Gelatine $G$ von ca. 90% Wassergehalt hergestellt. Die Dimensionen des Streifens waren:

Länge 82 mm Breite 18 mm Höhe 13 mm.

Dieser Streifen war in seinem Troge zwischen horizontal liegenden Nicol'schen Prismen $N_1$, $N_2$ so orientirt, dass er mit seiner Längsrichtung quer stand zur Axe der Nicols. Man sah also durch die Breite des Streifens, parallel zu seiner Oberfläche hindurch. Zwischen dem ersten Nicol und dem Leimstreifen war ein Gypsplättchen $P$ Roth I. O. und eine Collimatorlinse $L$ eingeschaltet, um eine gleichmässige Erhellung bezw. Färbung des Gesichtsfeldes zu erzielen. Zur Beleuchtung diente ein Auerbrenner.

Die Belastung der freien Oberfläche des Leimstreifens geschah durch kleine Gewichte $W$ von prismatischer Form, deren Massen den Grundflächen proportional waren. Das kleinere Gewicht hatte bei einer Grundfläche von $2 \times 16$ mm die Masse von 5 g, das grössere bei einer Grundfläche von $8 \times 16$ mm die Masse von 20 g. Diese Gewichte wurden so aufgelegt, dass die 16 mm langen Seiten ihrer Grundflächen quer gerichtet waren, d. h. fast die ganze Breite des Leimstreifens 18 mm bedeckten. Der Zweck dieser Anordnung war, die Deformation des Streifens in querer Richtung auszuschliessen und sie nur in der Längsrichtung sowie nach der Tiefe zu gestatten, um den erwarteten optischen Effect zu steigern.

Frisch gegossene Leimstreifen waren optisch isotrop und auch die Längsleisten des Glastroges zeigten keine merkbare Doppelbrechung. Wurden nun die Polarisationsebenen des gekreuzten Nicols so orientirt, dass sie mit der Längsrichtung des Streifens Winkel von 45° bildeten und lag die längere Axe der Elasticitätsellipse des Gypsplättchens parallel zu jener Richtung, so mussten bei eintretender Belastung unter dem Gewichte Additionsfarben auftreten. Es zeigte sich dabei Folgendes:

1. Kleines Gewicht. Unmittelbar unter dem Gewicht ein schmaler Saum Roth II. O. Daran schliessen sich Schichten zunehmender Breite von Gelb, Grün, Blau II. O., welches weiterhin in Rot I. O. überging. Die gesammte Farbenänderung beschränkte sich auf die obere Hälfte des Leimstreifens, die untere Hälfte sowie die seitlichen Theile des Gesichtsfeldes haben ihre Farbe Roth I. O. nicht geändert.

2. Grosses Gewicht. Die Deformation der Oberfläche ist auch mit diesem Gewicht eine sehr geringfügige, die Farbenfolge dieselbe wie früher. Zuoberst wieder eine Zone Roth II. O. und nach unten anschliessend die übrigen Farben, aber jeder Farbe entspricht eine breitere Leimschicht, so dass das Blau ungefähr erst in halber Tiefe beginnt und bis auf den Grund der Gelatine herabreicht. Das Farbengefälle ist kleiner.

Man konnte den Versuch mit gleichem Erfolg auch in der Weise anstellen, dass beide Gewichte gleichzeitig in nicht zu kleinem Abstande auf die Gelatine gelegt und durch Verschiebung des Troges abwechselnd das eine oder andere in das Gesichtsfeld gebracht wurde. Es war fernerhin für das Ergebniss der Versuche gleichgültig, ob an den Schmalseiten des Troges die Glasleisten entfernt oder belassen wurden, vorausgesetzt, dass die Gewichte nicht in ihrer unmittelbaren Nähe aufgelegt wurden.

Da gleiche Farben gleichen Drucken entsprechen, so zeigt der Versuch, dass unmittelbar unter den Gewichten in beiden Fällen derselbe Druck herrscht, entsprechend der Proportionalität zwischen Belastungsfläche und Gewicht, dass aber die Druckabnahme nach der Tiefe unter der kleinen Fläche rascher erfolgt, und daher der Druck in gleicher Entfernung von der Oberfläche hier geringer ist als unter der grossen Fläche.

An der Berechtigung, diese Sätze auf die Haut zu übertragen, kann nicht gezweifelt werden, wenn auch im Einzelnen durch die inhomogene Beschaffenheit der Haut sowie durch ihre nicht ebenen Begrenzungen mancherlei Abweichungen stattfinden werden.

Angenommen also, es befinde sich ein für Deformation empfindliches Nervenendorgan in geringer Tiefe unter der Oberfläche, so wird, so lange dieser Abstand gegenüber dem Durchmesser der deformirenden Fläche zu vernachlässigen ist, das Organ von einem dem oberflächlichen merklich gleichen Druck getroffen. Nimmt aber der Durchmesser der deformirenden Fläche Werthe an von derselben Grössenordnung wie die Entfernung des Organs von der Oberfläche, so wird in dessen Niveau nicht mehr der oberflächliche, sondern ein geringerer Druck herrschen.

Es können also Reize, welche in Bezug auf den oberflächlich ausgeübten Druck gleich sind, ihre durch die Schwellenbestimmungen

innerhalb gewisser Grenzen nachgewiesene physiologische Gleichwerthigkeit nur unter der Bedingung für alle Grössen der Reizfläche beibehalten, dass die erregten Organe in der Oberfläche liegen. Ist dieses nicht der Fall, so muss es einen Grenzwerth der Reizfläche geben, unterhalb dessen dem Druckwerth nach constante Reize nicht mehr physiologisch constant sein können. Da nun ein solcher Grenzwerth für die Druckreize thatsächlich existirt, so folgt, dass die Organe des Drucksinns nicht in der Oberfläche liegen.

Denkt man sich eine Stufenfolge mechanischer Reize von constantem Druck und abnehmender Fläche auf die Haut wirkend, so werden alle Reize, deren Flächen über dem erwähnten Grenzwerth liegen, unter den früher besprochenen Einschränkungen physiologisch gleichwerthig, die Reize kleinerer Fläche aber schwächer sein. Zu diesen Reizen schwächerer Wirkung gehören alle Reizhaare; ihr Querschnitt liegt unterhalb der kritischen Grenze.

Wenn nun die Aichung der Reizhaare nach Drucken nicht angängig ist, so giebt es vielleicht eine andere Beziehung zwischen Kraft und Querschnitt, von welcher der Reizwerth so kleiner Flächen abhängig erscheint. Dass eine solche Relation ganz allgemein für alle unterhalb des Grenzwerthes liegenden Flächen festgesetzt werden könne, ist kaum anzunehmen. Wohl aber ist möglich, dass innerhalb gewisser Querschnittswerthe die Aufstellung eines einheitlichen Maassstabes sich als durchführbar herausstellt. Versuche in dieser Richtung ergaben, dass physiologische Gleichwerthigkeit für Flächen von dem Querschnitt der gebräuchlichen Reizhaare zu erreichen war, wenn ihre Kraft nicht der Fläche, sondern dem Radius proportional gemacht wurde.

Es wurde daher ein Satz von Reizhaaren sowohl wie bisher nach Druckeinheiten, als auch nach dem neuen Maassstabe geaicht und die Maasseinheit zu 1 gr/mm angenommen. Da diese Grösse die Dimension einer Oberflächenspannung besitzt, so soll sie im Gegensatz zu der bisher gebrauchten Druckeinheit als Spannungseinheit bezeichnet werden. Die Angaben auf dem Griffe eines derartig vorgerichteten Reizhaares lauten demnach:

29 × 45 (36) $\mu$
4100 $\mu^2$
57 mgr
14 gr/mm², 1.6 gr/mm.

Als Beispiel für die physiologische Gleichwerthigkeit von Reizhaaren gleicher Spannung möge der folgende Versuch dienen.

Eine Fläche von 2 cm² auf der linken Kniescheibe wurde fünffach vergrössert aufgenommen und die Austrittsstelle der Haare eingezeichnet. Zur leichteren Uebersicht wurde die Fläche in fünf Felder getheilt und die Haare jedes Feldes nummerirt. Auf eine Trennung der Doppelhaare wurde verzichtet. Auf 33 Nummern kommen 45 Haare, also 21 Einzel- und 12 Doppelhaare. Zur Reizung der in der Nähe der Austrittsstellen in bekannter Richtung gelegenen Druckpunkte dienten drei Reizhaare A, B und C mit folgenden Constanten:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 73.5 $\mu$ | 17000 $\mu^2$ | 150 mgr | 8.8 gr/mm² | 2 gr/mm |
| B | 39 $\mu$ | 4870 $\mu^2$ | 78 „ | 16.0 „ | 2 „ |
| C | 20 $\mu$ | 1260 $\mu^2$ | 40 „ | 31.8 „ | 2 „ |

Die nachstehende Versuchstabelle enthält links die Nummern der in den fünf Feldern vorhandenen Druckpunkte, rechts die Angabe, ob das Haar A, bezw. B. oder C den betreffenden Punkt deutlich, schwach oder gar nicht erregte.

| | | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| I. | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | deutlich | deutlich | deutlich |
| | 3 | schwach | schwach | schwach |
| | 4 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 |
| II. | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | deutlich | deutlich | deutlich |
| | 3 | „ | „ | „ |
| | 4 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | schwach | schwach |
| III. | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 |

| | | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | deutlich | deutlich | deutlich |
| | 8 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 |
| | 10 | sehr schwach | 0 | sehr schwach |
| IV. | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | schwach | schwach | schwach |
| | 4 | „ | „ | „ |
| | 5 | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | schwach | schwach | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 |
| V. | 1 | deutlich | deutlich | deutlich |
| | 2 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 |

Es liegen daher für fast alle Druckpunkte, für welche A über der Schwelle liegt, auch B und C über der Schwelle, woraus folgt, dass sie als gleichwerthige Reize zu betrachten sind. Es versteht sich von selbst, dass es mit dem stärkeren Haar leichter ist den empfindlichen Punkt zu treffen, es muss daher beim Gebrauch der dünnen Haare auf genaue Ortsbestimmung gesehen werden. Die Reizschwellen sind in diesem Versuche ziemlich hoch (vgl. weiter unten), was sich aus der starken Beugung des Kniees und Anspannung der Haut erklärt.

Gleiche Ergebnisse lieferten Versuche, welche auf der Streckseite des Unterarms, auf der Volarseite des Handgelenks (unbehaart) und auf der Beere des Ringfingers angestellt wurden.

Das dickste Reizhaar, welches bei den erwähnten Versuchen zur Verwendung kam, hatte einen Radius von 73.5 oder einen Durchmesser von etwa $\frac{1}{7}$ mm. Bis zu diesem Werthe war, wie die Versuche zeigen, eine Aichung nach Spannungseinheiten erlaubt. Andererseits ergaben die früher beschriebenen Versuche mit der Schwellenwage die Abhängigkeit des Reizwerthes von dem Drucke bis herab zu Flächen von 2 mm Durchmesser. Zwischen 2 mm und

$\frac{1}{7}$ mm liegt also die Grenze, von welcher ab bei weiterer Verkleinerung der Reizfläche die Wirksamkeit des Reizes auf die Druckpunkte nicht mehr nach dem Druckwerth bestimmt werden kann.

Durch den Nachweis dieses Grenzwerthes, unter den alle Reizhaare fallen und der Möglichkeit, für so kleinflächige Reize eine Aichung nach einer anderen Maasseinheit zu bewerkstelligen, war eine zuverlässige Feststellung der Zahl der Druckpunkte, sowie ein Vergleich ihrer Reizbarkeit an verschiedenen Hautstellen überhaupt erst durchführbar. Es ist oben gelegentlich der Bestimmung von Druckschwellen für grössere Flächen auf den grossen Unterschied in der Empfindlichkeit oft ganz benachbarter Hautstellen hingewiesen und die Nothwendigkeit betont worden, die Lage und Reizbarkeit der einzelnen Druckpunkte zu berücksichtigen. Die nach Spannungseinheiten geaichten Reizhaare sind dazu brauchbar. Denn wenn sie auch eine Bestimmung der Schwellen nach den im Niveau des Organs allein maassgebenden Druckwerthen des Reizes nicht gestatten, so geben sie doch eine Vorstellung von der Grösse der Variation in der Empfindlichkeit, die zwischen den Druckpunkten einer Hautstelle bezw. verschiedener Hautstellen vorhanden sind.

Obwohl mir in dieser Richtung zahlreiche vereinzelte Erfahrungen zu Gebote stehen, so verfüge ich bisher doch nur über zwei Aufnahmen grösserer Hautflächen. Die eine betrifft einen Bezirk von 9.74 $cm^2$ auf meiner linken Wade; die andere Fläche von 16 $cm^2$ befindet sich auf der Beugeseite meines linken Handgelenks. Was die Technik des Aufsuchens und die Schwellenbestimmung der Druckpunkte anlangt, so mögen einige Bemerkungen gestattet sein. Es ist nicht zweckmässig mit den schwächsten Reizen zu beginnen, der Versuch wird sonst zu ermüdend und unsicher. Es empfiehlt sich mit einer Reizstärke, welche sicher alle Druckpunkte erregt, 5—10 gr/mm, den Anfang zu machen und sich einen ersten Ueberblick über die Lage zu verschaffen. Die Punkte grösster Empfindlichkeit werden mit Tinte markirt. Diese Ortsbestimmungen lassen sich mit den stärkeren Reizen rasch und mit ziemlicher Genauigkeit machen; es bedarf nur weniger, leichter Berührungen, so dass eine Ermüdung der Punkte so gut wie vollkommen vermieden werden kann. Die Benutzung einer vor dem Auge befestigten Uhrmacherlupe, sowie gute Beleuchtung (Auerbrenner und Schusterkugel) fördern sehr die Arbeit. Die

erste Bestimmung bedarf natürlich einer Verbesserung, denn die starken Reize lassen die Orte grösster Empfindlichkeit zu ausgedehnt erscheinen und gestatten nicht eine Trennung eng zusammenstehender Punkte. Dies geschieht durch Nachprüfung mit schwächeren Haaren, die man wiederholt nach Stunden oder Tagen vorzunehmen hat. Die Correcturen werden am besten mit andersfarbiger Tinte nachgetragen und schliesslich durch kleinste Tröpfchen einer 10% Silbernitratlösung für längere Zeit fixirt. Die Zeichnung einer gut durchmusterten Hautstelle kann dann auf Gelatinepapier gepaust und in passender Vergrösserung auf Millimeterpapier übertragen werden. Es giebt dies eine Karte der Druckpunkte, in welcher die Schwellenwerthe bequem notirt werden können. Trägt man ausserdem noch durch die Haut sichtbare Venen, Furchen, Narben, Pigmentflecke der Haut und dgl. ein, so ist die Wiederauffindung sehr erleichtert. An behaarten Stellen bilden die Haare unveränderliche Merkzeichen, doch muss nach verstreuten haarlosen Druckpunkten in der angegebenen Weise gesucht werden.

Mühsamer als die topographische Aufnahme ist die Schwellenbestimmung. Die schwächsten Reize, die nur durch Reizhaare sehr kleinen Querschnitts zu erzielen sind, fordern genaues Treffen des empfindlichen Punktes, abseits desselben sind sie unwirksam. Eine sorgfältige topographische Aufnahme ist daher Vorbedingung. Nach einiger Uebung geht übrigens die Arbeit leichter von statten.

Die Versuchsergebnisse werden durch die Figg. 13 (Wade) und 14 (Handgelenk) so anschaulich dargestellt, dass eine weitere Beschreibung unnöthig erscheint. Die Figuren sind dreifache Vergrösserungen der betreffenden Hautflächen, die Druckpunkte sind in ihrer Lage und mit ihren nach Spannungseinheiten gemessenen Schwellen eingezeichnet. Das Netz gerader Linien begrenzt Quadrate von 1 cm Seite. Ueber die Häufigkeit der einzelnen Schwellenwerthe geben nachstehende Tabellen Aufschluss:

| In Fig. 13. | Schwellen | Haare | Haarlose Druckpunkte | Summe | Procent |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0.5 | 8 | | 8 | 11 |
| | 1.0 | 39 | 2 | 41 | 56 |
| | 2 | 14 | 1 | 15 | 21 |
| | 3 | 6 | | 6 | 8 |
| | 4 | 3 | | 3 | 4 |
| | | 70 | | 73 | 100 |

Für Doppelhaare ist nur eine einzige Schwelle, nämlich die niedrigste bestimmt. Es entsprechen daher 96 Haaren nur 70 Druck-

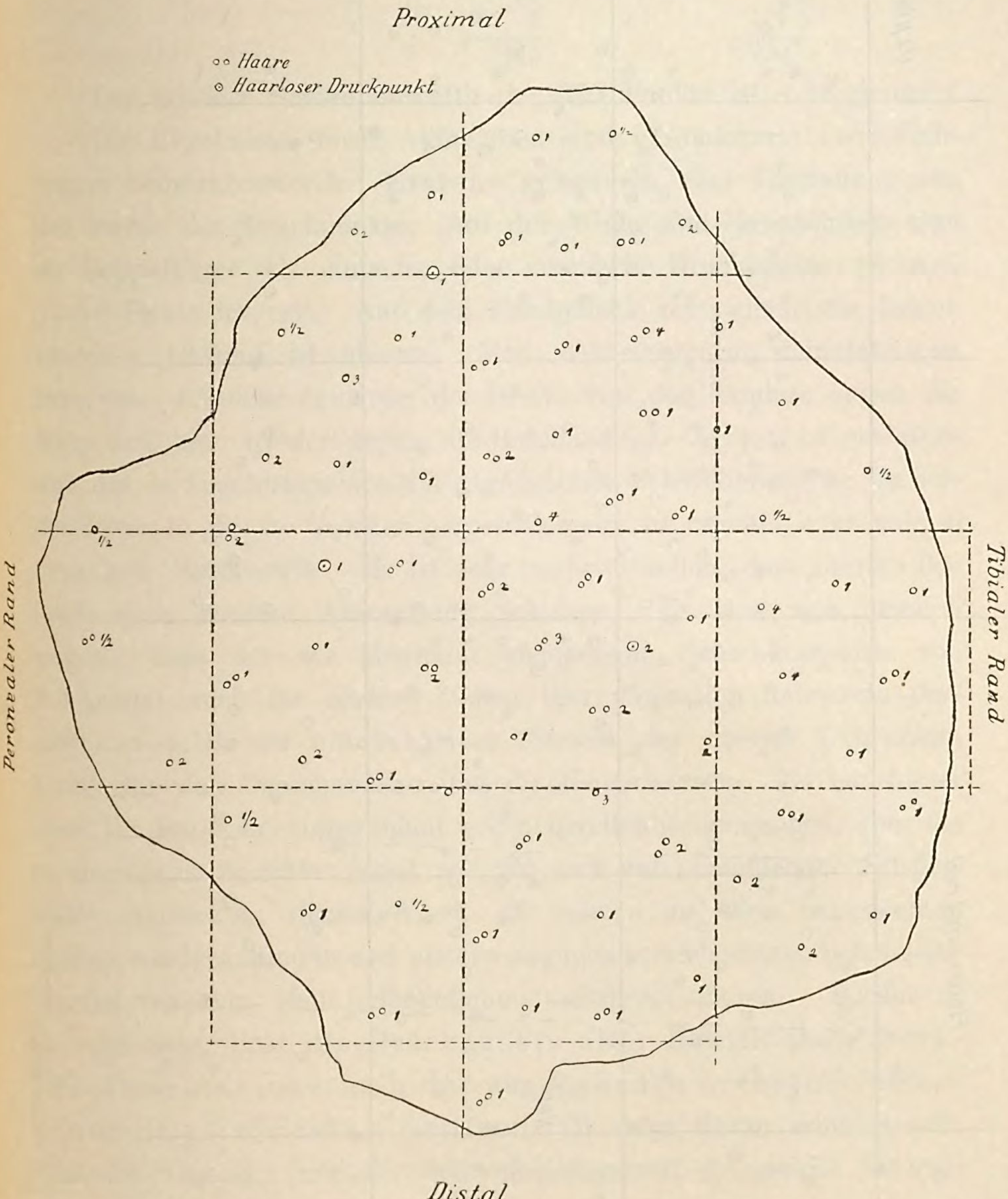
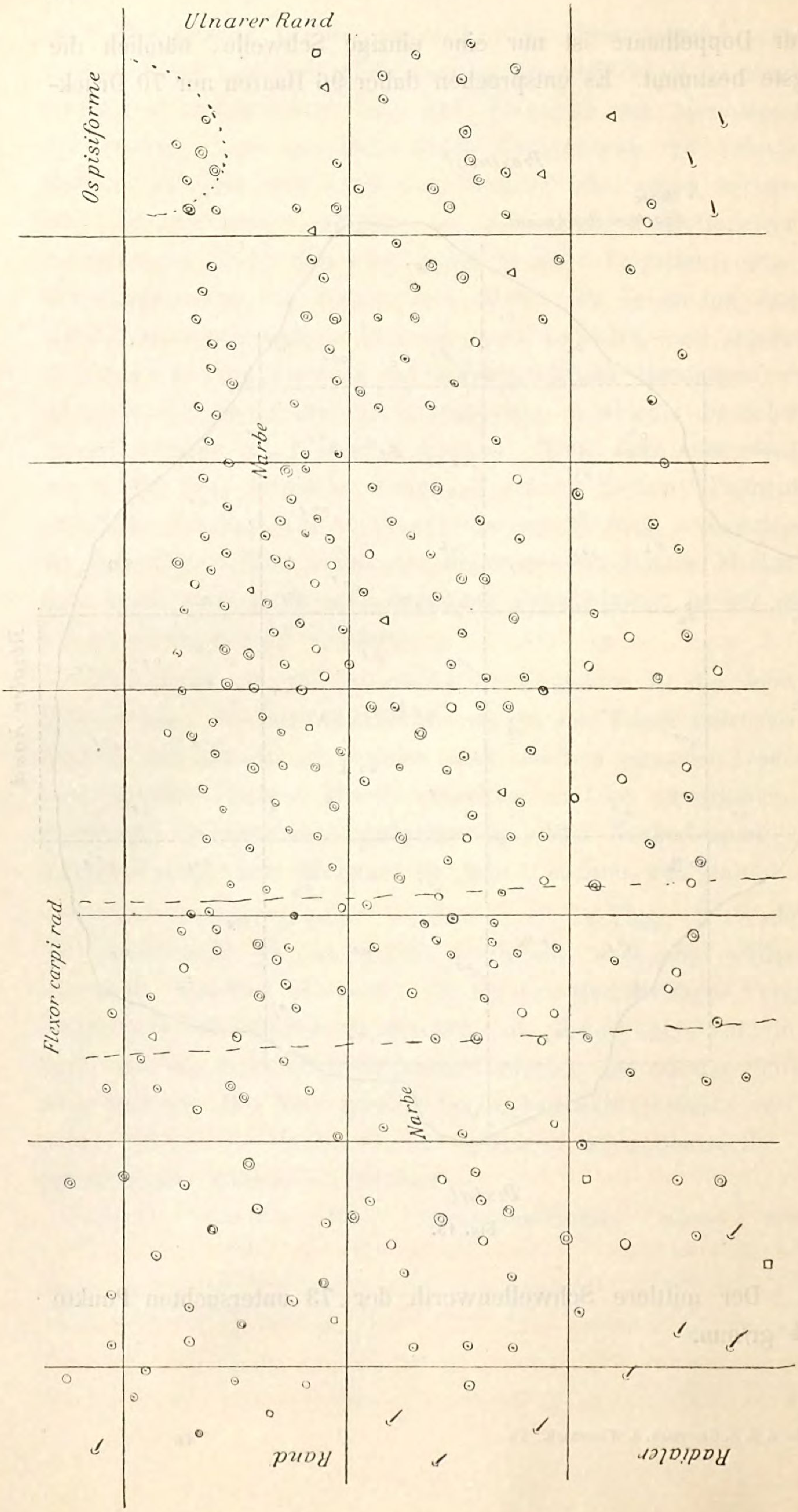



Fig. 13.

punkte. Der mittlere Schwellenwerth der 73 untersuchten Punkte ist 1.44 gr/mm.




Druckpunkte von 0.5, 1, 2, 3, 4 gr/mm Schwelle — Haar

Fig. 14.

| Zu Fig. 14. | Schwellen | Druckpunkte | Procent |
|---|---|---|---|
| | 0.5 | 39 | 13 |
| | 1.0 | 182 | 60 |
| | 2 | 66 | 22 |
| | 3 | 11 | 3.5 |
| | 4 | 5 | 1.5 |
| | | 303 | 100 |

Der mittlere Schwellenwerth der 303 Punkte ist 1.28 gr/mm.

Die Ergebnisse dieser Aufnahmen sind besonders in zwei Richtungen bemerkenswerth. Erstens geben sie eine Vorstellung von der Dichte der Druckpunkte. Auf der Wade sind, je nachdem man die Doppelhaare als einfache oder zweifache Druckpunkte rechnet, 7—10 Punte im $cm^2$. Auf dem Handgelenk schwanken die Zahlen zwischen 12 und 41 im $cm^2$. Man sieht ferner an dem letzteren Orte eine deutliche Zunahme der Dichte von den Rändern gegen die Mitte und hier wieder gegen die Hohlhand zu. Zweitens erweisen sich die in Spannungseinheiten angegebenen Schwellenwerthe an beiden Orten in gleiche Grenzen eingeschlossen; sie ergeben auch nahezu denselben Mittelwerth. Es ist sehr wahrscheinlich, dass diesem Befunde eine weitere Anwendung zukommt. Es lässt sich nämlich zeigen, dass der als Minimum angegebene Schwellenwerth von 0.5 gr/mm auch für andere Stellen den minimalen Reizwerth darstellt, so z. B. für die behaarten Flächen der oberen Extremität, ferner für den Daumenballen und die Fingerbeeren. Es hat ferner Herr Dr. Braun bei Gelegenheit von Schwellenbestimmungen, über die er demnächst berichten wird und die sich auf verschiedene Körpertheile erstrecken, diesen Werth als tiefsten an allen untersuchten Stellen wiedergefunden und ebenso stimmen seine höchsten Schwellenwerthe mit den oben angegebenen auffallend überein. Daraus ist zu schliessen, dass die Druckpunkte aller Hautflächen merklich dieselbe, innerhalb der angegebenen Grenzen schwankende Empfindlichkeit besitzen. Es möge daran erinnert sein, dass die Versuche mit der Schwellenwage auf die gleiche Schlussfolgerung führten.

Es ist damit natürlich nicht gesagt, dass ein gegebenes Gewicht, auf verschiedene Hautstellen gelegt, überall dieselbe Empfindungsstärke auslöst. Vorausgesetzt, dass es überall die Haut mit derselben Fläche berührt, so wird es an gewissen Stellen, z. B. an den sog. Tastflächen, eine grosse Zahl von Druckpunkten, an anderen nur

wenige treffen. Nimmt man an, wozu nach den eben mitgetheilten Versuchen Berechtigung vorhanden ist, dass überall hochempfindliche und unterempfindliche Druckpunkte in ungefähr gleichem Verhältniss gemischt sind, so wird das Gewicht an der einen Stelle viele, an der anderen nur wenige, eventuell auch gar keinen hochempfindlichen Punkt treffen, dort also viel stärker erregen wie hier.

Die vorstehend beschriebenen Versuche lehren, dass die Erregung der Druckpunkte nur so lange von dem hydrostatischen Druckwerthe des Reizes abhängig erscheint, als die Reizfläche nicht unter eine gewisse Grösse sinkt. Anomalien der Erregung kommen indessen auch zur Beobachtung, wenn die Reizfläche über ein gewisses Maass hinaus wächst. Ein klassisches Beispiel dieser Art hat seinerzeit Meissner beschrieben (20): Taucht man die Hand in Wasser oder Quecksilber von der Temperatur der Haut, so entsteht in keinem Theil der untergetauchten Hautfläche eine Empfindung, speciell keine Druckempfindung, so lange Bewegung der Hand oder Berührung der Gefässwände vermieden wird. Dagegen treten Empfindungen auf an der Grenzlinie zwischen Flüssigkeit und Luft. Wie man jetzt weiss, würden die dabei auftretenden hydrostatischen Drücke an sich völlig ausreichen Druckempfindung zu erzeugen, denn die Versuche mit der Schwellenwage lehren, dass an empfindlichen Hautstellen Drücke von 2—3 Tausendtel einer Atmosphäre, wenigstens vorübergehend erkannt, werden können. Aber selbst wenn man die Wasser- und Quecksilberdrücke des Versuchs weit über diesen Werth steigert, indem man den Arm bis zum Ellbogen untertaucht, so ändert dies nichts an dem Ergebniss. Man kann den Versuch mit Vortheil auch so ausführen, dass man den Arm in eine Röhre steckt, wie sie für plethysmographische Versuche in Gebrauch sind, und den Luftraum durch eine Kautschukmanschette abschliesst. Steigerung des Luftdruckes im Innern der Röhre wird dann nur an den von der Manschette umschlossenen Hautflächen empfunden.

Diese Versuche sind das vollkommene Gegenstück zu den eingangs beschriebenen, bei welchen die durch den Druck erzeugte Deformation der Haut auch nach dem Aufhören des Drucks gefühlt wurde. Im vorliegenden Falle ist zwar genügend Druck vorhanden, es fehlt aber die Deformation und folglich die Empfindung. Die theoretische

Bedeutung dieses Verhaltens kann erst weiter unten erörtert werden. Die Grösse der Reizfläche, von welcher ab die Erregung durch einen gegebenen Druckwerth beschränkt oder verhindert wird, ist nicht bekannt.

## Sechster Abschnitt.

### Die Reizbarkeit der Haare.

Die überwiegende Mehrzahl der Druckpunkte des menschlichen Körpers ist der Erregung von zwei Seiten her zugänglich: entweder direct von der Hautoberfläche aus oder durch Vermittlung des Haarschaftes. Den »Einfluss der Haare auf den Drucksinn« haben zuerst AUBERT und KAMMLER (1) festzustellen versucht, indem sie Schwellenbestimmungen an denselben Hautflächen zuerst im behaarten, sodann im rasirten Zustande vornahmen. Nach dem Rasiren fanden sie die Schwellen ausnahmslos höher. Sie bemerken, dass durch die Zwischenschaltung der Haare die Fläche, mit welcher das Gewicht die Haut berührt, verkleinert, die Wirkung des Gewichtes also vergrössert werden müsse. Sie machen ferner aufmerksam, dass die meisten Haare schief stehen und daher aufgelegten Gewichten gegenüber wie Hebel wirken.

Die sinnesphysiologische Bedeutung der Haare dürfte weniger in der Wahrnehmung andauernder Belastungen, als in der Vermittlung jener flüchtigen Eindrücke liegen, die ich oben als Berührungsempfindungen bezeichnet habe. Es geht dies mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit schon daraus hervor, dass bei der Verwendung des Drucksinns zum Tasten die unbehaarten Hautstellen bevorzugt werden. Gewichte, welche eine andauernde Druckempfindung veranlassen, werden von den Haaren nicht getragen, sinken auf die Haut nieder und erregen die Druckpunkte direct. Ausserdem weicht das Haar dem Reize leicht aus, verbiegt, verdreht sich und gleitet ab, wie das auch für die Reizhaare oben beschrieben worden ist. Alle diese Ueberlegungen sprechen dafür, dass die Haare weniger befähigt sind, über die Stärke, die Dauer und den Umfang, kurz über die tastbaren Eigenschaften der stattfindenden mechanischen Einwirkungen zu unterrichten, als über das Vorhandensein einer solchen überhaupt, ferner dass sie für constante Einwirkungen weniger empfänglich sind, als

für flüchtige, von Ort zu Ort wandernde. Es bestehen demnach zwischen den behaarten und unbehaarten Theilen der Tastfläche functionelle Unterschiede, welche in mehr als einer Beziehung einen Vergleich mit den Leistungen der peripheren und centralen Netzhautpartien nahelegen. Auf das mit der Berührung der Haare häufig aber nicht nothwendig verbundene Kitzelgefühl kann erst bei einer anderen Gelegenheit eingegangen werden.

Da das Haar einen Hebel darstellt oder doch andringenden Reizen gegenüber in der Regel als Hebel functionirt, so lässt sich die zur Nervenerregung eben genügende Einwirkung nicht als Kraft oder Druck, sondern nur als ein Drehungsmoment ausdrücken. Biegt man ein Haar aus seiner Gleichgewichtslage um einen kleinen Winkel heraus, so bemerkt man, dass der Durchtrittspunkt durch die Haut seinen Ort nicht verändert; diese Stelle ist für kleine Drehungen das Hypomochlion. Man findet ferner, dass für die vorherrschend kurzen Körperhaare die zur Erregung nöthige Drehung ohne merkliche Krümmung des Haares erreicht wird. Der Schwellenwerth des Reizes wäre somit auszudrücken durch die Kraft, welche an dem Haarschaft senkrecht zu dessen Richtung angreifend zur Erregung genügt, multiplicirt mit ihrem Abstand vom Drehungspunkte. Um eine Vorstellung zu gewinnen über die Grössenordnung der in Betracht kommenden Werthe, habe ich folgenden Versuch ausgeführt:

Gewählt wurde ein Haar über dem Metacarpus indicis, 8 mm lang und nahezu gerade. Die Hand wurde so gelagert, dass das Haar horizontal gerichtet war. Nun wurden auf das Haar kleine an feinsten Coconfäden hängende Gewichte in Form von Reiterchen herabgelassen. Die Gewichte waren aus einem Streifen Lametta geschnitten, von welchem 40 cm 41.5 mgr, folglich 1 mm 0.1 mgr wogen. Das kleinste Reiterchen von 2 mm Länge auf die Spitze des Haares gesetzt, wurde nicht gefühlt, dagegen eines von 4 mm meistens bemerkt, wenn es auf die Spitze, nicht wenn es auf die Mitte des Haares gesetzt wurde. Hier wurde erst ein Gewicht von 0.8 mgr bemerkt. Reizschwelle des Haares 3.2 mgr/mm.

---

## Zweiter Theil.

# Die Schmerzempfindung.

### Siebenter Abschnitt.

### Die Schmerzpunkte und ihre Erregbarkeit.

Ueberschreitet die auf der Haut gesetzte Deformation ein gewisses Maass, oder geschieht sie in einer bestimmten noch näher zu bezeichnenden Weise, so folgt der Druckempfindung, begleitet sie oder geht ihr voraus der Schmerz. Der Erfolg hängt übrigens nicht allein ab von den näheren Bestimmungen des Reizes, sondern auch von der getroffenen Oertlichkeit. Ueber Flächen, auf welchen jeder überhaupt wirksame mechanische Reiz schmerzhaft empfunden wird (Cornea, Conjunctiva, Glans penis), ebenso über Flächen, auf welchen anderwärts sehr schmerzhafte Reize schmerzlos aber nicht empfindungsfrei sind (gewisse Bezirke der Mundhöhle), habe ich bereits bei einer früheren Gelegenheit mehrfach berichtet (II S. 293, III S. 180).

Die physiologischen Vorstellungen über das Zustandekommen der Schmerzempfindung werden meistens beherrscht von der Thatsache, dass es in der Regel starke Drücke, extreme Temperaturreize oder gar zerstörende Einwirkungen sind, welche Schmerz erregen. Es wird daher angenommen, dass es die Erregung tiefliegender Gebilde oder die starke Reizung beliebiger Nerven sei, welche schmerzhaft empfunden werde.

Die Thatsache einer hohen Schwelle für bestimmte Reize schliesst aber niedrige Schwellen für andere Reize oder für eine andere Wirkungsweise des gleichen Reizes nicht aus. Jedes nervöse Organ hat nur für gewisse günstigste oder adäquate Reize niedrige Schwellen. Aus der relativ hohen Lage der Schmerzschwelle für Deformationen kann demnach tiefe Lage der Organe oder des Sitzes der Erregung nicht gefolgert werden, so lange dasselbe Schwellenverhältniss nicht für alle Reize nachgewiesen ist. Ein solcher Nachweis ist aber nicht zu erbringen. Im Gegentheil konnte ich zeigen (II S. 290, III S. 180), dass für den chemischen Reiz, sowie unter gewissen Bedingungen auch für den elektrischen die Schmerzschwelle tiefer ist als die Druck-

schwelle, sodass für diese Reize die Organe der Schmerzempfindung anscheinend oberflächlicher liegen.

Die andere Annahme, dass der Schmerz durch starke Erregung beliebiger Nerven entstehe, lässt erwarten, dass jene Punkte der Haut, welche für Berührung am empfindlichsten sind, auch am leichtesten schmerzhaft erregbar sein werden.

Diese Folgerung ist bei Benutzung von Reizhaaren oder des früher beschriebenen Aesthesiometers leicht zu prüfen. Der Versuch wird zweckmässig an behaarten Stellen ausgeführt, weil durch die Vertheilung der Haare bereits ein Hinweis auf die Lage der Druckpunkte gegeben ist. Tastet man mit einem Reize von 50 bis 60 Druckeinheiten ein kleines, haarloses, von einer Anzahl Haare umstandenes Hautfeld ab — es soll weiterhin als Zwischenhaarfeld bezeichnet werden — so wird man stets von mehreren Stellen desselben schmerzhafte Empfindungen auslösen, eine bestimmte topographische Beziehung dieser Stellen zu den in bekannter Weise vertheilten und leicht nachweisbaren Druckpunkten aber nicht nachweisen können. Man kann eine schmerzhafte Stelle ebensowohl in nächster Nähe des Druckpunktes oder (für die erreichbare Genauigkeit der Ortsbestimmung) mit ihm zusammenfallend finden, als auch in allen möglichen Entfernungen bis zur Grösse des Halbmessers des Zwischenhaarfeldes. Die Stellen maximaler Empfindlichkeit für schmerzhafte Deformation fallen demnach im Allgemeinen nicht mit den Druckpunkten zusammen.

Eine isolirte d. h. von Berührungs- und Druckempfindung freie Erregung der schmerzhaften Stellen ist auf diese Weise allerdings nicht erreicht. Es bedarf aber nur geringer Abänderungen des Versuchs, um auch dieser Forderung zu genügen. Dieselben sind:

Verkleinerung der Reizfläche,
Wahl grosser Zwischenhaarfelder,
Maceration der Epidermis.

Die Verkleinerung der Reizfläche liesse sich verwirklichen, indem man sehr feine Kopfhaare (Kinder- oder Frauenhaare) als Reize wählt; doch müssen diese zur Erzielung der nöthigen Kraftwerthe sehr kurz genommen werden, was, wie oben erwähnt, der gleichmässigen Wirksamkeit der Haare abträglich ist. Durch ihren starken Biegungswiderstand empfehlen sich für den Versuch Pferdehaare, denen man

dadurch eine kleine Reizfläche verleihen kann, dass man an ihr freies Ende feine Cactusstacheln, z. B. von Opuntia leucotricha mit etwas Balsam anklebt. Ein derartig vorgerichtetes Haar stellt dann ein Reizinstrument dar, welches einerseits die Schärfe einer feinsten Nähnadel, anderseits die für die Abstufung der Kraft werthvolle Biegsamkeit des Haares besitzt. Solche bewaffnete, in das Aesthesiometer eingezogene Haare sind ein sehr brauchbares Werkzeug für Stichreize, dem höchstens nachzusagen ist, dass es sehr leicht in die Haut eindringt, was immerhin als eine Complication des Versuchs anzusehen ist. Ich habe mich daher schliesslich damit begnügt, das Ende des Haares wie einen Bleistift zu spitzen, was mit einem scharfen Scalpell unter der Lupe nicht die geringste Schwierigkeit hat. Man kann auf diese Weise den Querschnitt eines Pferdehaares von $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$ mm² auf ein Zehntel dieser Werthe reduciren, was für den Versuchszweck völlig genügt. Verletzung der Epidermis ist dann ausgeschlossen.

Ein zweiter wichtiger Punkt ist die Wahl solcher Hautstellen, wo die Haare weit auseinanderstehen, wie am Oberarm, namentlich aber an der unteren Extremität.

Endlich ist gründliche Durchfeuchtung der Epidermis vortheilhaft, wenn auch nicht unbedingt nöthig. Die Schmerzschwelle wird hierdurch erniedrigt. So ist z. B. die Kopfhaut nach dem Waschen gegen Bürsten sehr empfindlich.

Unter Beobachtung dieser Vorschriften gelingt es mit Sicherheit die Reizung zwischen den Haarbälgen so auszuführen, dass die schmerzhafte Empfindung ohne vorgängige oder begleitende Druckempfindung entsteht. Damit ist aber die Auffassung des Schmerzes als einer durch zu starken Reiz veränderten Druckempfindung ausgeschlossen und es ist die Folgerung unabweisbar, dass es sich um Erregung besonderer Organe handelt. Im Lichte dieser Erfahrung gewinnt auch der Nachweis isolirter, eng umschriebener mit den Druckpunkten im allgemeinen nicht zusammenfallender Orte maximaler Schmerzempfindlichkeit, der Schmerzpunkte, wie ich sie nach dem Vorgange aber nicht in dem Sinne Goldscheider's (11 S. 87) nennen will, eine andere Bedeutung. Sie sind ein Zeichen der ungleichmässigen Vertheilung specifisch schmerzempfindlicher Organe über die Haut.

Dass die Schmerzpunkte dort, wo sie in der Nachbarschaft der

Druckpunkte liegen, mechanisch nicht isolirt erregt werden können, ist bei ihrer relativ hohen Deformationsschwelle selbstverständlich. Dass sie den isolirt erregbaren, von der Lage abgesehen, gleichwerthig sind, beweist ihr völlig übereinstimmendes Verhalten gegen wirksame Reize. Dasselbe ist durch folgende Eigenthümlichkeiten ausgezeichnet.

1. Die durch mechanische Reize (Deformationen) auslösbare Schmerzempfindung ist nicht nur von der Intensität des Reizes, sondern in sehr auffälligem Grade auch von seiner Dauer abhängig. Ein gegebenes Reizhaar kann bei gleicher Deformation der Haut je nach der Dauer seiner Einwirkung schmerzlos oder schmerzhaft empfunden werden. Dieser Satz wird durch die tägliche Erfahrung bestätigt, nach welcher anfänglich nicht schmerzhafte, geringfügige Deformationen der Haut, Einschnürungen u. dgl. mit der Zeit schmerzhaft werden können. Schwache, der Schmerzschwelle naheliegende constante Deformationen der Haut haben demnach ein deutliches Latenzstadium, welches sich unter Umständen über viele Secunden erstrecken kann. Dies ist die physiologische Form der Verspätung der Schmerzempfindung, welche, wie Naunyn (22) zuerst beobachtet hat, bei gewissen krankhaften Zuständen des Nervensystems viel stärker hervortritt.

2. Die verschiedene Reaction der Druck- und Schmerzpunkte auf constante Deformationen zeigt sich nicht nur zu Beginn des Reizes, sondern auch im weiteren Verlauf. Setzt man das Reizhaar auf einen Druckpunkt, so tritt, wenn überhaupt, die Empfindung augenblicklich auf, verblasst aber sofort wieder und wird meist nach kurzer Zeit unmerklich. Man vergleiche hierüber die Ausführungen auf Seite 48 und 50.

Auf dem Schmerzpunkt tritt dagegen die Wirkung verspätet ein, gewinnt allmählich an Stärke, um nach Erreichung eines Maximums wieder abzunehmen. Ist bei Aufhören des Reizes noch Empfindung vorhanden, so verschwindet dieselbe nur sehr langsam. Der Schmerzpunkt kennzeichnet sich demnach in allen Stücken als das trägere Gebilde. Damit hängt zusammen, dass oscillirende Reize elektrischer oder mechanischer Natur auf dem Schmerzpunkt in der Regel zu einer continuirlichen Empfindung verschmelzen, wenn die Periode nicht sehr gross ist, während der Druckpunkt zur Wahrnehmung

oscillirender Reize besonders befähigt ist. Hierher gehören auch die Beobachtungen von Gad und Goldscheider (8) über die schmerzhafte Wahrnehmung von Inductionsschlägen, welche in geringer Zahl und in passenden Intervallen der Haut zugeführt werden. Einzeln unmerkliche Inductionsschläge können durch Wiederholung merklich werden. Ueber eine ähnliche Beobachtung vergl. II. S. 294.

Die ungleiche Beweglichkeit der als Druck- und Schmerzpunkte auf die Oberfläche der Haut sich projicirenden nervösen Einrichtungen hat den Vortheil, dass bei gleichzeitiger Reizung beider die Empfindungen sehr leicht gesondert werden können. Die Deformation wird, wenn sie sich in mässigen Grenzen hält, zuerst vom Druckpunkt wahrgenommen, dessen Erregung bereits verblasst oder gar schon verschwunden ist, wenn der Schmerz merkbar zu werden beginnt.

3. Mit den beschriebenen Erscheinungen verwandt ist eine interessante Beobachtung, welche von A. Goldscheider (10 und 8) herrührt. Drückt man den Kopf einer Stecknadel für einen Augenblick in die Haut, so folgt sehr häufig der dem Reize zeitlich entsprechenden Druckempfindung nach einem kurzen empfindungslosen Intervall eine zweite schmerzhafte Empfindung, welche bald wieder erlischt. Goldscheider erblickt in der Erscheinung einen Beweis für die secundäre Natur der Schmerzempfindung, welche erst im Rückenmark durch Summirung der Druckreize entstehen soll. Analysirt man jedoch den Vorgang genauer, wobei das Aesthesiometer mit zugeschärftem Haar gute Dienste leistet, so lässt sich die Erscheinung leicht in ihre Componenten zerlegen. Man findet

A. Auf schmerzfreien Druckpunkten fehlt die schmerzhafte Nachempfindung.

B. Schmerzpunkte in der Nähe von Druckpunkten zeigen die Erscheinung in der von Goldscheider angegebenen Weise.

C. Auf isolirt erregbaren Schmerzpunkten fehlt die den Reiz begleitende Druckempfindung, während die schmerzhafte Nachempfindung sehr deutlich auftritt.

Der Goldscheider'sche Versuch ist also zunächst nichts anderes, als ein besonderer Beweis für das ungleiche Verhalten zweier

nervöser Apparate demselben Reize gegenüber. Der Versuch bietet indessen noch ein weiteres theoretisches Interesse durch das Nachhinken der Erregung, worauf weiter unten noch einzugehen ist.

## Achter Abschnitt.

### Topographie der Schmerzpunkte.

Eine vollständige topographische Aufnahme der Schmerzpunkte einer Hautfläche bietet erhebliche Schwierigkeiten durch deren dichte Lage und hohe mechanische Schwellen. Eine Bestimmung mit schwächsten Reizen ist nicht ausführbar; sie wird durch die lange Latenz schmerzhafter Schwellenreize zu langwierig und ermüdend, dazu auch unsicher. Man muss also deutlich überschwellige Reize nehmen; dieselben stellen aber schon recht beträchtliche Deformationen der Haut dar und erschweren daher die Sonderung der dicht liegenden Punkte. Den einzigen Weg, diese Schwierigkeit zu umgehen, bietet die möglichste Verkleinerung der Reizfläche. Die besten Dienste haben mir die oben beschriebenen zugeschärften Pferdehaare geleistet, welche in das Aesthesiometer eingezogen eine bequeme Dosirung der Kraft gestatten. Erst mit diesem Hülfsmittel ist es mir gelungen, die Schmerzpunkte einer Hautstelle so vollständig und scharf zu bestimmen, dass eine nach mehreren Tagen wiederholte Prüfung derselben Stelle die erste Aufnahme durchaus bestätigte.

Frühere Versuche, die ich mit Schweinsborsten vornahm, gestatteten wohl, die grössere Dichte der Schmerzpunkte gegenüber den Druckpunkten zu erkennen, nicht aber die Sonderung nahe benachbarter Punkte genügend durchzuführen. Die damals bestimmte Zahl von 63 Schmerzpunkten in 0.88 $cm^2$ einer Hautfläche des Oberschenkels oder rund 72 im $cm^2$ ist daher noch sicherlich zu klein.

Will man eine vollständige topographische Aufnahme erreichen, so nehme man kleine Flächen von höchstens 20 $mm^2$ und theile sie durch Hülfslinien in mehrere Abtheilungen. Eine im vergrösserten Maassstabe ausgeführte Zeichnung der Fläche dient zum Eintragen der gefundenen Punkte, wobei die feinen Furchen der Haut die Orientirung sehr erleichtern. Die Aufsuchung geschieht mit der Lupe. Da die Zwischenräume zwischen den Schmerzpunkten für die

gewählte Reizstärke häufig nicht vollkommen schmerzfrei sind, so ist nur ein solcher Punkt als ein Schmerzpunkt anzusehen, von welchem ausgehend die Erregung nach allen Seiten hin abnimmt.

Eine in dieser Weise ausgeführte Durchmusterung einer Hautfläche auf dem Handrücken über dem Metacarpus des Ringfingers (durch Fig. 15 in 16facher Vergrösserung dargestellt) ergab 16 Schmerzpunkte gegen 2 Druckpunkte in 12.5 mm². Wurde der Reiz verstärkt, so verwandelten sich die schmerzhaften Punkte mit der sich ausbreitenden Deformation in kleine mehr oder weniger sich deckende Flächen, die maximale Empfindlichkeit im Mittelpunkte der Fläche blieb aber bestehen. Von den beiden haartragenden Druckpunkten der Fläche lag der eine in einer grösseren von Schmerzpunkten freien Lücke, während dem zweiten Druckpunkte zwei Schmerzpunkte nahe benachbart waren. Vergleiche die Figur.

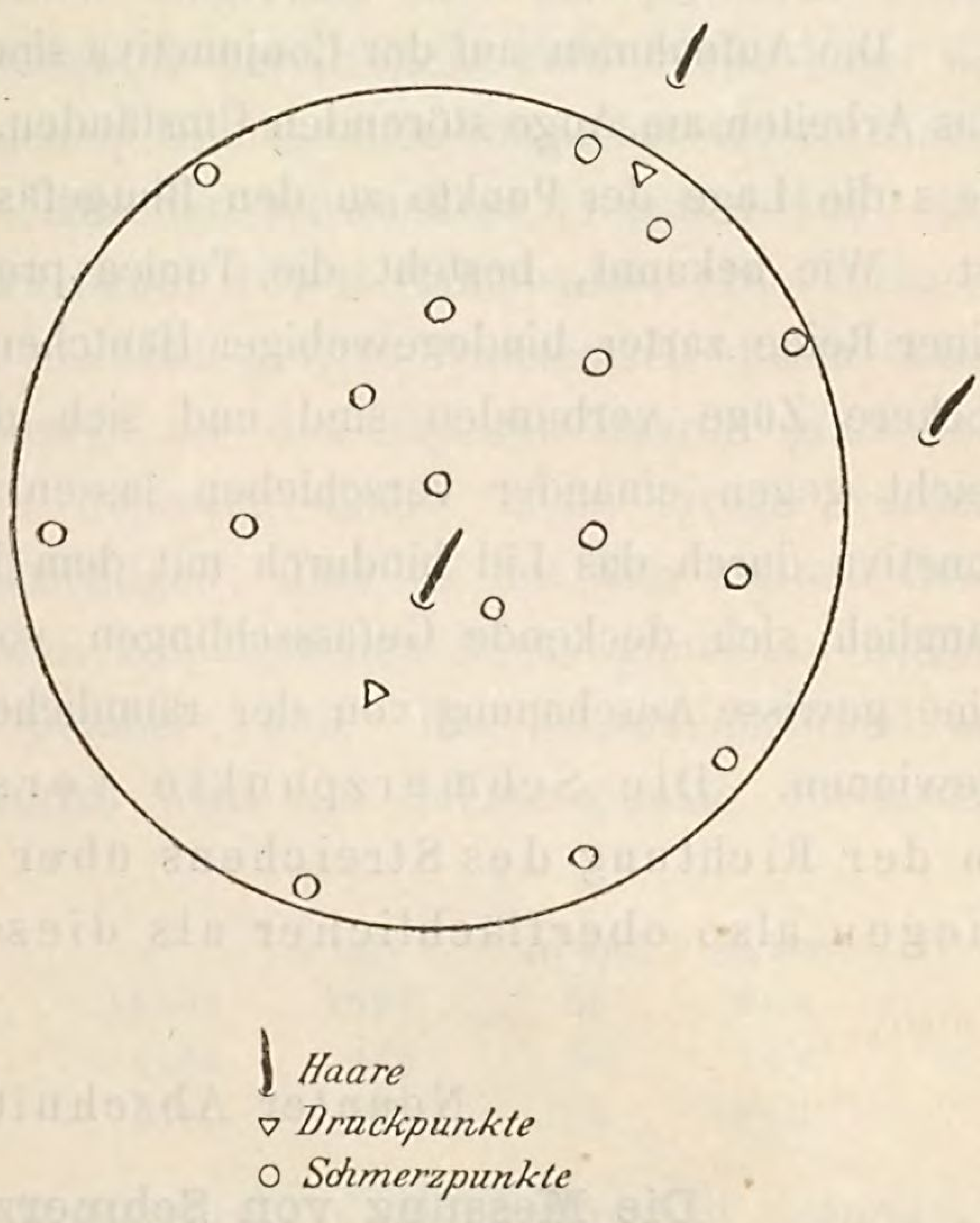



Fig. 15.

Nach diesem Versuche würden an dem genannten Orte durchschnittlich 1.3 Schmerzpunkte im mm² oder 100 bis 200 im cm² zu erwarten sein. Ich kann gegenwärtig nicht angeben, ob diese Zahlen auch für benachbarte Hautgebiete Gültigkeit haben; nach gelegentlichen Beobachtungen am Unter- und Oberarm bin ich aber sicher, dass auch dort ähnliche Werthe zu finden sein werden.

Eine wesentlich geringere Dichte der Schmerzpunkte habe ich auf der temporalen Fläche der Conjunctiva gefunden. Eine vor dem Winkelspiegel in fünffacher Vergrösserung ausgeführte Zeichnung der dort mit freiem Auge bei guter Beleuchtung sichtbaren Blutgefässe

erlaubt die gefundenen Punkte mit ziemlicher Genauigkeit einzutragen. Es ist nicht zweckmässig, sehr schwache Reize (feine Haare) anzuwenden, weil bei der geringen Dichte der Punkte die Absuchung zu zeitraubend und ermüdend sein würde. Die Aufnahme ergab in 29 $mm^2$ 35 Schmerzpunkte und 10 Kaltpunkte. Die Dichte nimmt gegen den Cornealrand zu, gegen die Umschlagsstelle der Conjunctiva ab. Ableitung einer Mittelzahl dürfte daher wenig Werth haben.

Die Aufnahmen auf der Conjunctiva sind, abgesehen von anderen das Arbeiten am Auge störenden Umständen, noch dadurch erschwert, dass die Lage der Punkte zu den Blutgefässen keine ganz constante ist. Wie bekannt, besteht die Tunica propria der Conjunctiva aus einer Reihe zarter bindegewebiger Häutchen, welche nur durch sehr lockere Züge verbunden sind und sich daher mit ihren Gefässen leicht gegen einander verschieben lassen. Streicht man die Conjunctiva durch das Lid hindurch mit dem Finger, so kann man anfänglich sich deckende Gefässschlingen von einander trennen und eine gewisse Anschauung von der räumlichen Anordnung der Gefässe gewinnen. Die Schmerzpunkte verschieben sich immer in der Richtung des Streichens über die Gefässe hinweg, liegen also oberflächlicher als diese.

## Neunter Abschnitt.

### Die Messung von Schmerzschwellen.

Die Vergleichung von Schmerzpunkten in Bezug auf ihre Erregbarkeit setzt voraus eine Vereinbarung über die Maasseinheit, in welcher sie zu messen ist. Gebraucht man das Aesthesiometer, d. h. ein Haar von constantem Querschnitt aber veränderlicher Länge, so kann man die Erregbarkeit durch die zur eben merklichen Reizung nöthige Länge messen. Die Schwelle liegt dann um so höher, je kürzer das Haar. Ist die Scala des Aesthesiometers nach Kräften geaicht, so wird man wegen der grösseren Anschaulichkeit und leichteren Vergleichbarkeit die Messung nach diesen Werthen vorziehen, da die Erregung zweifellos eine Function der Kraft des Reizes ist. Will man aber die Wirkung verschiedener Aesthesiometer oder Reizhaare mit einander vergleichen, so ist es nothwendig, auf die Grösse der deformirenden Fläche Rücksicht zu nehmen, denn es ist

unmittelbar klar, dass ein und dasselbe Gewicht, je nach der Hautfläche die es belastet, verschieden schmerzhaft sein kann. Um ein Urtheil zu gewinnen, welche Maasseinheit für den gegebenen Zweck am besten geeignet ist, wurden zunächst nach Drücken geaichte Reizhaare benutzt und an einer Anzahl Zwischenhaarfelder des Ober- und Unterarms wiederholt folgender Versuch angestellt.

1. Das durch Farblinien umgrenzte und zur leichteren Orientirung noch von einem Liniennetz durchzogene Feld wurde unter der Lupe mit Reizhaaren gleichen Drucks aber möglichst verschiedener Fläche abgesucht. Die Reizflächen schwankten zwischen 4000 und 34000 $\mu^2$, entsprechend 36 bezw. 104 $\mu$ Halbmesser. Die Versuche ergaben übereinstimmend merklich gleiche Wirksamkeit dieser Reize. In vereinzelten Fällen konnten mit den dickeren Haaren gefundene Schmerzpunkte durch die dünnsten Haare nicht erregt werden. Man muss hierbei berücksichtigen, dass es mit den kleinen Reizflächen schwieriger ist, den empfindlichen Punkt genau zu treffen.

2. Versuch am 11. October 1895. Ein Zwischenhaarfeld auf der Volarseite des Unterarms wird auf Schmerzpunkte durchsucht mit den Reizhaaren

| | $\mu$ | $\mu^2$ | mgr | gr/mm² | gr/mm |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | 121.5 | 46400 | 2600 | 56 | 21.4 |
| *g* | 33 × 43 (38) | 4460 | 250 | 56 | 6.6 |
| *h* | 33 × 58 (44) | 6010 | 935 | 156 | 21.4 |

*f* und *g* haben gleichen Druckwerth, *f* und *h* gleichen Spannungswerth. Die Vergleichung ergiebt: Mit *f* lassen sich wenige, mit *h* viele Schmerzpunkte nachweisen. Punkte, welche durch *f* erregbar sind, sind es in der Regel auch durch *g*, es bedarf aber sehr sorgfältigen Absuchens. Die Erregung durch *g* ist nicht merklich schwächer als durch *f*, dagegen ist *h* deutlich stärker reizend als *f*.

3. Versuch auf der Conjunctiva am 28. August 1895. Zu Grunde gelegt wurde die in fünffach vergrössertem Maassstab ausgeführte Karte eines Stückes Conjunctiva von der temporalen Fläche meines rechten Auges, in welche durch frühere Bestimmungen die Lage der Schmerzpunkte (sowie der Kaltpunkte) eingetragen war. Es wurden innerhalb eines durch Gefässschlingen abgegrenzten Theiles der mappirten Fläche die bekannten Schmerzpunkte abwechselnd berührt durch die Reizhaare

| | | |
|---|---|---|
| *d* | 3000 $\mu^2$ | 7 gr/mm² |
| *e* | 15400 $\mu^2$ | 7 gr/mm². |

Die beiden Reize liegen nur für einen Theil der Schmerzpunkte über der Schwelle und zwar zeigt sich, dass alle Punkte, die von *e* erregt werden, bis auf einen auch durch *d* erregt werden. Hier kommt zu der Schwierigkeit, den Punkt mit der kleinen Fläche richtig zu treffen, noch die oben erwähnte Verschieblichkeit der Punkte über den als Marken dienenden Gefässen.

Aus diesen Versuchen folgt mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass zur Erregung von Schmerzpunkten Reizhaare gleichen Druckes einander vertreten können, dass dagegen der für Druckpunkte maassgebende Spannungswerth nicht in Betracht kommt.

4. Der Vergleich wurde nunmehr auf grössere Flächen ausge-

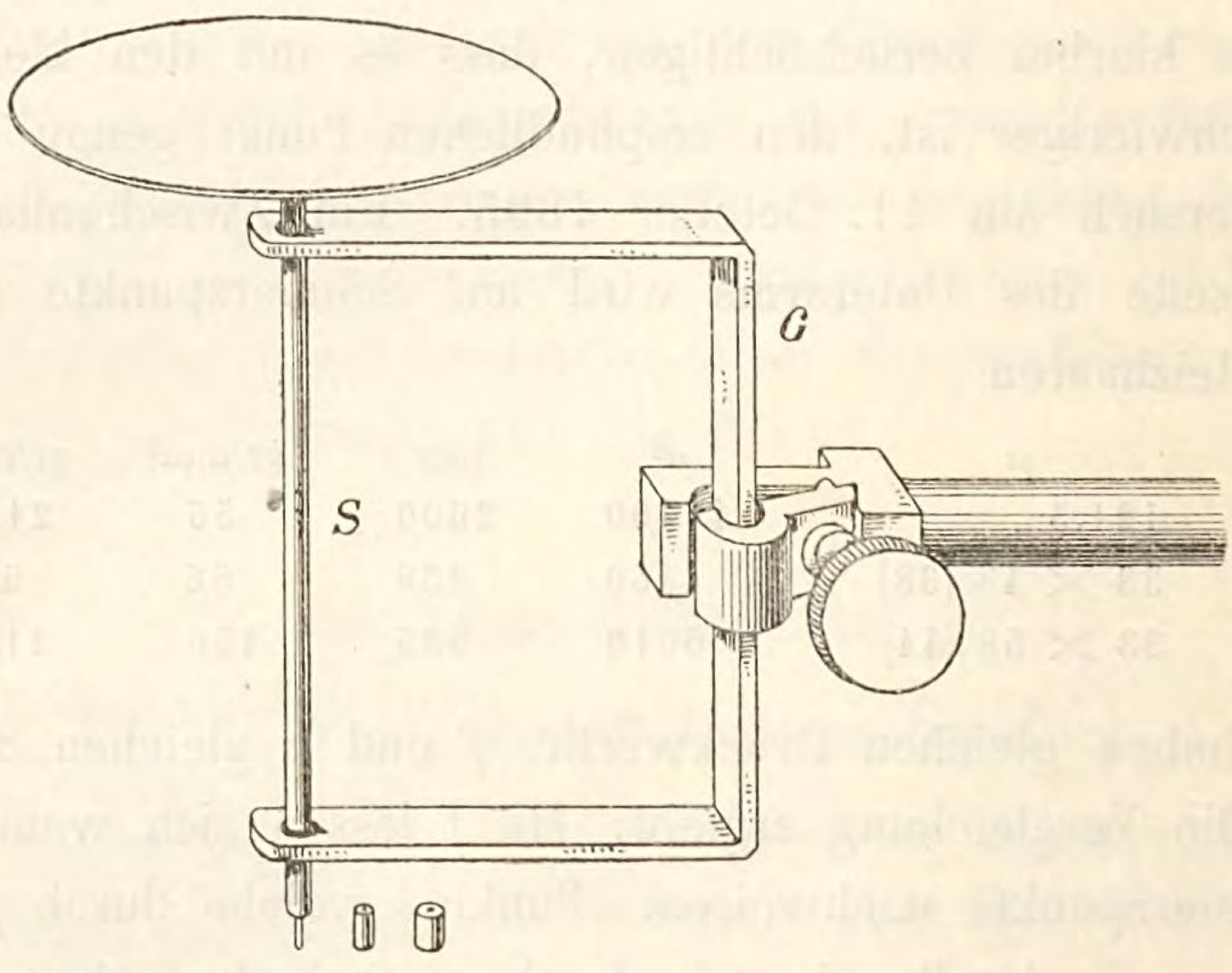



Fig. 16.

dehnt. Hierzu diente ein Messingstab *S* Fig. 16, welcher durch die Gabel *G* leichtgleitend hindurch gesteckt war. Das untere Ende verjüngte sich zu einem cylindrischen Stift von 0.9 mm Durchmesser, auf welchen nach Bedarf ein kleiner cylindrischer Messingstiefel von 2, 3 oder 4 mm Durchmesser aufgesteckt werden konnte. Das obere Ende des Stabes trug einen flachen Teller zum Auflegen von Gewichten.

Zum Versuche wurde zunächst an geeigneter Hautstelle ein möglichst empfindlicher Schmerzpunkt in weniger empfindlicher Um-

gebung ausgesucht, mit Farbe bezeichnet und vermittelst Reizhaaren auf seinen Schwellenwerth geprüft. Dann wurde der Messingstab aufgesetzt und auf den Teller so lange Gewichte gelegt, bis schmerzhafte Empfindungen angegeben wurden. Die nachstehende Tabelle enthält die Gewichte bereits auf die Flächeneinheit reducirt.

| Reagent | Ort | Schmerzschwellen in gr/mm² Reizhaar | Stab |
|---|---|---|---|
| F. | Epicondylus lat. humeri | 30 | 20—30 |
| | Ueber dem Radius | 20 | 25 |
| | Köpfchen der Ulna | 40 | 37 |
| | Kniescheibe | 49 | 50 |
| K. | Epicondylus lat. humeri | 30 | 40—50 |
| | Ebendort andere Stelle | 25 | 20—30 |
| | Capitulum ulnae | 39 | 41 |
| S. G. | Epicondylus lat. humeri | 30 | 35 |
| | Tibia | 25 | 22—25 |
| | Ebendort, andere Stelle | 25 | 27 |

Die Versuche zeigen, dass die Vertretungsfähigkeit von Schmerzreizen gleichen Drucks, welche für Flächen von dem Querschnitt der Reizhaare zutrifft, bis zu Flächen von 12.6 mm² gültig bleibt. Griffing (14 S. 70), welcher den Einfluss der Reizfläche auf die Schmerzschwelle von 10 mm² aufwärts bis 270 mm² untersucht hat, findet die wirksamen Gewichte nicht proportional den Flächen, sondern langsamer wachsend. Es erscheint indessen zweifelhaft, ob für so grosse Flächen alle Theile der gewählten Hautstelle als gleichmässig gereizt angenommen werden dürfen. Vielleicht würde sich schliesslich bei grossen Flächen eine ähnliche Anomalie herausstellen, wie sie der Meissner'sche Versuch für den Drucksinn erweist.

Wie dem aber auch sei, soviel ist sicher, dass im Gegensatz zu den Druckpunkten innerhalb der untersuchten Flächengrössen ein Grenzwerth fehlt, unterhalb dessen eine Messung des Reizwerthes nach Druckeinheiten nicht mehr zulässig ist. Es sind höchstens die kleinsten in den vorstehenden Versuchen benutzten Flächen, Reizhaare mit etwa 30 $\mu$ Halbmesser, für welche es vorläufig zweifelhaft bleiben muss, ob sie noch in den Gültigkeitsbereich dieses Maassstabes gehören. Unter Bezugnahme auf die früheren Erörterungen über die Ausbreitung der Deformation und das Druckgefälle in elastischen Platten folgt aber dann aus den eben mitgetheilten Versuchen, dass die den Schmerzpunkten eigenthümlichen nervösen

Elemente oberflächlicher liegen müssen, als die der Druckpunkte. Ihr Abstand von der Oberfläche ist wahrscheinlich erst gegenüber einem Halbmesser der Reizfläche von etwa 30 $\mu$ nicht mehr zu vernachlässigen. Unter diese Grösse herabzugehen ist indessen aus technischen Gründen kaum möglich, so dass für alle Reize, welche zur Schwellenbestimmung an Schmerzpunkten praktisch in Betracht kommen, die Aichung nach Druckeinheiten durchgeführt werden darf.

Ist damit die Frage nach dem Maassstabe im Wesentlichen als gelöst zu betrachten, so ist die vergleichende Schwellenbestimmung an Schmerzpunkten verschiedener Hautgebiete doch noch mit einigen Schwierigkeiten verknüpft. Da die Latenzzeit wächst, wenn die Reizstärke abnimmt, so ist es bei Schwellenbestimmungen schliesslich schwierig zu sagen, wie lange man auf den Erfolg eines Reizes warten will. Lässt man lange Latenzzeiten zu, so werden die Bestimmungen sehr ermüdend und unsicher. Es ist daher wohl besser, die Länge der Latenzzeit zu beschränken und festzusetzen, dass alle Reize, die nicht in kurzer Zeit wirksam werden, als unterschwellige zu gelten haben. Nach diesem Princip ist bei der Aufstellung der Tabelle verfahren worden, welche ich in II. S. 284 seinerzeit veröffentlicht habe. Als ein weiterer Beitrag können die oben angeführten Schwellenwerthe gelten, doch ist zu berücksichtigen, wie auch schon erwähnt wurde, dass diese Werthe ausgesucht niedrige sind, welche über die mittlere Schmerzempfindlichkeit des betreffenden Körpergebietes noch kein Urtheil gestatten, weil die örtlichen Schwankungen ziemlich beträchtlich sind. Befriedigenden Einblick könnten daher auch hier nur systematisch durchgeführte Bestimmungen für alle Schmerzpunkte einer gegebenen Fläche gewähren, eine Aufgabe, die noch nicht in Angriff genommen ist.

Der einzige Ort, von dem mir der Umfang der Variationen einigermassen bekannt ist, ist die Conjunctiva. Auf der temporalen Fläche meiner rechten Conjunctiva sind durch 2 gr/mm$^2$ reizbare Punkte nur ganz vereinzelt anzutreffen, die Reizung ist sehr schwach. Mit 7 gr/mm$^2$ wird, wie der oben beschriebene Versuch zeigt, bereits eine grössere Zahl der Punkte, etwa die Hälfte gereizt und mit 17 gr/mm$^2$ anscheinend alle, denn mit 26 gr/mm$^2$ hat sich eine Zunahme der empfindlichen Punkte nicht nachweisen lassen.

Dritter Theil.

# Beziehungen zwischen Druck- und Schmerzpunkten.

## Zehnter Abschnitt.

### Schwellenvergleichung.

Aus den mitgetheilten Versuchen über die Wahrnehmung deformirender Einwirkungen folgt, dass die Haut zwei für hydrostatischen Druck bezw. dessen Aenderungen empfindliche Apparate besitzt, deren Erregbarkeit aber eine sehr verschiedene ist. Ein Vergleich der Erregbarkeit ist für solche Reize möglich, deren Reizflächen die Aichung nach Druckeinheiten für beide Empfindungsarten gestatten, nämlich für Flächen von 3.5 bis 12.6 $mm^2$ Inhalt. Dabei finden sich für die Druckempfindung Werthe bis herab zu 20 $mgr/mm^2$ oder 0.002 Atmosphären, für die Schmerzempfindung 2 Atmosphären, die Atmosphäre zu rund 10 $gr/mm^2$ gerechnet. Die Empfindlichkeit der Nervenenden des Drucksinns ist demnach für Einwirkungen genannter Flächengrösse etwa 1000fach grösser, als die der Schmerznerven.

Wird die Reizfläche kleiner, so büsst der Reiz, welcher angenommen constanten Druckwerth behalten soll, an Wirksamkeit für die Druckpunkte sehr bedeutend ein, wie früher ausführlich gezeigt worden ist. Meine ersten mit Reizhaaren angestellten Versuche, eine Zahl für das Schwellenverhältniss aufzustellen, I. S. 188, II. S. 285, ergaben daher nicht entfernt so grosse Werthe, wie sie sich bei Reizung grösserer Flächen herausstellen. Da sich nun ferner gezeigt hat, dass die Reizung der Druckpunkte ungefähr constant bleibt, wenn die Belastungen proportional den Halbmessern abnehmen, so lässt sich voraussagen, dass die in Gewichten oder auch in Drücken gemessenen Schwellenreize für Druck- und Schmerzpunkte sich um so weniger von einander unterscheiden werden, je kleiner die gereizte Fläche wird, und dass bei genügender Verkleinerung schliesslich ein gegebenes Gewicht zwar Schmerz, aber nicht Druckempfindung auslösen wird.

Es schien mir interessant, eine experimentelle Prüfung dieser Folgerung zu versuchen. Benutzt wurde ein Reizhaar mit den Constanten:

| | |
|---|---|
| Halbmesser | 0.018 mm |
| Fläche | 0.001 $mm^2$ |
| Kraft | 30 mgr |
| Druck | 30 $gr/mm^2$ |
| Spannung | 1.7 gr/mm. |

Nachdem in der Ellenbeuge ein Zwischenhaarfeld hoher Schmerzempfindlichkeit gewählt worden war, wurde versucht, einzelne Schmerzpunkte mit dem beschriebenen Haar zu erregen, was in der That gelang. Die Empfindung war schwach, nicht andauernd, aber deutlich. Von den benachbarten Druckpunkten wurden einige durch das Haar erregt, für andere war es unter der Schwelle.

Durch den Versuch ist die Möglichkeit erwiesen, einen mechanischen Reiz herzustellen, der für Druck- und Schmerzpunkte durchschnittlich von gleicher Wirksamkeit ist. Zum Theil war jedoch bereits eine Umkehrung des Schwellenverhältnisses erreicht, indem der Reiz für manche Schmerzpunkte überschwellig, für manche Druckpunkte unterschwellig war.

Mit dieser eigenthümlichen Wirkung kleiner Flächen hängt zusammen, dass die Berührung mit eckigen, scharfkantigen, rauhen Gegenständen sehr leicht und im unmittelbaren Anschluss an die Druckempfindung schmerzhaft wird, auch wenn es nicht zu einer Verletzung der Epidermis kommt. Man ist daher bestrebt, die Gebrauchsgegenstände mit glatten und abgerundeten Flächen zu versehen.

Bei Berührung mit grösserer Fläche kommt dagegen die Druckempfindung immer mehr zur Geltung, und ist dann, wie an den eigentlichen Tastflächen, die Schmerzschwelle an sich noch eine hohe, so wird der Belastungsunterschied zwischen Druck- und Schmerzreizen ein ausserordentlich grosser. In dieser Richtung kommt noch ein weiterer Umstand in Betracht, nämlich die Wölbung der Tastflächen. Sie bewirkt, dass die erste Berührung im Allgemeinen mit kleiner Fläche erfolgen wird, die Druckpunkte also sofort mit relativ hohen Drucken beansprucht werden. Geschieht das Erfassen kräftiger, so wächst auch, sofern es sich nicht um sehr unregelmässig gestaltete Objecte handelt, rasch die Berührungsfläche und es muss die Kraft

entsprechend steigen, wenn Schmerz auftreten soll. Namentlich kann gegen schmiegsame Objecte grosse Gewalt gebraucht werden, ohne dass der Angreifer Schmerz empfindet. Dabei geht die Druckempfindung an den zuerst berührten Stellen relativ zurück, nicht nur weil die Berührungsfläche wächst, sondern weil damit auch das Druckgefälle im Innern der Haut abnimmt, oder gar wie bei dem MEISSNER'schen Versuch Null werden kann.

## Elfter Abschnitt.

## Anatomische Betrachtungen.

Auf Grund der vorstehend beschriebenen Erfahrungen lässt sich die Frage nach den nervösen Einrichtungen, durch welche Druck- und Schmerzempfindung der Haut vermittelt werden, schärfer stellen und beantworten. Vor allem ist hervorzuheben, dass für keine der beiden Empfindungsarten die Haut als eine gleichmässig reizbare Fläche sich erwiesen hat, dass vielmehr die Empfindlichkeit in gewissen Punkten concentrirt ist, zwischen welchen Reize nur dann wirksam werden, wenn sie sich auf die benachbarten Punkte ausbreiten. Auf diese Orte ist also die sinnesphysiologische Function der Haut beschränkt und es kann nicht zweifelhaft sein, dass in ihnen jene nervösen Einrichtungen zu suchen sind, welche in der Einleitung als die Sinneseinheiten oder Sinneselemente der Haut bezeichnet wurden.

Was zunächst die Druckempfindung anbelangt, so ist directe Nervenerregung ausgeschlossen und das Vorhandensein besonderer Empfangsorgane nothwendig, nicht nur durch die niedrigen mechanischen Reizschwellen im Vergleich zu denen der Nerven[1]),

[1]) Die Deformationsarbeit, welche zur mechanischen Erregung der Nerven einerseits, der Haut anderseits nöthig ist, lässt sich mangels genügender Versuchsdaten nicht genau angeben, wohl aber ihrer ungefähren Grössenordnung nach schätzen. TIGERSTEDT (29) fand als kleinste noch wirksame lebendige Kraft des Reizes für einen Froschischiadicus 0.2 gr/mm. Die Deformation wurde erzeugt durch einen Kupferdraht von etwa 1 mm Durchmesser, welcher auf den Nerven herabfiel und auf denselben quer zu liegen kam. Nimmt man für den Nerven ebenfalls einen Durchmesser von 1 mm an, so ist die deformirte Fläche 1 mm$^2$, wobei die Wölbung des Drahtes wie die des Nerven vernachlässigt wird. Anderseits finden sich unter den Versuchen mit der Schwellenwage wiederholt Druckschwellen von

sondern auch durch das abweichende Verhalten der Erregung namentlich in zeitlicher Beziehung, wie das oben auseinandergesetzt wurde. Die Wahl unter den der Haut eigenthümlichen sensiblen Nervenendigungen ist an den behaarten Stellen dadurch beschränkt, dass das Haar selbst einen Theil, einen Hülfsapparat des Sinneselementes darstellt. Es kann nur eine mit dem Haar oder seinen Hüllen in fester Beziehung stehende, constant vorkommende Nervenendigung in Betracht kommen. Diesen Anforderungen entspricht nach den Angaben der Autoren, von welchen besonders BONNET (5) zu nennen ist, nur jener Nervenkranz, welcher dicht unter der Mündung der Talgdrüsen den Haarbalg umgibt und mit seinen Ausläufern bis an die Glashaut vordringt. An Dickenschnitten der Haut, deren Nerven durch Gold sichtbar gemacht sind, findet sich der erwähnte Nervenkranz nicht etwa nur vereinzelt, sondern, wie ich mich selbst überzeugte, mit der grössten Regelmässigkeit an jedem Haar.

An den haarlosen Hautflächen giebt die Zahl der Druckpunkte einen ersten Anhaltspunkt. Es ist oben gezeigt worden, dass auf der Beugeseite des Handgelenks die Zahl der Druckpunkte zwischen 12 und 41 im $cm^2$ schwankt und dass ihre Dichte gegen die Hohlhand zunimmt. Auf dem Daumenballen konnten innerhalb einer Fläche von 12.6 $mm^2$ 14 Druckpunkte, innerhalb einer zweiten gleichgrossen mehr distal gelegenen Fläche deren 17, endlich über dem Metacarpus des kleinen Fingers 15 gezählt werden, entsprechend 111, 135 und 119 im Quadratcentimeter. Die grosse Zahl der Punkte und die Dicke und Derbheit der Epidermis machen hier die Sonderung schwierig und in erhöhtem Maasse gilt dies für die Fingerbeeren, wesshalb dort eine Zählung nicht versucht wurde. Doch lässt sich mit Hülfe der Reizhaare deutlich erkennen, dass hier die empfindlichen Punkte noch dichter liegen, als auf den vorgenannten Orten. Nimmt man an, dass auf jeden Quadratcentimeter der Hohlhand 100 Druckpunkte kommen, was hinter den wirklichen

---

24 $mgr/mm^2$. Die dabei auftretende Eindrückung der Haut überschritt, wie ich mich durch besondere Versuche mit einem Fühlhebel überzeugte, nicht den Werth von 0.05 mm und war wahrscheinlich noch geringer. Die von dem Reize pro $mm^2$ an der Haut geleistete Arbeit betrug demnach, die Deformation proportional der Kraft angenommen, $\frac{1}{2} \times 0.05$ mm $\times$ 0.024 g $=$ 0.0006 gr/mm. Die Arbeit war also mindestens 300 mal kleiner.

Zahlen sicher weit zurückbleibt, so würden auf die Fläche der Vola von ungefähr 150 $cm^2$ 15000 Punkte zu rechnen sein. Auf Grund dieses Ueberschlages sind die Vater'schen Körperchen auszuschliessen, deren Herbst (15) 608 in der Hohlhand fand. Gegen diese spricht auch ihre tiefe Lage, sowie ihr Vorkommen an Orten (Zwischenknochenmembranen des Unterarms und Unterschenkels, Gegend des Plexus coeliacus etc.), wo von einer Druckempfindung in dem Sinne, wie die Haut sie besitzt, nicht die Rede sein kann.

Es giebt unter den bekannten sensiblen Nervenendigungen der unbehaarten Haut nur eine einzige Form, welche der Forderung genügender Häufigkeit entspricht, nämlich das Tastkörperchen von Meissner (19). Der Entdecker macht über ihr Vorkommen folgende Angaben:

Zahl der Tastkörper im $mm^2$ auf den Volarflächen.

| | |
|---|---|
| 3. Phalange | 21 [1]) |
| 2. „ | 8 |
| 1. „ | 3 |
| Metacarpus des kleinen Fingers | 1—2 |

Die letzte dieser Zahlen stimmt mit der Anzahl der Druckpunkte an gleicher Stelle sehr gut überein.

Es mag ferner daran erinnert sein, dass aus den oben beschriebenen Schwellenbestimmungen eine der Oberfläche sehr nahe aber nicht mit ihr zusammenfallende Lage der Organe des Drucksinns angenommen werden muss. Auch in dieser Richtung entsprechen die Meissner'schen Körperchen den Anforderungen des Versuchs. Es kann demnach nicht zweifelhaft sein, dass sie als Organe des Drucksinns anzusprechen sind.

Die Schwierigkeit, welche für diese Auffassung früher darin bestand, dass die Körperchen, wenn nicht ausschliesslich so doch ganz überwiegend auf die unbehaarten Körpertheile beschränkt sind, kann als gehoben gelten, seitdem die Beziehung der Haare zum Drucksinn nachgewiesen ist. Das Haar, so weit es sinnesphysiologische Functionen besitzt, und das Meissner'sche Tastkörperchen sind einander vertretende Organe, womit übrigens nicht gesagt ist, dass

1) Die Angabe: 108 Tastkörperchen in 2.2 □ mm (Kölliker 16, S. 184) beruht auf einem Umrechnungsfehler. Es soll heissen: 108 Tk. in einem Quadrate von 2.2 mm Seitenlänge oder 4.84 $mm^2$ Fläche.

sie functionell völlig gleichwerthig sind. Vergl. die Bemerkungen auf Seite 69.

Endlich möchte ich auf eine anatomische Eigenthümlichkeit der Tastkörperchen hinweisen. Meissner giebt an, dass dieselben in der Regel zwei markhaltige Nerven empfangen, manchmal drei, selten nur einen. Man hat bisher diese Beobachtung verzeichnet, ohne ihr eine Bedeutung zuschreiben zu können. Nun hat aber kürzlich A. Bethe (2) in einer ausgezeichneten Arbeit gezeigt, dass die als Nervenhügel bezeichneten Sinnesorgane der Froschzunge innervirt werden durch eine relativ kleine Zahl von Nervenfasern, welche in die Zunge eintreten. Indem diese Stammfasern sich mehrfach theilen, kann jeder Nervenhügel mit zwei markhaltigen Aesten versorgt werden. Das Eigenthümliche der Versorgung besteht darin, dass die beiden Nerven eines Sinneshügels niemals aus derselben Stammfaser entspringen, sondern stets von verschiedenen, und dass die Aeste der Stammfasern so zu zweien combinirt sind, dass Wiederholungen nicht vorkommen. Bethe erblickt in diesem Vorkommen, wohl mit Recht, eine Einrichtung, durch welche aus einer geringen Zahl von Stammfasern (also mit Ersparung von Nervenmaterial) eine grosse Zahl von Endapparaten so innervirt werden, dass die Erregung jedes Endorgans von jedem anderen zu unterscheiden, mit anderen Worten zu localisiren ist. Es scheint mir durchaus kein Zufall, dass die Meissner'schen Körperchen, die Organe des Drucksinnes und hauptsächlichsten Träger des Ortssinnes der Haut, eine Innervation besitzen, welche der eben beschriebenen an die Seite zu stellen ist. Denn Meissner berichtet bereits nicht nur die Versorgung jedes Körperchens mit in der Regel zwei Nervenfasern, sondern weiter, dass diese Nerven aus Stammfasern hervorgehen und dass die Aeste einer Stammfaser sich zu verschiedenen Papillen begeben. Ich zweifle nicht, dass hierin eine Einrichtung zu erblicken ist, welche in dem Sinne Bethe's die Unterscheidung der Sinneselemente durch Localzeichen ermöglicht ohne übermässige Belastung der Leistungsbahnen mit Nervenfasern.

Die Empfindung des Schmerzes muss ihren Auslösungsort noch näher der Oberfläche haben, als die Druckempfindung. Dies wird gefordert durch die trotz Verkleinerung der Fläche unveränderte Wirksamkeit von Reizen constanten Drucks, durch die niedrigen elek-

trischen Punktschwellen, durch das primäre Auftreten der Schmerzempfindung beim Anätzen der Haut. Näher der Oberfläche als die Tast- oder Druckkörperchen sind aber nur die intraepithelialen, freien Nervenendigungen, welche daher als die Organe der (oberflächlichen) Schmerzempfindung der Haut zu betrachten sind. Zu dem gleichen Schlusse wurde ich schon durch frühere Untersuchungen geführt, welche sich die Verbreitung der einzelnen Empfindungsarten der Haut über ihre Fläche zur Aufgabe setzten (I. S. 193; III. S. 173). Durch dieselben wurde festgestellt, dass in gewissen Gebieten der Haut einzelne Empfindungsarten fehlen; die dort vorhandenen Nervenendigungen müssen daher den übrig bleibenden Empfindungsarten entsprechen. So besitzt z. B. die Cornea ihren Randtheil ausgenommen nur Schmerzempfindung; ihre Nervenendigungen sind intraepitheliale. Der überall vorhandenen Schmerzhaftigkeit der Haut entspricht ein sehr verbreitetes Vorkommen der freien Endigungen im Epithel, wie durch zahlreiche Untersuchungen von Langerhans (18), Ranvier (24), Retzius (25), Kölliker (16) u. A. nachgewiesen ist.

Nennt man eine Endigung nur dann frei, wenn sie zwischen oder an undifferenzirten Zellen endigt[1], so sind die Nerven der Merkel'schen Zellen (21) nicht als freie Endigungen anzusehen. Ihre Bedeutung ist dunkel. Die Angabe Merkel's, dass sie sich beim Menschen an den der Tastkörperchen entbehrenden Hautstellen finden, spricht gegen ihre Function als Tastorgane; der »Tastsinn« dieser Stellen ist bereits durch die Haare gedeckt.

Die freien intraepithelialen Endigungen sind an der Cornea am genauesten studirt. Die Art, wie sie aus den zutretenden Nerven entstehen, der frühe Verlust der Markscheide, die vielfachen Theilungen und Verflechtungen (Plexusbildung) lassen isolirte Leitung von Erregungen schwerlich zu und dürften mit dem thatsächlich schlechten Localisationsvermögen der Cornea in Beziehung stehen. Ob das Epithel der äusseren Haut, deren Localisationsvermögen für Schmerz ebenfalls gering, wenn auch nicht so schlecht wie das der Cornea ist, ihre freien Nervenenden in gleicher Weise zugetheilt erhält, ist nicht genau bekannt.

Schmerz kann nicht nur von der Oberfläche der Haut ausgelöst

---

[1]) Ich entnehme diese Definition einer brieflichen Mittheilung des Herrn Bethe.

werden. Die grosse Empfindlichkeit der Wunden und granulirenden Flächen ist bekannt. Injectionen von Kochsalzlösungen in die Cutis sind im Allgemeinen schmerzhaft, um so mehr, je weiter die Concentration von der isotonischen abweicht. Man vgl. darüber Schleich (26). Neben einer directen Reizung der marklosen oder vielleicht wenig Mark besitzenden Schmerznerven in ihrem Verlaufe ist übrigens die Endigung schmerzempfindender Fasern in anderen Theilen der Haut als der Epidermis nicht ausgeschlossen. Die Venen der Haut scheinen schmerzempfindlich zu sein. Contusion derselben führt zu langdauernden, intensiven und eigenthümlich dumpfen Schmerzempfindungen.

Die hohe Reizschwelle, welche die freien Nervenenden der Epidermis, trotz ihrer oberflächlichen Lage, nicht verletzenden mechanischen Eingriffen gegenüber auszeichnet, ist aus der Widerstandsfähigkeit des Epithels verständlich. S. Garten (9 S. 414) hat mit Hülfe von einwandfreien Härtungsmethoden nachgewiesen, dass die Deformation der Epidermis viel schwerer zu erreichen ist als die der Cutis. Letztere passt ihre Form den mechanischen Einwirkungen an, während die Epidermis als eine schmiegsame aber nahezu unelastische Haut ihre Dicke nicht ändert.

## Zwölfter Abschnitt.

## Bemerkungen zur Mechanik der Nervenerregung durch Druck- und Schmerzreize.

Auf die Frage, wie die Nervenerregung durch Druck- und Schmerzreize zu Stande kommt, kann nur mit Hypothesen geantwortet werden. Nachdem aber die vermittelnden Organe erkannt sind, scheint es gerechtfertigt, auf Grund der anatomischen Verhältnisse sowie der experimentellen Erfahrungen einige Ueberlegungen anzustellen.

### 1. Die Druckempfindung.

Die Erregung findet, wie oben ausgeführt, nicht statt in Form einer directen mechanischen Erregung der Drucknerven; es stellt daher das Tastkörperchen nicht einen Apparat dar, welcher den Druck als solchen auf den Nerven überträgt. Man kann einen Nerv

auf mechanischem Wege nicht dauernd erregen, am wenigsten durch so geringfügige Drucke, wie die Haut sie empfindet. Es bedarf also eines Zwischen- oder Auslösungsapparates, um die durch den Druck erzeugte Deformation in eine dauernde Arbeitsleistung am Nerven umzusetzen.

Die Physiologie kennt nur zwei Arten von Reizen, welche andauernde Erregung der Nerven bedingen: elektrische und chemische. Dass durch die deformirenden Einwirkungen im Tastkörperchen eine Störung des elektrischen Gleichgewichts herbeigeführt werde, kann nicht als unmöglich bezeichnet werden. Im Grunde läuft aber doch diese Annahme wieder auf Störuugen des chemischen Gleichgewichtes hinaus, auf deren Betrachtung ich mich daher beschränke.

Die durch den mechanischen Reiz in dem Tastkörperchen hervorzubringende chemische Aenderung wird voraussichtlich keine eingreifende und stark umstimmende sein, namentlich keine solche, welche dem Organ einen lebhaften Stoffwechsel aufbürdet. Zwar ermüden die Tastkörperchen leicht, erholen sich aber sehr rasch wieder, auch ist es kaum möglich, sie selbst durch sehr langanhaltende mechanische oder elektrische Reize vollständig zu erschöpfen. Gegen einen lebhaften Stoffwechsel spricht ihre Entfernung von den Blutgefässen. Bekanntlich sind Blutgefässe und Tastkörperchen nur ausnahmsweise in einer Papille vereinigt. Am wahrscheinlichsten halte ich die Erregung durch Concentrationsänderungen, für welche verschiedene Gründe sprechen. Sie erregen den Nerven stark und andauernd ohne ihn zu schädigen; bei der Rückkehr zur normalen Concentration wird auch die ursprüngliche Erregbarkeit bald wieder hergestellt. Nun lehrt der Versuch, dass die Entstehung von Druckempfindung an die Deformation der Haut gebunden ist, und dass sie ausbleibt, wenn die Haut in ihrer ganzen Dicke unter den gleichen, beliebig hohen Druck gesetzt wird, also ein Druckgefälle fehlt. Druckdifferenzen im Inneren der Haut führen aber zur Verschiebung der Gewebsflüssigkeit, wie das Zurückbleiben der Druckbilder beweist. Hierbei können auch Concentrationsänderungen entstehen. Denkt man sich eine Lösung eingeschlossen in einen Raum, dessen Wände zwar für das Lösungsmittel, nicht aber für den gelösten Stoff durchgängig sind, so wird bei einer Drucksteigerung im Raume das Lösungsmittel austreten und die Concentration steigen.

Wendet man diese Vorstellung auf das MEISSNER'sche Körperchen an, so muss man vor allem fragen, ob die wahrnehmbaren kleinsten Drucke zur Herstellung erregender Concentrationen genügen. Diese Frage lässt sich nicht allgemein beantworten, da man nicht weiss, welche Stoffe in Betracht kommen. Die im Wesentlichen gleichartig erregende Wirkung der verschiedensten Stoffe auf den Nerv lässt schliessen, dass diese Stoffe reizen, nicht weil sie in den Nerven eindringen, sondern weil sie eine im Nerven vorhandene Lösung concentriren. Wie gross die Concentrationsänderung in einem Froschnerv sein muss, um ihn zu erregen, ist nicht bekannt. Sollten für das Tastkörperchen ausgiebige Concentrationsänderungen nöthig sein, so ist zu bedenken, dass es dazu in der Regel sehr grosser Druckkräfte bedarf, weil die in den Körpersäften gelösten Stoffe im allgemeinen sehr hohe osmotische Drucke entwickeln. Etwas anderes wäre es, wenn Eiweisskörper in Betracht kämen. E. STARLING (28) hat kürzlich gezeigt, dass die Eiweisskörper des Serums einen osmotischen Druck von 30—40 mm Hg entwickeln. Da ein Tastkörperchen auf einen Druck von 0.002 bis 0.003 Atmosphären oder 1.5 bis 2 mm Hg reagiren kann, so würde dies für Serum eine Zunahme der Eiweissconcentration um $\frac{1}{20}$ des ursprünglichen Werthes bedeuten. Ob eine solche Aenderung zur Erregung genügt, oder ob Stoffe von noch geringerem osmotischen Druck in Betracht kommen, muss dahingestellt bleiben.

Auf Grund der entwickelten Vorstellung gewinnt auch die leichte »Ermüdbarkeit« der Druckpunkte, sowie ihre Empfindlichkeit gegen rasche Druckschwankungen eine besondere Bedeutung, indem man darin vielleicht nicht nur den Ausdruck nervöser, sondern auch physikalischer Eigenschaften des reizbaren Apparates zu erblicken hat. Nimmt man nämlich an, dass die »halbdurchlässige« Wand für den gelösten Stoff nicht absolut dicht ist, so wird die durch einen gegebenen Druck herbeigeführte erhöhte Concentration nicht constant bleiben, sondern von einem anfänglichen Maximum herabsinken, welcher Aenderung dann auch die Erregung folgen müsste. Eine nähere Ausführung dieser Möglichkeiten ist indessen vorläufig nicht beabsichtigt.

## 2. Schmerzempfindung.

Von den Gründen, welche gegen eine directe Wirkung des mechanischen Reizes auf die Nerven vorgebracht worden sind, gilt der eine auch für die Schmerznerven. Bei andauernder Deformation ist die Schmerzempfindung, schwächste Reize ausgenommen, andauernd. Constante Deformationen sind aber für den Nerv nicht constante Reize. Es ist also auch hier das Eintreten eines Zwischenprocesses, am wahrscheinlichsten in Form eines chemischen Vorganges anzunehmen.

Die Nerven der Epidermis liegen bekanntlich nicht in den Zellen, sondern in den durch die Intercellularbrücken durchzogenen Räumen zwischen den Zellen. Aendert die Flüssigkeit in diesen Räumen ihre Zusammensetzung, so tritt voraussichtlich Erregung ein. Wahrscheinlich tritt Flüssigkeit aus den Zellen in die Zwischenräume über und die Reizung erfolgt entweder, weil die an den Nerv herantretende Lösung zu verdünnt ist (in Folge Undurchlässigkeit der Zellwand für die in der Zelle gelösten Stoffe) oder weil neue fremdartige Stoffe an den Nerv gelangen. Für die teleologische Betrachtung ist die Annahme verlockend, dass es die schädigenden äusseren Einwirkungen bezw. die im Körper auftretenden pathologischen Processe sind, welche schmerzhaft empfunden werden. Welcher Art der oder die chemischen Körper sein sollen, welche die Schmerznerven erregen, bleibt unbekannt.

Unter allen Umständen dürfte ein mechanisch wichtiger Punkt nicht zu übersehen sein. Flüssigkeit kann aus den Zellen nur dann in die Zwischenräume austreten, wenn dort Platz geschafft wird, d. h. wenn die vorhandene Flüssigkeit nach anderen Orten ausweicht. Dies wird bei der ausserordentlichen Enge der Räume nur sehr langsam geschehen können, wodurch verständlich wird, dass die Schmerzempfindung auf mechanische Reize namentlich bei Schwellenreizen so träge eintritt. Auch die lange Nachdauer des Schmerzes ist auf diese Weise erklärlich, womit nicht gesagt ist, dass die träge Reaction der Organe des Schmerzes nur auf diesem Umstande beruht. Angesichts der Thatsache, dass der schmerzempfindende Apparat auch auf electrische Reize träge reagirt, wird die Annahme einer geringeren Beweglichkeit der Schmerznerven in ihren physiologischen Aeusserungen nicht zu umgehen sein.

# Rückblick.

Die Ergebnisse der mitgetheilten Untersuchungen können in folgenden Sätzen zusammengefasst werden.

Zur Erregung von Druckempfindungen auf der Haut bedarf es einer Deformation derselben, oder im Sinne des Reizes gesprochen einer Belastung von endlicher Grösse. Belastungen von der Grösse des Schwellenreizes werden nur im Moment des Aufsetzens gefühlt (Berührungsempfindung), Dauer und Ende des Reizes bleiben unerkannt. Ueberschwellige Reize können dauernd, wenn auch mit abnehmender Intensität gefühlt werden. Die Entlastung wird stets schwerer wahrgenommen als die Belastung. Häufig überdauert die Empfindung den Reiz, wahrscheinlich in Folge der Deformation, welche derselbe in der Haut für einige Zeit zurücklässt.

Die Feinheit des Drucksinns einer Hautstelle kann nicht in Gewichten gemessen werden, weil für den Schwellenwerth des Reizes neben der Grösse der Belastung auch die Schnelligkeit ihres Einsetzens, sowie die Reizfläche von Bedeutung ist. Der Einfluss der Belastungssteilheit ist am auffälligsten bei geringen Werthen derselben, bei hohen Werthen wird er fast unmerklich. Aus der Combination verschiedener Gewichte mit verschiedenen Flächen ergiebt sich, innerhalb gewisser Grenzen der Reizfläche, dass Reize gleichen hydrostatischen Drucks gleich gefühlt werden. Die Erregung des Drucksinns erscheint demnach als eine Function des hydrostatischen oder Gewebsdruckes.

Die Druckwerthe in dem soeben bezeichneten Sinne, auf welche die Haut anspricht, sind innerhalb eines anatomisch einheitlichen Hautbezirkes von Ort zu Ort wechselnd, um so deutlicher, je kleiner die Reizflächen sind. Unter Verwendung von Reizhaaren lassen sich die empfindlichen Orte auf sehr umschriebene Stellen, sogenannte Druckpunkte, einengen. Die Druckpunkte sind feste, in den einzelnen Hautgebieten verschieden dicht gesäte, in ihrer Erregbarkeit veränderliche Orte der Haut, welche an den behaarten Körperstellen stets über den Haarbälgen zu finden sind. Gegenüber mechanischen und elektrischen Reizen zeichnen sich die Druckpunkte durch ihre grosse Be-

weglichkeit, sowie durch ihre Neigung zu oscillatorischer Erregung (Schwirren) aus.

Werden Reizhaare nach hydrostatischen Drucken geaicht, so findet man Reize gleichen Drucks physiologisch nicht gleichwerthig. Diese Abweichung von der für grössere Flächen gefundenen Regel lässt sich erklären unter der Annahme, dass die den Druckpunkten entsprechenden Nervenendigungen nicht ganz oberflächlich liegen. Man kann den kleinflächigen Reizen wieder gleiche Wirksamkeit ertheilen, indem man ihre Gewichte nicht den zweiten sondern den ersten Potenzen der Durchmesser proportional macht (Aichung nach Spannungswerthen). Mit Hülfe von derartig geaichten Reizhaaren ist die topographische Aufnahme der Druckpunkte einer Hautfläche, sowie die Vergleichung ihrer Empfindlichkeit, der sogenannten Punktschwellen, ausführbar. Eine Beziehung auf die früher bestimmten Flächenschwellen ist vorläufig nur insofern möglich, als Orte niedriger Punktschwelle auch niedrige Flächenschwelle haben. In Bezug auf die Punktschwellen bestehen zwischen den verschiedenen Theilen der Körperoberfläche nur geringfügige Verschiedenheiten, die Variationen sind überall in nahezu die gleichen Grenzen eingeschlossen, die mittlere Empfindlichkeit der Druckpunkte ist demnach überall annähernd gleich. Da indessen an Orten mit dicht gedrängten Druckpunkten mehr hochempfindliche Punkte auf die Flächeneinheit kommen müssen wie anderwärts, so erscheinen sie für eine gegebene Belastung empfindlicher.

Ebenso wie für sehr kleine Flächen Reize gleichen hydrostatischen Drucks aufhören gleichwerthig zu sein, so tritt auch bei sehr grossen Flächen eine Abnahme der Wirksamkeit auf, für welches ein besonders schlagendes Beispiel der MEISSNER'sche Versuch des Eintauchens der Hand unter Quecksilber darstellt. Die Abweichung von der Regel erklärt sich aus der Thatsache, dass zwar genügend Druck vorhanden ist, dagegen die zur Erregung der Haut nöthige Deformation der Haut fehlt.

An den behaarten Körperstellen liegen die Druckpunkte über den Haarbälgen. Ihr Verhalten gegen elektrische und mechanische Reize ist das geschilderte. Geschieht die Erregung nicht von der Haut aus, sondern durch Vermittlung des Haares, so kommt es nur

zu Berührungsempfindungen. Die Reizschwellen der Haare sind als Drehungsmomente zu messen.

Die Fähigkeit zur Schmerzempfindung ist für Schwellenreize ebenfalls auf bestimmte, sehr dicht gedrängte Orte der Haut, die sogenannten Schmerzpunkte beschränkt, deren Vertheilung von den Druckpunkten ganz unabhängig ist. Isolirte Schmerzpunkte können ohne jede Druckempfindung erregt werden.

Physiologisch sind die Schmerzpunkte ausgezeichnet durch eine für schwache Reize sehr lange Latenz und durch grosse Trägheit gegenüber rasch sich ändernden bezw. oscillirenden Reizen, welche zuweilen die Form des Nachhinkens oder der fälschlich sogenannten secundären Empfindung annehmen kann. Ueber die Dichte der Schmerzpunkte sind noch wenig Angaben zu machen. Man kann annehmen, dass sich durchschnittlich über 100 im $cm^2$ finden.

Die Erregung der Schmerzpunkte ist ebenfalls eine Function des hydrostatischen Druckes. Reize gleichen Druckes sind physiologisch gleichwerthig, gleichgültig ob ihre Fläche gross oder klein ist, bis herab zum Querschnitt der feinsten Reizhaare. Es folgt daraus, dass die Nerven der Schmerzpunkte näher der Oberfläche enden müssen als die der Druckpunkte.

Für solche Reizflächen, welche in Rücksicht auf die Druckpunkte eine Messung des Reizes nach hydrostatischen Drucken gestatten, ist ein Vergleich der Empfindlichkeit der beiden nervösen Apparate möglich. Die Druckpunkte haben eine etwa tausendfach grössere Empfindlichkeit als die Schmerzpunkte. Mit der Abnahme der Reizfläche gewinnt aber ein gegebener mechanischer Reiz relativ an Wirksamkeit für die Schmerzpunkte, derart dass für sehr kleinflächige Reize die Schmerzschwelle tiefer liegen kann als die Druckschwelle. Grossflächige Reize wirken dagegen überwiegend auf den Drucksinn, insbesondere sind die sogenannten Tastflächen derart eingerichtet, dass die Entstehung der Druckempfindung begünstigt ist.

Die Organe der Druckempfindung sind an den behaarten Körperstellen die Nervenkränze der Haare, an den unbehaarten Stellen die MEISSNER'schen Körperchen. Ihre von MEISSNER gefundene Zahl von 100 bis 200 im $cm^2$ der Hohlhand deckt sich mit der dort nachweisbaren Zahl der Druckpunkte.

Die Schmerzempfindung der Haut stammt, soweit es sich um

oberflächliche Schmerzempfindung handelt, von den freien intraepithelialen Nervenendigungen.

Für die Organe der Druckempfindung wie für die des Schmerzes kann eine directe Erregung durch den mechanischen Reiz nicht angenommen werden. Die Nerven der Druckpunkte werden wahrscheinlich erregt durch Concentrationsänderung in der umgebenden Flüssigkeit, hervorgerufen durch die Steigerung des Gewebsdruckes. Die Erregung der Schmerznerven ist voraussichtlich auch eine chemische. Die hohe mechanische Reizschwelle erklärt sich aus der Festigkeit der Epidermis, welche deformirenden Einwirkungen einen sehr grossen Widerstand entgegensetzt.

---

## Litteraturverzeichniss.

1. Aubert & Kammler, Untersuchungen über den Druck- und Raumsinn der Haut. Moleschott's Untersuchungen Bd. 5 S. 145.
2. A. Bethe, Arch. f. mikr. Anat. Bd. 44 S. 185.
3. M. Blix, Zeitschr. f. Biologie Bd. 21 S. 145.
4. A. M. Bloch, Archives de physiologie 1891 p. 322.
5. R. Bonnet, Morpholog. Jahrb. Bd. 4 S. 329 (1878).
6. R. Dohrn, Zeitschr. f. rat. Med. 3. Reihe Bd. 10 S. 339 (1861).
7. S. Exner, Wiener klin. Wochenschr. 1896 No. 14.
8. J. Gad & A. Goldscheider, Zeitschr. f. klin. Med. Bd. 20. S. 339.
9. S. Garten, Du Bois Arch. 1895 S. 401.
10. A. Goldscheider, Zur Lehre von den specifischen Energien der Sinnesorgane. Diss. Berlin 1881.
11. —— Du Bois Arch. 1885 Suppl. S. 1.
12. F. Goltz, Centralbl. f. d. med. Wiss. 1863 S. 273.
13. H. Griesbach, Arch. f. Hygiene Bd. 24 S. 124.
14. H. Griffing, Psychological Review, Monograph Supplement, February 1895.
15. Herbst, Die Pacinischen Körperchen u. ihre Bedeutung, Gött. 1848.
16. A. v. Kölliker, Handb. d. Gewebelehre, Leipzig 1889. I. S. 170.
17. J. v. Kries, Du Bois Arch. 1884 S. 337.
18. P. Langerhans, Virch. Arch. 44 S. 325 (1868).
19. G. Meissner, Beiträge zur Anatomie u. Physiologie der Haut. Leipzig 1853.
20. —— Zeitschr. f. rat. Med. 3. Reihe Bd. 7 S. 92, 1859.
21. F. Merkel, Ueber die Endigung der sensiblen Nerven in der Haut der Wirbelthiere. Rostock 1880.
22. B. Naunyn, Arch. f. exp. Path. u. Pharm. Bd. 25 S. 272, dort auch frühere Litteratur.

23. H. Quincke, Zeitschr. f. klin. Med. Bd. 17 S. 429.
24. L. Ranvier, Traité technique d'histologie. Deutsch von Nicati u. Wiss. Leipzig 1877—1888.
25. G. Retzius, Biolog. Untersuchungen N. F. Bd. 4 1892 S. 45 Tafel XV.
26. Schleich, Schmerzlose Operationen, Berlin, Springer 1894.
27. W. Spalteholz, His & Braune Arch. 1893 S. 1.
28. E. Starling, Journal of Physiology T. 19 p. 312.
29. R. Tigerstedt, Studien über mechanische Nervenreizung, Helsingfors 1880.
I. M. v. Frey, Berichte der math.-phys. Classe der kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 2. Juli 1874.
II. —— Ebenda 3. Dec. 1894.
III. —— Ebenda 4. März 1895.

## Verzeichniss der Figuren.

Fig. 1. Belastungshebel. S. 10.
Fig. 2. Schwellenwage. S. 22.
Fig. 3. Verbindung der Schwellenwage mit dem treibenden Uhrwerk. S. 25.
Fig. 4. Kleinste, mittlere und grösste Steilheit der Belastungszunahme. S. 28.
Fig. 5. Curven der Belastungsschwelle in ihrer Abhängigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit. S. 30.
Fig. 6. Abhängigkeit des Schwellengewichtes von der Anstiegszeit. S. 32.
Fig. 7. Erklärung im Text. S. 39.
Fig. 8. Reizhaar. S. 40.
Fig. 9. Gebrauch des Reizhaares. S. 42.
Fig. 10. Haar-Aesthesiometer. S. 46.
Fig. 11. Spannungszeiger von Bloch. S. 48.
Fig. 12. Schema der optischen Einrichtung. S. 57.
Fig. 13. Aufnahme eines Hautstückes der Wade, fünffach vergrössert, Druckpunkte und Schwellen. S. 65.
Fig. 14. Aufnahme eines Hautstückes des Handgelenks, fünffach vergrössert, Druckpunkte und Schwellen. S. 66.
Fig. 15. Aufnahme eines Hautstückes vom Handrücken, 16fach vergrössert, Druck- und Schmerzpunkte. S. 77.
Fig. 16. Belastungsapparat zur Bestimmung von Schmerzschwellen. S. 80.

# BEITRÄGE

ZUR

# MUSKELSTATIK.

ERSTE ABHANDLUNG:

## UEBER DAS GLEICHGEWICHT ZWISCHEN SCHWERE UND MUSKELN AM ZWEIGLIEDRIGEN SYSTEM

VON

**OTTO FISCHER,**

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

(AUS DEM ANATOMISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

---

Des XXIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ IV.

MIT 7 TAFELN UND 21 TEXTFIGUREN.

---

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1896.

Das Manuscript eingeliefert am 1. Juli 1896.
Der Abdruck vollendet am 20. September 1896.

# BEITRÄGE

ZUR

# MUSKELSTATIK.

ERSTE ABHANDLUNG:

## UEBER DAS GLEICHGEWICHT ZWISCHEN SCHWERE UND MUSKELN AM ZWEIGLIEDRIGEN SYSTEM

VON

**OTTO FISCHER,**

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

(AUS DEM ANATOMISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.)

MIT 7 TAFELN UND 21 TEXTFIGUREN.

# INHALTSVERZEICHNISS.


| | Seite |
|---|---|
| Einleitung | 271 |
| I. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen durch Bestimmung aller auf die beiden Abschnitte des Armes einwirkenden Drehungsmomente | 280 |
| 1. Drehende Einwirkung einer am Oberarm angreifenden Kraft auf die beiden Abschnitte des Armes | 282 |
| 2. Drehende Einwirkung einer am Unterarm angreifenden Kraft auf die beiden Abschnitte des Armes | 284 |
| 3. Drehende Einwirkung der Schwere | 285 |
| 4. Drehende Einwirkung von Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Oberarm ansetzen | 289 |
| 5. Drehende Einwirkung von Muskeln, welche sich zwischen Oberarm und Unterarm erstrecken | 290 |
| 6. Drehende Einwirkung von Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Unterarm ansetzen | 293 |
| α) Muskeln, welche sich geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen | 293 |
| β) Muskeln, welche sich nicht geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen können | 294 |
| 7. Die Bedingungen, unter denen sich Schwere und Muskeln das Gleichgewicht halten können | 296 |
| II. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen mit Hülfe des Princips der virtuellen Verrückungen | 299 |
| 1. Die Elementararbeiten, welche eine am Oberarm angreifende Kraft bei den verschiedenen Componenten der virtuellen Verrückungen des Armes leistet | 302 |
| 2. Die Elementararbeiten, welche eine am Unterarm angreifende Kraft bei den verschiedenen Componenten der virtuellen Verrückungen des Armes leistet | 304 |
| 3. Die Elementararbeiten der Schwere | 307 |
| 4. Die Elementararbeiten von Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Oberarm ansetzen | 308 |

Seite

5. Die Elementararbeiten von Muskeln, welche sich zwischen Oberarm und Unterarm erstrecken . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 308
6. Die Elementararbeiten von Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Unterarm ansetzen . . . . . . . . . . . . . . . 309
   α) Muskeln, welche sich geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 309
   β) Muskeln, welche sich nicht geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen können . . . . . . . . . . . . . . . . . . 310
7. Das Princip der virtuellen Verrückungen und die daraus abgeleiteten Bedingungen, unter denen sich Schwere und Muskeln das Gleichgewicht halten können . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 310

III. Das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Oberarm ansetzen . 316
IV. Das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln, welche sich zwischen Oberarm und Unterarm erstrecken (eingelenkigen Muskeln) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 319
V. Das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Unterarm ansetzen (mehrgelenkigen Muskeln) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 338
Rückblick . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 366

# Einleitung.

Die allgemeinen Aufgaben der Muskelstatik finden sich im IV. Capitel der »medicinischen Physik von A. Fick[1])« und in der Einleitung zu des Verfassers Abhandlung »Beiträge zu einer Muskeldynamik I: Ueber die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln«[2]) ausführlich auseinandergesetzt, so dass es nicht nöthig sein wird, darauf zurückzukommen. Eine Reihe von Untersuchungen, welche mit der vorliegenden Arbeit eröffnet wird, soll sich nun mit den mechanischen Gesichtspunkten für die Behandlung einer bestimmten Classe von Problemen beschäftigen, der sehr viele Fragen der speciellen Muskelstatik angehören. Es soll nämlich ganz allgemein der Fall ins Auge gefasst und an speciellen Beispielen erläutert werden, dass Schwere und Muskeln sich am menschlichen Körper das Gleichgewicht halten. Zu diesen Problemen sind unter anderen zu rechnen das aufrechte Stehen und das in letzter Zeit so vielfach erörterte Erheben auf die Zehen[3]), so weit dabei nicht der der Muskeldynamik zuzuweisende Act des Erhebens selbst, sondern nur das Stehen bei erhobener Ferse in Frage kommt. Als weiteres Beispiel wären die Fälle aufzufassen, in denen es sich um das »Festhalten« eines erhobenen Armes mit oder ohne Belastung oder eines erhobenen Beines in gestrecktem oder irgendwie gebeugtem Zustande handelt. Man kann wohl sagen, dass mit wenig Ausnahmen die Sicherung einer jeden Körperhaltung, sei es im Stehen, Sitzen oder Liegen, hierher gehört. Die Fälle, in denen keine Muskeln thätig sein müssen, um eine ruhige Körperhaltung hervorzubringen, sind

1) Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn. 3. Auflage 1885.

2) Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Classe Bd. XXII Nr. II. 1895.

3) Vergl. Seite 333 ff.

selten; sie beschränken sich im Grossen und Ganzen auf die Arten des Liegens und Sitzens, bei denen alle Theile des Körpers entweder durch eine Unterlage oder durch andere Abschnitte des Körpers, eventuell unter Vermittelung von Gelenkbändern, genügend unterstützt und dadurch am Herabfallen gehindert sind. Im Allgemeinen würde der menschliche Körper bei ausschliesslicher Wirksamkeit der Schwere seine Haltung nicht beibehalten; die einzelnen Theile desselben würden sich so lange senken, bis der Schwerpunkt eines jeden eine möglichst tiefe Stellung eingenommen hat. Um dies zu verhindern, müssen dann die Muskeln in der Weise activ eingreifen, dass sie durch die Kraft ihrer Contraction den Körpertheilen die entgegengesetzte Bewegung zu ertheilen suchen als die Schwere. Die Muskeln vermögen dieser Aufgabe nur dann gerecht zu werden, wenn die Lage ihrer Insertionsstellen, der Verlauf ihrer Fasern zwischen denselben, ihr Querschnitt und ihre Spannung zu der Stellung der Körpertheile im Raume und der dadurch bedingten Einwirkung der Schwere auf dieselben in ganz bestimmten Beziehungen stehen.

Es ist nun die Aufgabe der speciellen Muskelstatik, diese zum Gleichgewicht nothwendigen Beziehungen für einen jeden Muskel unter den verschiedensten Verhältnissen aufzudecken.

Handelt es sich um den speciellen Fall, dass nur dasjenige Glied des menschlichen Körpers als beweglich angesehen ist, an welchem sich der Ansatz des Muskels befindet, so deckt sich das Problem der Muskelstatik mit dem, die Gleichgewichtsbedingungen für einen Körper aufzustellen, welcher gegen einen im Raume festen Körper vermittelst eines Gelenkes von irgend welcher Form beweglich ist, und an welchem ausser der Schwere noch äussere Kräfte angreifen. Man hat dabei nur vorauszusetzen, dass die in distaler Richtung an diesem Glied hängenden Körpertheile mit demselben zu einer einzigen starren Masse vereinigt sind, dagegen das in proximaler Richtung angrenzende Glied durch besondere äussere Kräfte im Raume fixirt worden ist. Ein jeder Muskel, welcher an dem beweglichen Gliede ansetzt, wirkt dann auf dasselbe bei seiner Contraction genau so wie eine einzige äussere Kraft. Bei der Behandlung dieses Falles ist vor allen Dingen in Rücksicht zu ziehen, wie die Gelenkverbindung zwischen dem fixirt und dem beweglich gedachten Gliede beschaffen ist. Es sind

hierbei insbesondere zwei einfache Fälle von Wichtigkeit, nämlich der Fall eines reinen Charniergelenkes (Ginglymus) und der eines reinen Kugelgelenkes (Arthrodie). Wenn auch im menschlichen Körper die meisten Gelenke eine viel weniger einfache relative Bewegung der beiden Glieder zu einander gestatten, so sind die Abweichungen von den durch diese beiden einfachen Gelenktypen erzeugten Bewegungen im Allgemeinen doch nicht so gross, als dass man sie nicht für viele Aufgaben der Muskelstatik vernachlässigen könnte. Die ausführliche Auflösung aller hierher gehörenden Aufgaben verdanken wir A. FICK. Es soll daher in dieser Arbeit nicht weiter darauf eingegangen sein, sondern auf Capitel IV der medicinischen Physik von A. FICK verwiesen werden.

Fasst man nun den Fall ins Auge, dass nicht nur ein Glied, sondern zwei durch ein Gelenk verbundene Glieder des menschlichen Körpers beweglich sind, während der Abschnitt des Körpers, an welchem das eine, etwa das proximale der beiden Glieder eingelenkt ist, durch äussere Kräfte im Raume fixirt angenommen ist, so stellt sich sehr bald heraus, dass die Bedingungen für das Gleichgewicht eines solchen zweigliedrigen Systems in mehrfacher Hinsicht verwickelter sind, als die bei einem einzigen freibeweglichen Glied geltenden.

So lange es sich um einen einzigen starren Körper handelt, kann man beispielsweise die Wirkung der Schwere durch die einer einzigen Kraft ersetzt denken, welche im Schwerpunkte angreift, und deren Grösse durch das Gewicht des Körpers gemessen wird. Im Falle eines Systems von zwei durch ein Gelenk verbundenen Körpern empfiehlt es sich dagegen nicht, die Schwerkraft im Gesammtschwerpunkte des Systems angreifend anzunehmen, da der letztere bei der Gelenkbewegung des einen Körpertheils zum anderen seine Lage im System fortwährend ändert. Man müsste dann nothwendiger Weise die Bewegung des Gesammtschwerpunktes in Folge der Stellungsänderung der beiden Glieder mit in Rücksicht ziehen. Damit wäre aber die Vereinfachung illusorisch geworden, welche man für die Wirkung der Schwere dadurch erzielt, dass man die an den kleinsten Theilchen des Körpers angreifenden kleinen Schwerkräfte durch die im Schwerpunkte angreifende Gesammtschwerkraft ersetzt; denn diese Zusammensetzung zu der resultirenden Schwerkraft würde sich für jede neue

Gelenkstellung anders gestalten. Ausserdem würde die im Gesammtschwerpunkte angreifende Gewichtskraft nicht die specielle Wirkung der Schwere auf die beiden das System zusammensetzenden Körpertheile erkennen lassen. Es ist daher im vorliegenden Falle zweckmässiger, die kleinen Schwerkräfte eines jeden Gliedes zu der im Einzelschwerpunkte desselben angreifenden Schwerkraft für jedes der beiden Glieder gesondert zusammenzusetzen. Man hat dann die Wirkung der Schwere auf das Gliedersystem nicht durch eine, sondern durch zwei Kräfte dargestellt, welche in festen Punkten des Systems, nämlich den Einzelschwerpunkten der Glieder angreifen.

Dabei kommt nun noch in Betracht, dass die im Schwerpunkte des einen Gliedes angreifende Schwerkraft in Folge des Gelenkzusammenhanges beider Glieder in bestimmter Weise auch eine Kraftwirkung an dem anderen Körpertheile hervorbringt. So übt die Schwere des Unterschenkels auch ein Drehungsmoment auf den Oberschenkel aus, desgleichen beeinflusst die Schwere des Unterarmes die Drehung des Oberarmes im Schultergelenk u. s. w.

Nur in einem ganz speciellen Falle kann man auch bei einem derartigen zweigliedrigen System die Wirkung der Schwere durch eine einzige an einem festen Punkte eines der beiden Glieder angreifende Kraft dargestellt denken. Dies ist nämlich dann möglich, wenn die Schwere des einen der beiden Körperabschnitte verschwindend klein gegenüber der Schwere des anderen Körperabschnittes ist. In diesem Falle ist der Gesammtschwerpunkt mit grosser Annäherung identisch mit dem Einzelschwerpunkte des letzteren Körperabschnittes, und die Gesammtschwere ist mit derselben Annäherung gleich der Einzelschwere desselben. Ein derartiges System erhält man beispielsweise, wenn man zum Zwecke der Untersuchung der beim Erheben auf die Zehen stattfindenden Beziehungen zwischen Schwerkraft und Muskelkräften den menschlichen Körper in die beiden durch das erste Fussgelenk mit einander verbundenen Abschnitte: Fuss einerseits und Gesammtheit der übrigen Körpertheile andererseits zerlegt denkt. Dann ist innerhalb der Grenzen der Genauigkeit, mit welcher man Schweremessungen am lebenden Körper auszuführen vermag, die Schwere des Fusses thatsächlich verschwindend klein gegenüber der Gesammtschwere der übrigen Körpertheile anzunehmen. Man darf daher trotz der Beweglichkeit im Fussgelenk die Gesammtschwere nach einem festen Punkte

des Körpers verlegt denken, eine Erlaubniss, von der in den zahlreichen Schriften über das Erheben des Körpers auf die Zehen der ausgedehnteste Gebrauch gemacht ist. Man darf aber niemals vergessen, dass man es in diesem Falle mit ganz besonders günstigen Verhältnissen zu thun hat, welche eine derartige Vereinfachung der Behandlung des Problems ausnahmsweise zulassen. In der Mehrzahl der übrigen in dieselbe Classe gehörenden Fragen der Muskelstatik ist eine solche Vereinfachung nicht gestattet; man hat dann stets die Schwere beider Körperabschnitte gesondert in Rechnung zu ziehen. Hieraus ist ersichtlich, dass man einen ganz fundamentalen Fehler begehen würde, wollte man die für das zweigliedrige System: Fuss und übriger Körper erlangten Resultate ohne Weiteres auf andere zweigliedrige Systeme des menschlichen Körpers übertragen. Man würde sich sogar schon auf Irrwegen befinden, wollte man nur bei der Untersuchung anderer Fälle dieselben Wege zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen einschlagen, wie bei der Behandlung des angeführten singulären Falles. Dagegen darf man erwarten, dass eine Untersuchung des allgemeinsten Falles eines zweigliedrigen Systems eine gesonderte Behandlung dieses speciellen Falles überflüssig macht, indem die Gleichgewichtsbedingungen für diesen in den Gleichgewichtsbedingungen für jenen mit enthalten sein werden.

Es möge noch ein weiteres Beispiel angeführt sein, aus dem ersichtlich ist, dass die Muskelstatik der zweigliedrigen Systeme keineswegs durch die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen für ein einziges Glied erledigt ist, und dass insbesondere sich ganz neue Fragestellungen ergeben, sobald man mehr als ein Glied beweglich annimmt. Für ein im Charniergelenk gegen einen feststehenden Körpertheil bewegliches Glied ergiebt sich, dass ein jeder Muskel im Stande ist, bei irgend einer Stellung des Gliedes der Schwere das Gleichgewicht zu halten, sofern er nur den Körper im entgegengesetzten Sinne wie die Schwere zu drehen strebt. Denkt man sich z. B. den Oberarm in der Weise erhoben, dass seine Längsaxe sowohl als die Drehungsaxe des Ellbogengelenkes horizontal gerichtet sind, und stellt ihn dann in dieser Lage durch äussere Kräfte oder durch Muskeln, deren Ansatz sich am Humerus befindet, fest, so wirkt die Schwere auf den im Ellbogengelenk beweglichen Unterarm streckend ein, wenn er sich zwischen der äussersten Streckstellung

und der rechtwinkligen Beugestellung befindet; dagegen wird ihn die Schwere gegen den Oberarm weiter zu beugen streben, wenn er schon über die rechtwinklige Beugestellung hinaus gebeugt ist. Im ersteren Falle kann dann der Schwere bei jeder Stellung durch irgend einen Beugemuskel, im letzteren Falle durch irgend einen Streckmuskel das Gleichgewicht gehalten werden. Die Lage der Insertionspunkte kommt dabei nur insofern in Betracht, als sie auf die Grösse der hierzu nöthigen Spannung von Einfluss ist. Es ist aber kein Muskel, der überhaupt bewegend auf das Ellbogengelenk einwirkt, als unfähig zu dieser Leistung von vornherein ausgeschlossen. Allerdings wird der eine die Aufgabe mit geringerer Spannung lösen können als der andere.

Die Untersuchung der zweigliedrigen Systeme ergiebt nun ein ganz anderes Resultat. Sie zeigt nämlich, dass ein bestimmter Muskel keineswegs innerhalb gewisser Grenzen bei jeder beliebigen Stellung der beiden Glieder der Schwere das Gleichgewicht halten kann, sondern dass er diese Aufgabe nur bei ganz bestimmten für ihn charakteristischen Stellungen zu lösen vermag. Diese bevorzugten Stellungen stehen in sehr enger Beziehung zu der Lage der Insertionspunkte des Muskels. Für das im Ellbogengelenk gegliederte Armsystem ergiebt sich beispielsweise, dass bei festem Schultergürtel der M. brachialis allein der Schwere nur dann bei gebeugtem Ellbogengelenk Gleichgewicht zu halten im Stande ist, wenn der Oberarm im Schultergelenk um einen bestimmten Winkel nach rückwärts gedreht (gestreckt) ist; dabei gehört im Allgemeinen zu jedem Beugungswinkel des Ellbogengelenkes ein ganz bestimmter Streckungswinkel des Schultergelenkes. Der M. biceps brachii vermag dagegen unter Umständen auch der Schwere Gleichgewicht zu halten, wenn der Unterarm gegen den Oberarm gebeugt und gleichzeitig der letztere gegen den Schultergürtel nach vorn gedreht (gebeugt) ist. Es gehört auch hier zu jedem Beugungswinkel des Ellbogengelenkes ein ganz bestimmter Drehungswinkel des Schultergelenkes; aber die Haltungen des Armes sind ganz andere wie die für den M. brachialis. Die Stellungen der beiden Glieder des Systems, bei denen allein ein bestimmter Muskel im Stande ist, der Schwere das Gleichgewicht zu halten, muss man kennen, bevor man an die weitere Frage herantreten kann, wie stark der Muskel gespannt sein muss, um bei einer bestimmten in sein Ressort gehörenden Gliederstellung die bewegende Wirkung der Schwere aufzuheben.

Es ergiebt sich auf diese Weise die Nothwendigkeit, in erster Linie für jeden Muskel die ihm zugehörenden Gliederstellungen aufzusuchen. Fasst man der Einfachheit halber zunächst nur solche Muskeln ins Auge, welche sowohl das erste der beiden Glieder gegen das benachbarte im Raume festgestellte Glied um eine feste Axe, als auch das zweite Glied gegen das erste um eine der ersten parallele Charnieraxe zu drehen streben, so giebt es eine zweifache Mannigfaltigkeit von Gesammtstellungen des Gliedersystems, welche in Frage kommen. Zu jedem Muskel gehört aber, wie die Untersuchung zeigen wird, nur eine einfache Mannigfaltigkeit von Stellungen des Gliedersystems, bei denen er der Schwere Gleichgewicht halten kann. Da nun immer nur eine beschränkte Anzahl von Muskeln vorhanden ist, welche auf ein derartiges System einwirken, so ist hieraus ersichtlich, dass für den allergrössten Theil der möglichen Gliederstellungen gar kein Muskel existirt, welcher allein der Schwere das Gleichgewicht zu halten vermöchte, und dass in Folge dessen im Allgemeinen mehrere Muskeln gleichzeitig zur Lösung dieser Aufgabe in Thätigkeit treten müssen. Es entsteht daher die weitere Frage, ob es bei gleichzeitiger Contraction zweier verschiedener Muskeln möglich sein wird, bei geeigneter Spannungsvertheilung die Wirkung der Schwere bei jeder beliebigen Gliederstellung zu überwinden, oder ob etwa die bei einem bestimmten Gliedersystem des menschlichen Körpers vorhandenen Muskeln gerade hinreichen, um dieser Aufgabe gerecht zu werden u. s. w.

Man sieht sich also bei der Betrachtung eines aus nur zwei Gliedern bestehenden Systems schon vor eine Fülle neuer Fragen gestellt, welche, wie man sich von vornherein sagen kann, alle erst beantwortet sein müssen, bevor man mit Erfolg an die Behandlung der Systeme von drei und mehr mit einander durch Gelenke verbundenen Gliedern herantreten kann. Es soll daher zunächst das zweigliedrige System der Untersuchung unterworfen werden. Dabei mag, um die Lösung des Problems in erster Linie nach Möglichkeit zu vereinfachen, angenommen sein, dass das eine Glied mit dem anderen durch ein Charniergelenk, und das andere Glied wiederum mit dem als fixirt angenommenen Körperabschnitte durch ein eben solches Gelenk mit paralleler Axe verbunden ist. An Stelle des letzteren Charniergelenkes kann auch ein Kugelgelenk angenommen

werden, wenn man dabei die Voraussetzung macht, dass alle in Frage kommenden bewegenden Kräfte in diesem Gelenk nur Drehungen um eine der Axe des ersten Charniergelenkes parallele Axe bewirken können, eine Voraussetzung, die sich vielfach im menschlichen Körper nahezu realisirt findet.

Es bieten sich zwei verschiedene Wege dar, um die Beziehungen abzuleiten, welche im Falle des Gleichgewichts zwischen der Schwere und den Muskelkräften für ein derartiges zweigliedriges Körpersystem stattfinden müssen.

Es ist leicht einzusehen, dass ein zweigliedriges System von der vorausgesetzten speciellen Art dann in Ruhe sein wird, wenn dafür gesorgt ist, dass beide Glieder keine Drehungen mehr ausführen können. Dem von dem fixirten Körpertheil entfernteren Glied ist zwar an und für sich eine aus reiner Drehung und Parallelverschiebung in beliebiger Weise combinirte Bewegung möglich. Wenn man aber die Drehung des näheren Gliedes um die dasselbe mit dem fixirten Körpertheil verbindende Charnieraxe verhindert, so ist nicht nur dadurch dieses Glied festgestellt, sondern es ist auch gleichzeitig das entferntere Glied an der Parallelverschiebung gehindert, so dass ihm nur noch reine Drehung um die beide Glieder verbindende Charnieraxe möglich ist. Es werden daher die Bedingungen des Gleichgewichts des ganzen Systems darauf hinauslaufen, dass die Drehungsbestreben, welche alle am System angreifenden Kräfte für die beiden Glieder besitzen, sich an jedem Glied aufheben. Dabei ist zu berücksichtigen, dass in Folge des Gelenkzusammenhanges beider Glieder im Allgemeinen eine am entfernteren Glied angreifende Kraft auch ein Drehungsbestreben auf das nähere Glied ausübt, und dass man sich bei der Aufstellung einer jeden Gleichgewichtsbedingung nicht allein auf die Kräfte beziehen darf, welche direct an dem betreffenden Glied angreifen, sondern dass man alle drehenden Einflüsse festzustellen hat. Während im Falle eines einzigen um eine feste Charnieraxe drehbaren Gliedes nur eine Gleichgewichtsbedingung existirt[1]), ergeben sich also im Falle eines Systems von zwei durch ein Charniergelenk verbundenen Gliedern deren zwei.

1) Vergl. die medicinische Physik von A. Fick, 3. Auflage, Capitel IV.

Eine zweite Methode zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen besteht in der Anwendung des die ganze Statik umfassenden Princips der virtuellen Verrückungen.

Es werden bei der vorliegenden Untersuchung beide Wege eingeschlagen. Man gewinnt dadurch gleichzeitig eine Controle für die Richtigkeit der Endresultate.

Im Interesse der grösseren Anschaulichkeit soll die Betrachtung sich zunächst wieder auf das specielle, schon in dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik herangezogene Beispiel des im Ellbogengelenk gegliederten Armsystems beziehen. Die für dieses System erhaltenen Resultate gelten aber dann mutatis mutandis für jedes den gemachten Voraussetzungen entsprechende zweigliedrige System des menschlichen und thierischen Körpers.

---

## I. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen durch Bestimmung aller auf die beiden Abschnitte des Armes einwirkenden Drehungsmomente.

In nebenstehender Figur 1 bedeute $\mathfrak{S}$ den im Raume fixirt angenommenen Mittelpunkt des Schultergelenkes und $\mathfrak{E}$ den Punkt der Ellbogenaxe, in welchem dieselbe von der Verbindungslinie des Schultergelenkmittelpunktes mit dem Schwerpunkte $S_1$ des Oberarmes geschnitten wird. Der Punkt $\mathfrak{E}$ soll »Mittelpunkt des Ellbogengelenkes« und die Gerade $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$, wie früher, »Längsaxe des Oberarmes« genannt sein.

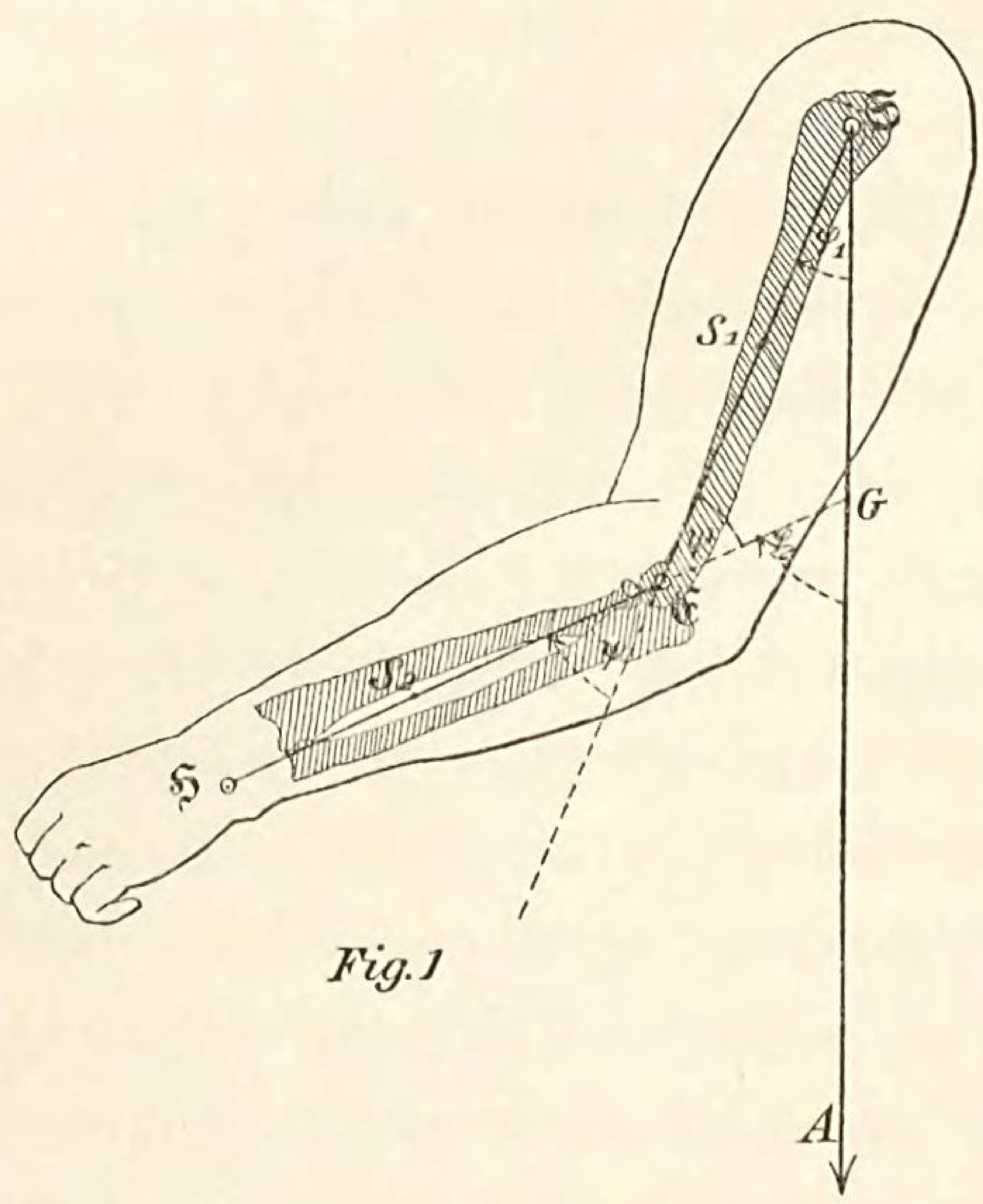


Fig. 1

Wie für die folgenden Betrachtungen der Oberarm als eine starre Masse aufgefasst wird, so soll auch der Unterarm zusammen mit der in mittlerer Pronationsstellung befindlichen Hand als eine einzige starre Masse angesehen werden, bei welcher nicht nur die Bewegungen in den Hand- und Fingergelenken, sondern auch die Drehungen im Radioulnargelenk ausgeschlossen sind. Unter dieser Voraussetzung liegen bekanntlich der Mittelpunkt des Ellbogengelenks $\mathfrak{E}$, der Schwerpunkt $S_2$ des starren Systems: Unterarm plus Hand und der Mittelpunkt $\mathfrak{H}$ des Handgelenkes, welcher mit dem Mittelpunkt des Capitatumköpfchens dentisch ist, in gerader Linie. Diese die Punkte $\mathfrak{E}$, $S_2$ und $\mathfrak{H}$ verbindende Gerade soll, wie schon früher, als »Längsaxe des Unterarmes« bezeichnet sein. Nimmt man zunächst noch der Einfachheit

halber an, dass im Schultergelenk allein Drehungen um die der Ellbogenaxe parallele Axe möglich sind, und dass bei allen Haltungen des Armes, für welche im Folgenden die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den angreifenden Kräften aufgesucht werden sollen, die beiden Gelenkaxen horizontal gerichtet sind, so kann eine jede Stellung des Armes in eindeutiger Weise durch zwei Winkel bestimmt werden. Dies lässt sich auf verschiedene Arten erreichen. Entweder misst man die Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$, welche die Längsaxen des Oberarmes und Unterarmes mit der Verticalen bilden, oder man bestimmt an Stelle des Winkels $\varphi_2$ den Winkel $\psi$, welchen die Längsaxe des Unterarmes mit der Verlängerung der Längsaxe des Oberarmes bildet. Beide Bestimmungen der Haltung des Armes sollen für den vorliegenden Zweck zur Verwendung kommen. Wenn man im Allgemeinen das Winkelpaar $\varphi_1$, $\psi$ bevorzugt findet, so ist dies nur geschehen, um damit der gebräuchlichen anatomischen Anschauungsweise Rechnung zu tragen, die Haltungen des menschlichen Körpers durch die Gelenkstellungen zu charakterisiren. Dabei soll $\varphi_1$ kurz »Drehungswinkel des Schultergelenkes« und $\psi$ »Beugungswinkel des Ellbogengelenkes« heissen. Der letztere kann nur positive Werthe annehmen, da der Unterarm ja nicht über die Streckstellung im Ellbogengelenk nach rückwärts hinaus gedreht werden kann; dem ersteren kommen dagegen ebenso gut positive wie negative Werthe zu. Verabredet man, den Winkel $\varphi_1$ positiv zu rechnen, wenn die Längsaxe des Oberarmes gegen die Verticale im Schultergelenkmittelpunkte $\mathfrak{S}$ nach vorn, d. h. also im Sinne einer Beugung des Oberarmes, abweicht, so muss man demselben nothwendiger Weise das negative Vorzeichen beilegen, wenn die Oberarmlängsaxe von der Verticalen nach hinten, im Sinne der Streckung, gedreht ist. Die Verwendung des Winkelpaares $\varphi_1$, $\varphi_2$ hat gegenüber der des Paares $\varphi_1$, $\psi$ zwar den Nachtheil, dass auch der zweite Winkel $\varphi_2$ unter Umständen negativ gerechnet werden muss, sie bietet aber andererseits besondere Vortheile dar, wenn man die Wirkung der Schwere auf die beiden Abschnitte des Armes in Betracht zieht. Es ergiebt sich nämlich, dass die drehende Einwirkung der Schwere auf den Oberarm allein von dem Winkel $\varphi_1$ und die Wirkung der Schwere auf den Unterarm allein von $\varphi_2$ abhängt. Setzt man dagegen zur Bestimmung der Haltung des Armes an Stelle von $\varphi_2$ den Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenkes, so ist

leicht einzusehen, dass dieser allein nicht genügt, um die drehende Einwirkung der Schwere auf den Unterarm anzugeben, sondern dass man hierzu beide Winkel, $\varphi_1$ und $\psi$, in Rücksicht ziehen muss. Es lässt sich jedoch ohne Mühe erkennen, dass man, je nach Bedarf, von der einen Bestimmung der Armhaltung zu der anderen leicht übergehen kann. Wie aus dem Dreieck $\mathfrak{S}\mathfrak{E}G$ zu erkennen ist, besteht nämlich zwischen den drei Winkeln eine sehr einfache Beziehung. Da der Winkel $\mathfrak{S}\mathfrak{E}G$ gleich $\psi$ als Scheitelwinkel desselben ist, und da ferner $\varphi_2$ den Aussenwinkel des Dreiecks an der Ecke $G$ darstellt, so ergiebt sich

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \psi .$$

Hat man zunächst $\varphi_1$ und $\psi$ verwendet und will nun zu der anderen Art der Bestimmung übergehen, so ist nur $\psi$ durch $\varphi_2 - \varphi_1$ zu ersetzen. Andererseits kann man an Stelle von $\varphi_2$ den Winkel $\psi$ in die Betrachtungen hereinbringen, wenn man überall $\varphi_2$ durch $\varphi_1 + \psi$ ersetzt. —

Es soll nun zunächst untersucht werden, in welcher Weise eine am Oberarm angreifende Kraft auf die beiden Abschnitte des Armes drehend einzuwirken strebt. Darauf soll die gleiche Untersuchung für eine am Unterarm angreifende Kraft angestellt werden. Die gewonnenen Resultate werden dann ein Mittel an die Hand geben, die Gesammteinwirkung der Schwere, sowie die eines eingelenkigen oder mehrgelenkigen, am Oberarm oder Unterarm ansetzenden Muskels für die beiden Abschnitte des Armes zu bestimmen. Nachdem diese Kenntniss erlangt ist, fällt es nicht schwer, die Bedingungen aufzustellen, unter denen Muskeln und Schwere sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, so dass der ganze Arm trotz der gleichzeitigen Einwirkung aller dieser Kräfte in seiner Stellung verharrt.

## 1. Drehende Einwirkung einer am Oberarm angreifenden Kraft auf die beiden Abschnitte des Armes.

Greift im Punkte $A$ des Oberarmes eine in der Ebene der Zeichnung liegende Kraft von der Grösse $P$ an (Figur 2), so wird dieselbe ganz unabhängig von der Lage ihres Angriffspunktes im Schultergelenkmittelpunkte $\mathfrak{S}$ einen Druck von gleicher Grösse und gleicher Richtung verursachen. Dieser Druck strebt den Schultergürtel gerade

so zu bewegen, als ob der Punkt 𝔖 mit demselben starr verbunden wäre, und nun in 𝔖 direct eine Kraft von der Grösse *P* angriffe. Da der Schultergürtel im Raume fixirt angenommen ist, also nicht ausweichen kann, so wird in Folge der Gleichheit von Action und Reaction der Oberarm in demselben Punkte mit gleicher Stärke, aber in entgegengesetzter Richtung, gedrückt werden. Es wirken in Folge dessen zwei Kräfte auf den Oberarm ein: die in *A* angreifende Kraft *P* und eine entgegengesetzt gleiche in 𝔖. Beide Kräfte bilden zusammen ein sogenanntes Kräftepaar, welches auf den Oberarm ein Drehungsbestreben ausübt, das gemessen wird durch das Product aus der Intensität *P* der beiden Kräfte und der Entfernung *p* ihrer Richtungen, den sogenannten Arm des Kräftepaares. Dieses Product nennt man bekanntlich das Moment des Kräftepaares. Dasselbe soll insbesondere das auf den Oberarm in Folge der Kraft *P* ausgeübte Drehungsmoment[1]) genannt und, wie in Zukunft alle auf den Oberarm einwirkende Drehungsmomente, mit $D_1$ bezeichnet werden. Es ist also

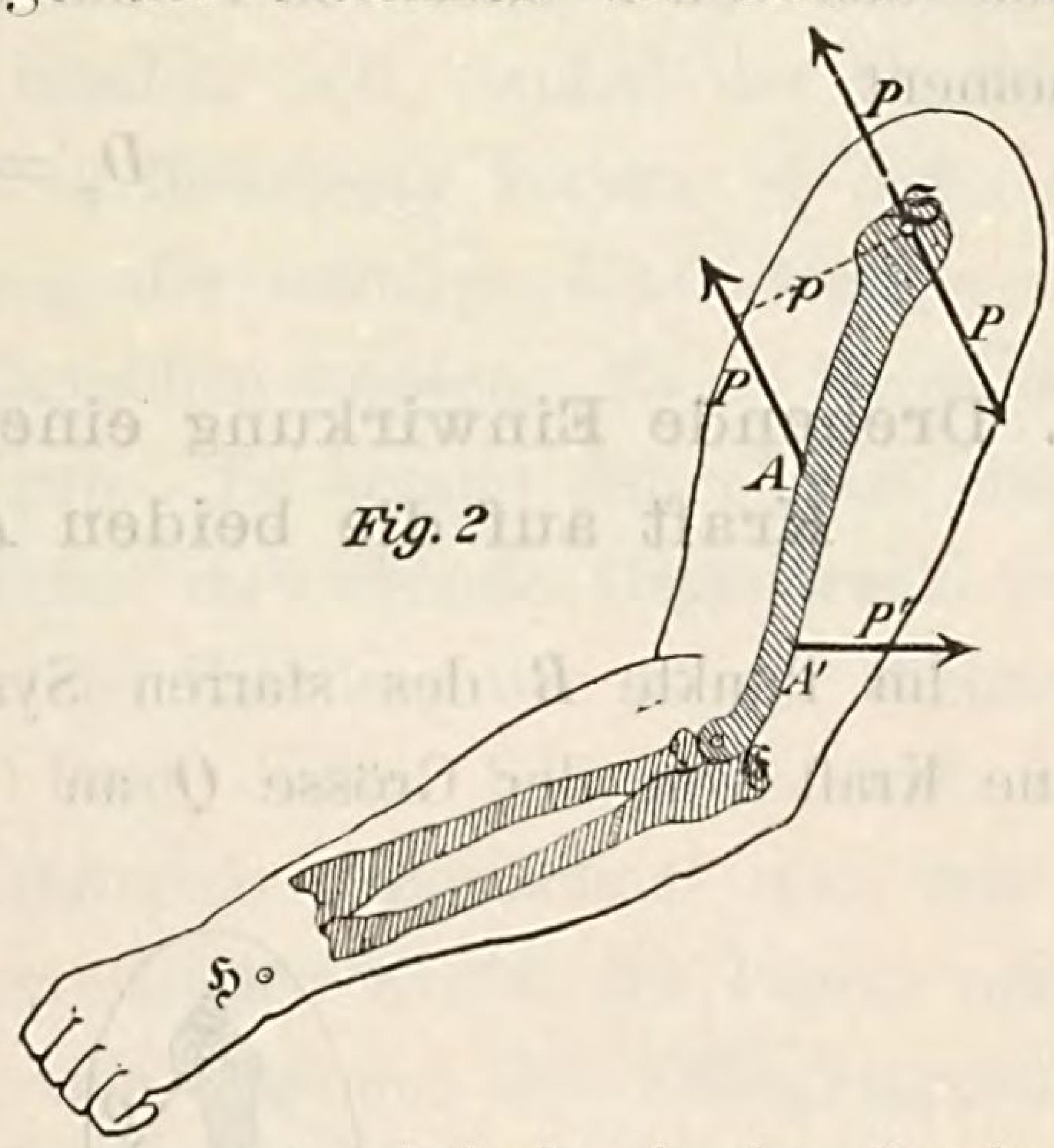


Fig. 2

$$D_1 = Pp\,.$$

Rechnet man das Drehungsmoment $D_1$ positiv, wenn das Kräftepaar den Oberarm im Sinne des Uhrzeigers zu drehen strebt, so muss man demselben das negative Vorzeichen beilegen, falls es eine Drehung im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu bewirken strebt. Dies würde z. B. der Fall sein für die im Punkte *A'* angreifende Kraft *P'*. Ist *p'* der Arm des durch *P'* hervorgerufenen Kräftepaares, so wäre das zugehörige Drehungsmoment

$$D_1 = -P'p'\,.$$

1) Vergl. die Arbeit: Ueber die Drehungsmomente ein- und mehrgelenkiger Muskeln. Archiv für Anatomie und Physiologie. Anatomische Abtheilung 1894, Seite 105 ff.

Auf den Unterarm wirkt weder die Kraft $P$ noch die Kraft $P'$ unmittelbar drehend ein. Bezeichnet man die auf den Unterarm einwirkenden Drehungsmomente immer mit $D_2$, so ist also im vorliegenden Falle das von $P$ oder von $P'$ auf den Unterarm ausgeübte Drehungsmoment

$$D_2 = 0 .$$

## 2. Drehende Einwirkung einer am Unterarm angreifenden Kraft auf die beiden Abschnitte des Armes.

Im Punkte $B$ des starren Systems: Unterarm plus Hand greife eine Kraft von der Grösse $Q$ an (Figur 3). Wie im vorangehenden Beispiele die Kraft $P$ auf den Schultergürtel im Punkte 𝔖 drückte, so übt in entsprechender Weise die Kraft $Q$ einen Druck von gleicher Grösse und Richtung auf den Oberarm im Punkte 𝔈 aus. Die Kraft $Q$ wirkt also auch auf den Oberarm ein, und zwar gerade so, als ob sie nicht in $B$, sondern im Punkte 𝔈 angriffe. Dieselbe wird daher ein Drehungsmoment $D_1$ auf den Oberarm ausüben von der Grösse

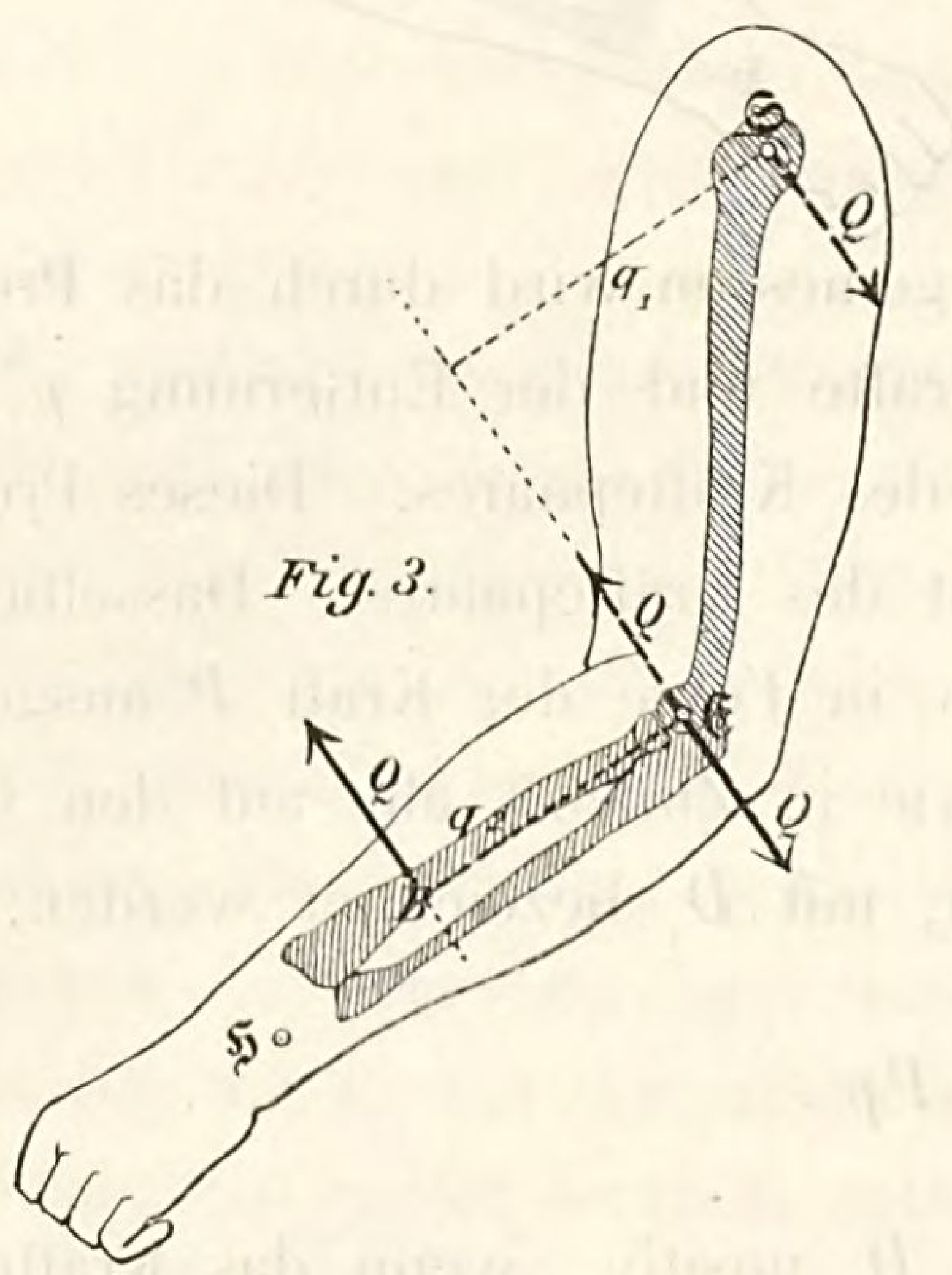


Fig. 3.

$$D_1 = \pm Q q_1 ,$$

wenn man unter $q_1$ den Abstand der in 𝔈 angreifenden Kraft $Q$ und der in 𝔖 angreifenden Gegenkraft oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Abstand des Schultergelenkmittelpunktes 𝔖 von der Richtung der nach dem Ellbogengelenkmittelpunkte 𝔈 verlegten Kraft $Q$ versteht. Dabei ist das eine oder andere Vorzeichen zu verwenden, je nachdem das entstehende Kräftepaar den Oberarm in dem einen oder anderen Sinne zu drehen strebt.

Der Druck auf den Oberarm ruft nun wiederum einen gleichen Gegendruck im Punkte 𝔈 auf den Unterarm hervor. Dies ist zwar im Allgemeinen nicht die einzige Kraftäusserung, welche vom Punkte 𝔈

aus auf den Unterarm stattfindet. Wenn der Oberarm in Folge des Druckes von $Q$ in Bewegung gesetzt wird, so wirkt das untere Ende desselben noch in anderer Weise ziehend oder drückend auf den Unterarm im Punkte 𝔈 ein. Da es sich hier nur um die Untersuchung des Gleichgewichtsfalles handeln soll, wobei der Oberarm trotz aller Krafteinwirkungen nicht in Bewegung kommt, so kann an dieser Stelle von einer Untersuchung der weiteren Einwirkungen auf den Unterarm vom Punkte 𝔈 aus abgesehen werden. Es ist Sache der Dynamik, sich damit zu beschäftigen. Es kommt daher jetzt allein der im Punkte 𝔈 auf den Unterarm einwirkende Gegendruck von derselben Stärke aber entgegengesetzter Richtung wie die in $B$ direct angreifende Kraft $Q$ in Betracht. Beide Kräfte bilden das auf den Unterarm drehend einwirkende Kräftepaar. Bezeichnet man mit $q_2$ den Abstand der in $B$ und 𝔈 angreifenden Kräfte des Paares oder, was auf dasselbe hinaus kommt, den Abstand des Ellbogengelenkmittelpunktes von der in $B$ angreifenden Kraft $Q$, so besitzt das auf den Unterarm ausgeübte Drehungsmoment die Grösse

$$D_2 = \pm Qq_2 .$$

Diese Ergebnisse setzen uns nun in den Stand, die drehende Einwirkung der Schwere und der verschiedenen Muskeln auf jeden der beiden Armabschnitte anzugeben.

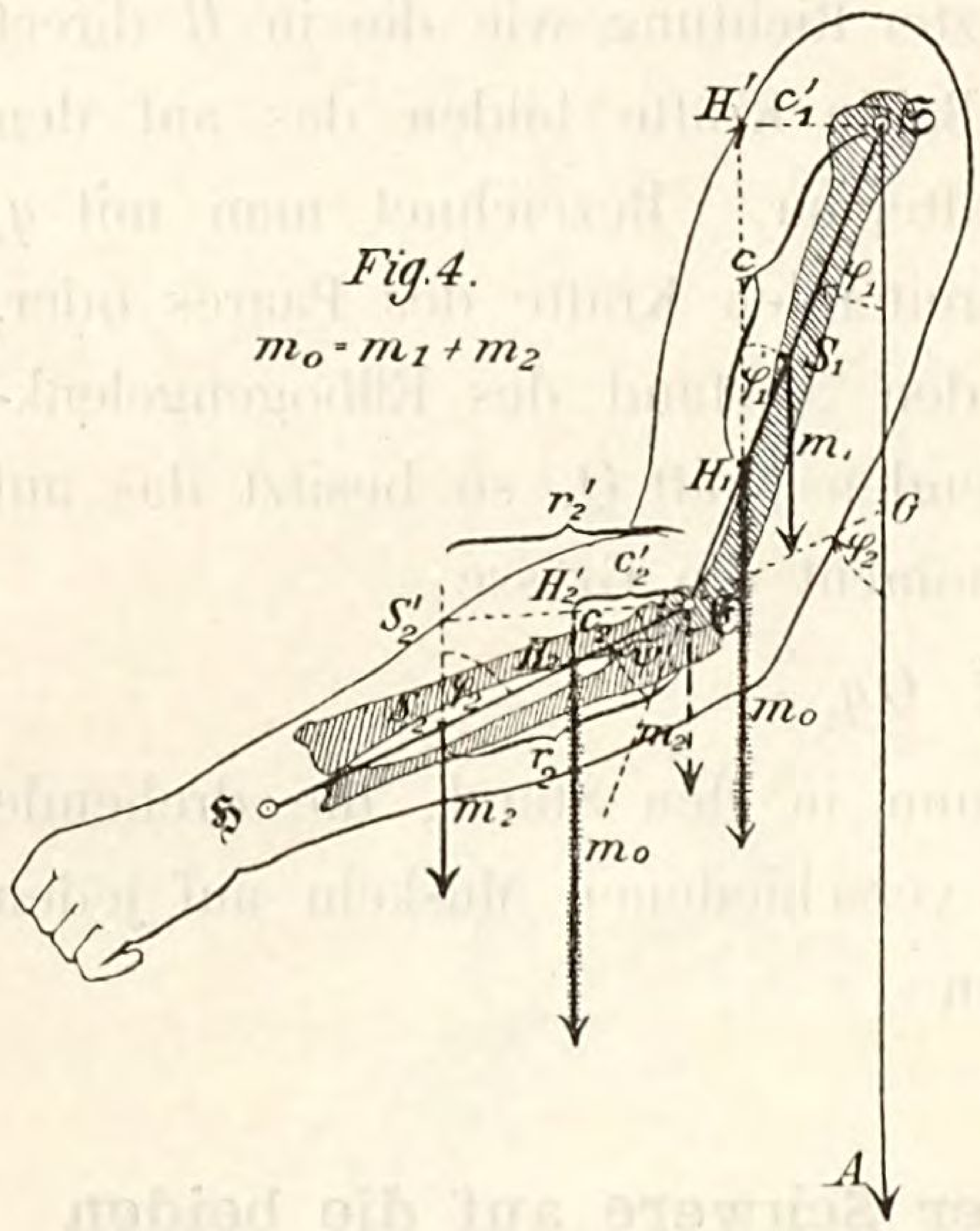
### 3. Drehende Einwirkung der Schwere auf die beiden Abschnitte des Armes.

Die Wirkung der Schwere auf einen Körper ist bekanntlich gleich der Wirkung einer einzigen vertical nach unten gerichteten Kraft, welche im sogenannten Schwerpunkte des Körpers angreift und eine Intensität gleich dem Gewichte des Körpers besitzt. Da bei der Messung von Muskelkräften gewöhnlich dem irdischen Maasssystem der Vorzug gegeben wird, so soll dasselbe für die vorliegenden Zwecke der Muskelstatik ebenfalls angewendet werden. Wenn $m$ die Grösse einer Masse in Einheiten des absoluten Maasssystems angiebt, so drückt bekanntlich dieselbe Zahl die Grösse des Gewichtes dieser Masse aus, wenn man dasselbe auf das irdische Maasssystem bezieht, bei welchem das Gramm, bezüglich das Kilogramm die Gewichts- oder allgemein die Krafteinheit darstellt. Im absoluten Maass-

system, welches als Krafteinheit das Dyn verwendet, würde dagegen die Maasszahl für das Gewicht $g$-mal so gross ausfallen, unter $g$ die Beschleunigung der Schwere verstanden. Es ist daher leicht, von dem irdischen Maasssystem im gegebenen Falle auf das absolute Maasssystem überzugehen.

Bezeichnet man im absoluten Maasssystem mit $m_1$ und $m_2$ die Massen von Oberarm einerseits und dem starren System: Unterarm plus Hand andererseits, so wirkt die Schwere auf das System wie zwei in den Einzelschwerpunkten $S_1$ und $S_2$ (Figur 4) angreifende Kräfte von der Grösse $m_1$ und $m_2$ Gramm, ausgedrückt im irdischen Maasssystem. Nach den obigen Auseinandersetzungen wirkt nun die Kraft $m_2$ auf den Oberarm in derselben Weise drehend ein, als ob sie nicht in $S_2$, sondern in $\mathfrak{E}$ angriffe. Man hat daher zwei parallele und gleichgerichtete Kräfte, mit welchen die Schwere den Oberarm zu drehen strebt, die Kraft $m_1$ im Punkte $S_1$ und die Kraft $m_2$ im Punkte $\mathfrak{E}$. Beide lassen sich zu einer einzigen Resultante zusammensetzen, deren Grösse gleich der Summe $m_1 + m_2$ der beiden Gewichte, d. h. also gleich dem Gesammtgewicht $m_0$ des ganzen Armes ist, und deren Angriffspunkt $H_1$ auf der Strecke $\overline{S_1 \mathfrak{E}}$ liegt und dieselbe im umgekehrten Verhältniss der beiden Gewichte $m_1$ und $m_2$ theilt. Dieser Punkt ist aber kein anderer als der auch in der Muskeldynamik eine wichtige Rolle spielende »Hauptpunkt des Oberarmes«[1]. Man hat daher den

Fig. 4.
$m_0 = m_1 + m_2$




Satz: »Die Schwere wirkt auf den Oberarm in derselben Weise drehend ein, als ob die Masse des ganzen Armes im Hauptpunkte des Oberarmes concentrirt wäre.«

Das Drehungsmoment $D_1$, welches die Gesammtschwere für den Oberarm besitzt, ist daher nach I, 1 gleich dem Product aus dem

1) Vergl. die Beiträge zu einer Muskeldynamik I. a. a. O. Seite 111.

Gesammtgewicht $m_0$ des Armes und dem Abstand des Schultergelenkmittelpunktes $\mathfrak{S}$ von der Verticalen durch den Hauptpunkt des Oberarmes. Der letztere ist gleich der Projection der Strecke $\overline{\mathfrak{S}H_1}$ auf die Horizontale. Die Länge der Strecke $\overline{\mathfrak{S}H_1}$ soll wie früher mit $c_1$ und die Projection $\overline{\mathfrak{S}H_1'}$ derselben auf die Horizontale mit $c_1'$ bezeichnet werden. Beachtet man noch, dass die Schwere den Oberarm bei der in Figur 4 angegebenen Haltung des Armes, welche einem positiven Werthe des Winkels $\varphi_1$ entspricht, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen strebt, so ist nach der oben getroffenen Verabredung das Drehungsmoment $D_1$ negativ zu rechnen, und man hat

$$D_1 = -m_0 c_1'.$$

Die Projection $c_1'$ ist eine veränderliche Grösse; sie nimmt zu, wenn der Oberarm aus der in Figur 4 angegebenen Stellung etwas nach vorn gedreht wird, und sie verkleinert sich, wenn derselbe etwas nach hinten im Schultergelenk gedreht wird. Für die verticale Stellung des Oberarmes ist $c_1'$ gleich Null. Für eine Stellung, bei welcher die Oberarmlängsaxe gegen die Verticale nach hinten geneigt ist, muss $c_1'$ negativ gerechnet werden, da die Strecke $\overline{\mathfrak{S}H_1'}$ jetzt die entgegengesetzte Richtung besitzt, wie in dem durch Figur 4 dargestellten Falle. Dem entspricht, dass dann $D_1$ einen positiven Werth annimmt, weil die Schwere den Oberarm im Sinne des Uhrzeigers zu drehen strebt. Die Grösse von $c_1'$ hängt in sehr einfacher Weise von dem Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenkes ab. Beachtet man, dass in dem rechtwinkligen Dreieck $H_1 H_1' \mathfrak{S}$ der Winkel an der Ecke $H_1$ gleich $\varphi_1$ ist, so erkennt man, dass

$$c_1' = c_1 \sin \varphi_1$$

ist.

Wird $\varphi_1$ negativ, so nimmt demgemäss $c_1'$, wie schon angedeutet wurde, von selbst einen negativen Werth an. Die Einsetzung des Werthes von $c_1'$ in die Formel für $D_1$ ergiebt

$$D_1 = -m_0 c_1 \sin \varphi_1 .$$

Während sowohl das Gewicht des Oberarmes als auch das des Unterarmes den Oberarm zu drehen streben, übt die Schwere des Oberarmes bei festgestelltem Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ scheinbar keinen Einfluss auf die Drehungen des Unterarmes aus. Es strebt

nur die in $S_2$ angreifende Schwerkraft von der Grösse $m_2$ denselben zu drehen. Bezeichnet man mit $r_2$ die Länge der Strecke $\overline{\mathfrak{S} S_2}$ und entsprechend mit $r'_2$ die Länge ihrer Projection $\overline{\mathfrak{S} S'_2}$ auf die Horizontale (vgl. Figur 4), so ergiebt sich unter Berücksichtigung des Drehungssinnes für das Drehungsmoment $D_2$, mit welchem die Schwere auf den Unterarm einwirkt, nach I, 2 der Werth

$$D_2 = - m_2 r'_2 .$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $S_2 S'_2 \mathfrak{S}$, in welchem, wie man leicht erkennt, der Winkel bei $S_2$ gleich $\varphi_2$ ist, ergiebt sich nun

$$r'_2 = r_2 \sin \varphi_2 ,$$

so dass man auch den Werth von $D_2$ in der Form schreiben kann

$$D_2 = - m_2 r_2 \sin \varphi_2 .$$

Den gleichen Werth würde man bekommen, wenn man nicht in $S_2$ das Gewicht $m_2$ des Unterarmes plus Hand, sondern in dem Hauptpunkte $H_2$ des Systems: Unterarm plus Hand das Gesammtgewicht $m_0$ des Armes auf den Unterarm einwirken liesse. Der für die Muskeldynamik wichtige Hauptpunkt $H_2$ des starren Systems: Unterarm plus Hand[1]) liegt auf der Strecke $\overline{\mathfrak{S} S_2}$ und theilt dieselbe im umgekehrten Verhältniss der Gewichte $m_1$, $m_2$, so dass also

$$\overline{\mathfrak{S} H_2} : \overline{H_2 S_2} = m_2 : m_1 .$$

Aus dieser Proportion kann man auch in bekannter Weise die neue ableiten

$$\overline{\mathfrak{S} H_2} : (\overline{\mathfrak{S} H_2} + \overline{H_2 S_2}) = m_2 : (m_1 + m_2) .$$

Bezeichnet man die Länge von $\overline{\mathfrak{S} H_2}$ mit $c_2$ und beachtet, dass $\overline{\mathfrak{S} H_2} + \overline{H_2 S_2} = \overline{\mathfrak{S} S_2} = r_2$ und $m_1 + m_2 = m_0$ ist, so kann man auch schreiben:

$$c_2 : r_2 = m_2 : m_0 ,$$

woraus folgt:

$$m_2 r_2 = m_0 c_2 .$$

Man kann daher $D_2$ auch die Form geben

$$D_2 = - m_0 c_2 \sin \varphi_2 .$$

1) a. a. O. Seite 112.

Dies ist aber, wie man leicht bestätigt, nichts anderes, als das Drehungsmoment, mit welchem das im Hauptpunkte $H_2$ des Systems: Unterarm plus Hand angebrachte Gesammtgewicht des Armes auf den Unterarm wirken würde. Man hat daher den

Satz: »Die Schwere wirkt auf den Unterarm in derselben Weise drehend ein, als ob die Masse des ganzen Armes im Hauptpunkte des starren Systems: Unterarm plus Hand concentrirt wäre.«

Die Verwendung der zweiten Formel für $D_2$ bietet gewisse Vortheile dar, welche sich im weiteren Verlaufe der Untersuchung herausstellen werden.

Für die Berechnung der beiden Drehungsmomente ist das Winkelpaar $\varphi_1$, $\varphi_2$ verwendet worden. Nimmt man an, dass die Haltung des Armes mit Hülfe der beiden Gelenkwinkel $\varphi_1$ und $\psi$ bestimmt worden ist, so ist $\varphi_2$, wie früher auseinandergesetzt worden ist, durch $\varphi_1 + \psi$ zu ersetzen. Die Drehungsmomente, mit welchen die Schwere auf die beiden Abschnitte wirkt, lauten demnach

$$D_1 = - m_0 c_1 \sin \varphi_1 ,$$

$$D_2 = - m_0 c_2 \sin \varphi_2 \quad \text{oder} \quad - m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) .$$

## 4. Drehende Einwirkung von Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Oberarm ansetzen, auf die beiden Abschnitte des Armes.

Ein Muskel, welcher am Oberarm ansetzt, wirkt unter der gemachten Voraussetzung, dass der Rumpf und der Schultergürtel durch besondere Kräfte im Raume fixirt sind, bei seiner Contraction wie eine einzige am Oberarm angreifende Kraft auf das Gliedersystem ein, sofern sein Bau die Annahme eines einzigen resultirenden Muskelzuges gestattet. Der Angriffspunkt dieser Kraft fällt nur dann mit dem Ansatzpunkte, bezüglich einem bestimmten Punkte der Ansatzfläche des Muskels zusammen, wenn der Muskel sich in gerader Richtung vom Ansatz nach dem Rumpf erstreckt, wie es z. B. beim M. coracobrachialis der Fall ist. Wird dagegen derselbe über Knochenvorsprünge am Oberarm gezwungen, so fällt der Angriffspunkt der Kraft mit der Stelle des Oberarmes zusammen, von

welcher aus der Muskel frei nach dem Rumpfe hinüberziehen kann. So ist bespielsweise als Angriffspunkt der Kraft, mit welcher ein Bündel von Fasern des M. deltoideus auf den Oberarm einwirkt, die Stelle aufzufassen, an welcher die Fasern den Humeruskopf verlassen. Die jeweilen zwischen dieser Stelle und dem Ansatz liegende Partie der Fasern kommt für den mechanischen Effect der Contraction nur insofern in Betracht, als sie eine grössere Länge der Muskelfasern mit sich bringt und dadurch eine stärkere Verkürzung des ganzen Muskels gestattet.

Ist $K$ die Grösse der Gesammtspannung, welche der Muskel bei seiner Contraction entwickelt, und $k$ der Abstand des frei zwischen Oberarm und Rumpf hinziehenden Theiles des resultirenden Muskelzuges vom Schultergelenkmittelpunkte, so besitzen nach I, 1 die beiden Drehungsmomente $D_1$ und $D_2$, mit welchen der Muskel auf Oberarm und Unterarm einwirkt, die Werthe:

$$D_1 = \pm Kk \quad \text{und} \quad D_2 = 0\,.$$

Für einen Beugemuskel des Schultergelenkes gilt das positive, für einen Streckmuskel das negative Vorzeichen in dem Werthe von $D_1$.

## 5. Drehende Einwirkung von Muskeln, welche sich zwischen Oberarm und Unterarm erstrecken, auf die beiden Abschnitte des Armes.

Ein Muskel, welcher seinen Ursprung am Oberarm nimmt und am Unterarm ansetzt, stellt in Anbetracht der Voraussetzung, dass der Unterarm mit der Hand eine starre Masse bildet, einen »eingelenkigen Muskel« dar, selbst wenn er ausser über das Ellbogengelenk auch noch über das Radioulnargelenk oder das Handgelenk hinwegzieht. Natürlich wird man bei einer solchen vereinfachenden Annahme die statische Wirkungsweise eines Muskels wie des M. brachioradialis, des M. extensor carpi radialis longus, des M. pronator teres nicht vollständig aufklären können. Durch das Feststellen der Gelenke im Unterarm wird ja, wie schon in den Beiträgen zur Muskeldynamik hervorgehoben worden ist[1]), die Wirkung des Muskels nicht nur auf

1) a. a. O. Seite 60.

die durch die betreffenden Gelenke verbundenen Knochen, sondern auch auf die übrigen Gelenke beeinflusst. Es muss daher weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, die allgemeine statische Wirkungsweise solcher Muskeln, bei allseitig freier Beweglichkeit der Gelenke, festzustellen.

Während ein am Oberarm ansetzender Muskel unter den gemachten Voraussetzungen nur mit einer einzigen Kraft auf das Armsystem einwirkt, übt ein zwischen Oberarm und Unterarm sich erstreckender Muskel bei seiner Contraction eine zweifache Kraftwirkung auf das System aus. Er zieht an dem Ansatz nach dem Ursprung hin und wirkt in entgegengesetzter Richtung, aber mit gleicher Kraft, auf den Ursprung.

Bezeichnen in Figur 5 $U$ und $A$ Ursprung und Ansatz der resultirenden Zugrichtung eines eingelenkigen Beugemuskels, etwa des M. brachialis, so ist durch die beiden in $U$ und $A$ angebrachten Kräfte von der Grösse $K$ die Kraftentfaltung des Muskels für das Armsystem vollständig dargestellt.

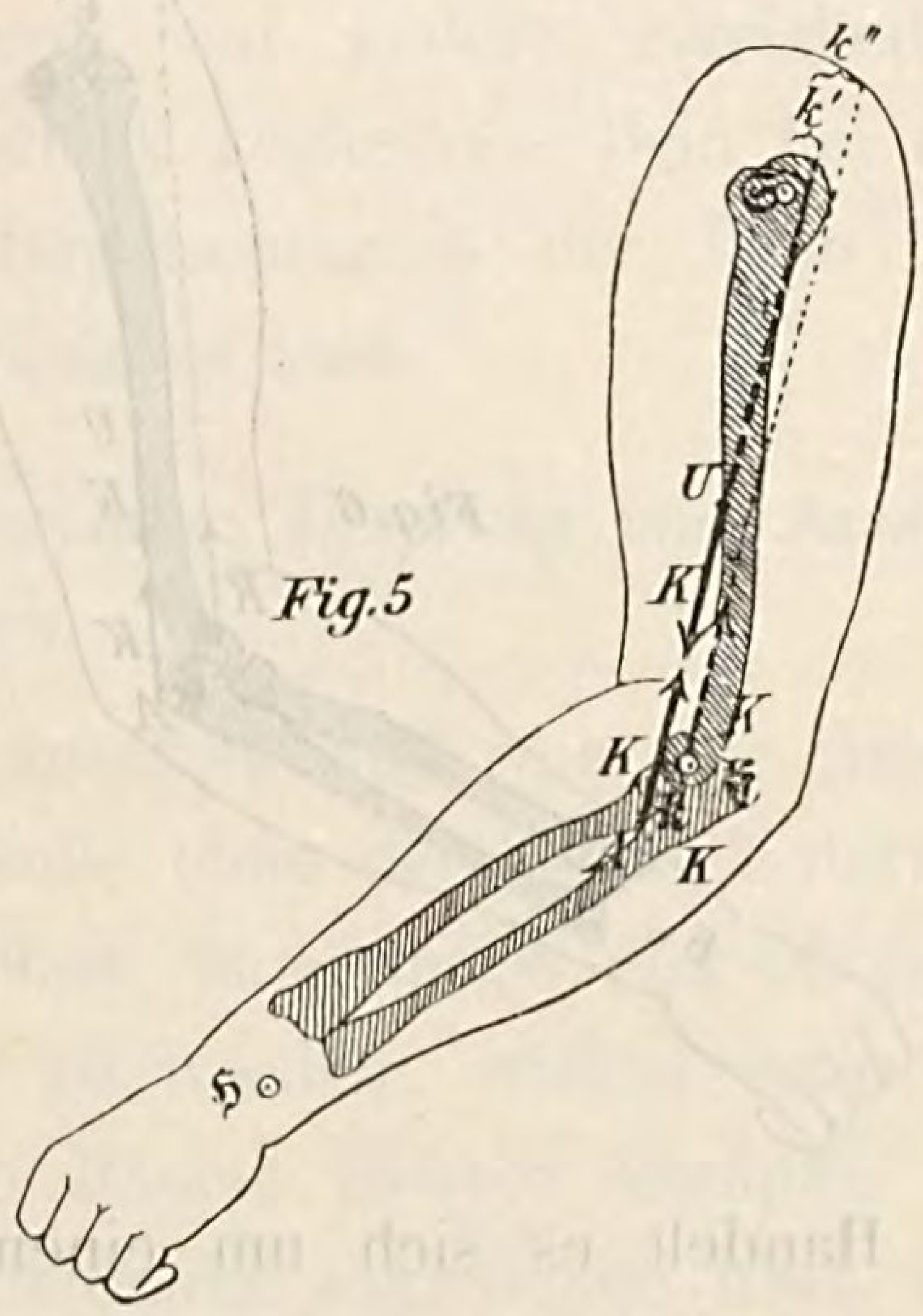


Fig. 5

Bedeutet $k'$ die Entfernung der Zugrichtung $AU$ des Muskels, bezüglich deren Verlängerung, und $k''$ die Entfernung der zu $AU$ parallelen Geraden durch 𝔊 vom Schultergelenkmittelpunkte 𝔖, so ist, unter Berücksichtigung des Drehungssinnes in dem durch Figur 5 dargestellten Falle, das auf den Oberarm ausgeübte Drehungsmoment der in $U$ angreifenden Kraft $K$ nach I, 1 gleich $+ Kk'$ und das auf den Oberarm ausgeübte Drehungsmoment der in $A$ angreifenden Kraft $K$ nach I, 2 gleich $- Kk''$.

Beide Drehungsmomente setzen das Drehungsmoment $D_1$ zusammen, mit welchem der eingelenkige Muskel bei seiner Contraction auf den Oberarm einwirkt. Es ergiebt sich daher

$$D_1 = - K(k'' - k').$$

Man erkennt aus der Figur, dass die Differenz $k'' - k'$ mit der Entfernung $k$ der Zugrichtung des Muskels vom Ellbogengelenkmittelpunkte identisch ist. Man kann daher auch schreiben

$$D_1 = -Kk\,.$$

Dieses Drehungsmoment ist nichts anderes als das Moment des Kräftepaares, welches durch die beiden in $U$ und 𝔈 angreifenden Kräfte gebildet wird. Es ist leicht verständlich, dass dieses Paar die beiden durch die in $U$ und die in 𝔈 angreifende Kraft verursachten Kräftepaare in ihrem Zusammenwirken vollständig ersetzt, denn die beiden in 𝔖 auftretenden Druckkräfte, welche die Kräftepaare vervollständigen, heben sich gegenseitig auf.

Auf den Unterarm übt nach den früheren Auseinandersetzungen die in $U$ angreifende Kraft kein Drehungsmoment aus. Man hat daher nach I, 2 als Grösse des Drehungsmomentes $D_2$, mit welchem der eingelenkige Muskel auf den Unterarm einwirkt,

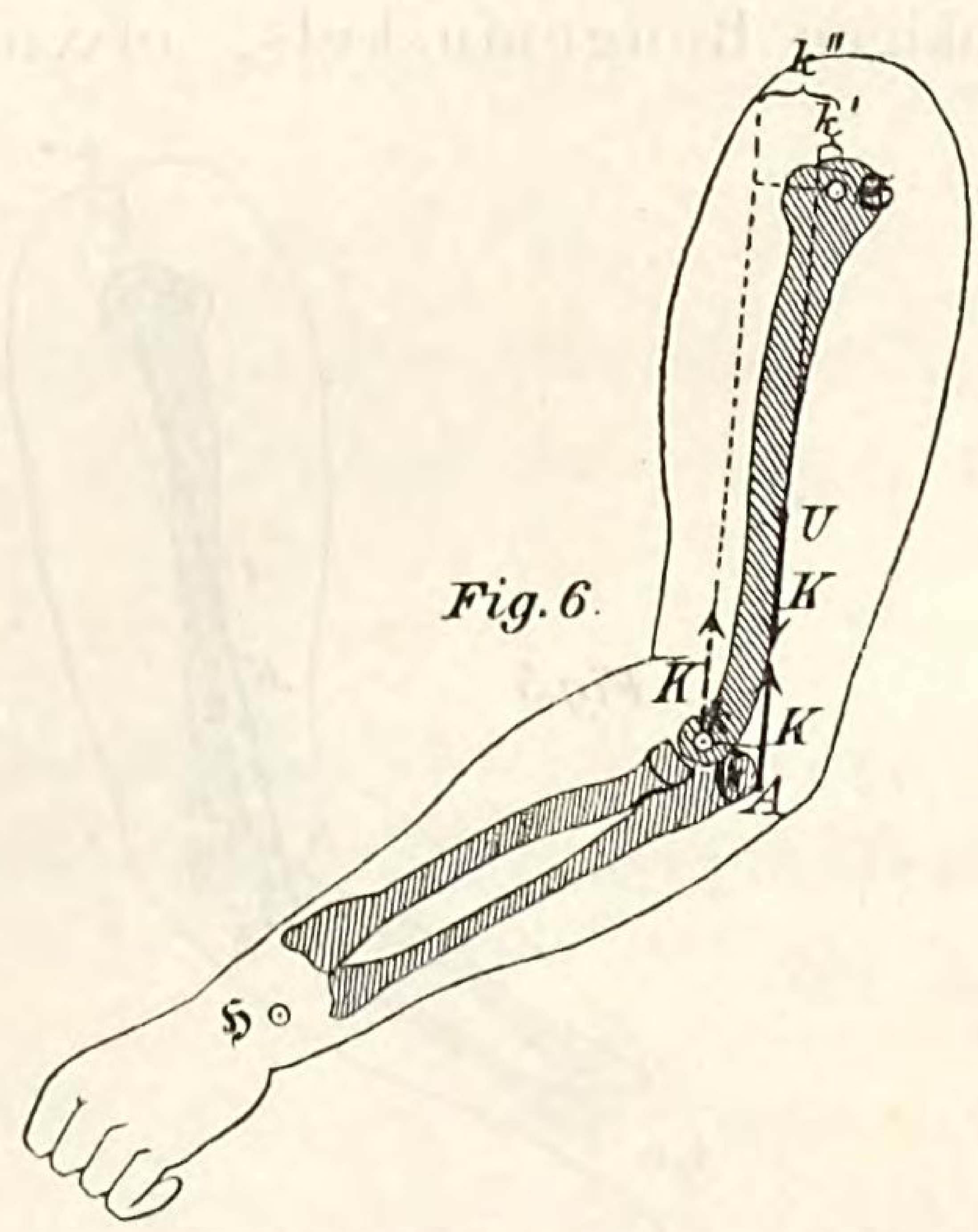


Fig. 6.

$$D_2 = +Kk\,.$$

Vergleicht man die Werthe der beiden Drehungsmomente mit einander, so erkennt man, dass

$$D_1 + D_2 = 0$$

ist. Dasselbe ergiebt sich für jeden anderen eingelenkigen Beugemuskel.

Handelt es sich um einen eingelenkigen Streckmuskel, z. B. um einen der beiden am Oberarm entspringenden Köpfe des M. triceps brachii, so sind die Resultate, bis auf die Vorzeichen, dieselben. Man hat zunächst (Figur 6)

$$D_1 = +K(k'' - k')$$

und, da $k'' - k'$ wieder durch $k$ ersetzt werden kann,

$$D_1 = +Kk\,.$$

Da ferner

$$D_2 = -Kk\,,$$

so hat man wiederum zwischen $D_1$ und $D_2$ die Beziehung

$$D_1 + D_2 = 0\,.$$

### 6. Drehende Einwirkung von Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Unterarm ansetzen, auf die beiden Abschnitte des Armes.

Es empfiehlt sich, die Muskeln, welche sich in gerader Richtung zwischen Ursprung und Ansatz ausstrecken, von denen gesondert zu untersuchen, die durch Knochenvorsprünge daran gehindert sind. Wenn sich beim Arm von der zweiten Art nur Vertreter unter den Beugemuskeln des Ellbogengelenkes finden, nämlich die beiden Köpfe des M. biceps brachii, und die erste Art nur in dem langen Kopf des M. triceps brachii, also einem Streckmuskel des Ellbogengelenkes, verwirklicht ist, so soll doch in beiden Fällen auf die Verhältnisse bei Beuge- und Streckmuskeln des Ellbogengelenkes näher eingegangen sein. Dies hat darin seine Berechtigung, dass die Ergebnisse einer derartigen Untersuchung ohne Weiteres auf andere zweigliedrige Systeme, wie z. B. auf das im Kniegelenk gegliederte Bein bei festgestelltem Becken, wo sich auch Repräsentanten der beim Arm fehlenden Muskelarten vorfinden, übertragbar sind.

*α) Muskeln, welche sich geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen.*

Muskeln, welche am Unterarm ansetzen und von der Ansatzstelle, oder wenigstens irgend einer Stelle eines der beiden Unterarmknochen aus nach dem Rumpfe hinziehen, ohne durch den Oberarmknochen in ihrem Verlaufe beeinflusst zu werden, wirken unter den getroffenen Voraussetzungen eines im Raume fixirten Rumpfes und Schultergürtels wie eine einzige am Unterarm angreifende Kraft $K$.

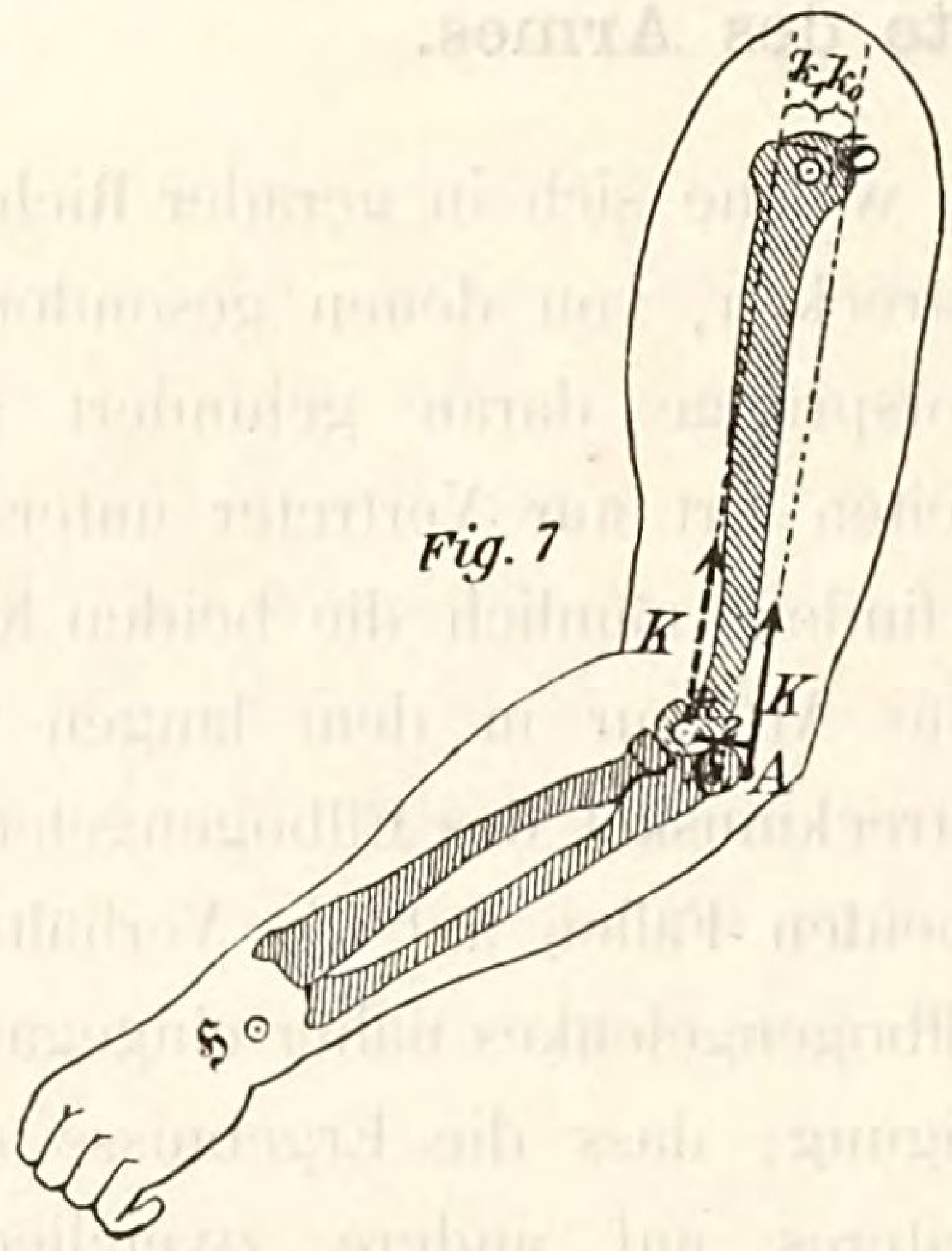
Ist $k_1$ der Abstand der nach dem Ellbogengelenkmittelpunkt verlegten Kraftrichtung vom Schultergelenkmittelpunkte $\mathfrak{S}$ und $k_2$ der Abstand der resultirenden Richtung des Muskelzuges vom Ellbogengelenkmittelpunkt, so besitzen die beiden auf Oberarm und Unterarm ausgeübten Drehungsmomente nach I, 2 die Werthe:

$$D_1 = \pm Kk_1 \quad \text{und} \quad D_2 = \pm Kk_2 .$$

Für einen Muskel, welcher auf der Beugeseite des Ellbogengelenkes vorüber zieht, besitzt $D_2$ das positive, für einen Streckmuskel des Ellbogengelenkes das negative Vorzeichen. Dagegen kann

man nicht von vornherein aus der Lage des Ansatzpunktes des Muskels entscheiden, ob $D_1$ positiv oder negativ zu rechnen ist. Das richtet sich ganz danach, ob die nach dem Ellbogengelenkmittelpunkte 𝔈 versetzte Kraft den Oberarm im Sinne des Uhrzeigers oder im umgekehrten Sinne zu drehen strebt. Das erstere ist der Fall, wenn die nach 𝔈 verlegte Kraftrichtung vor dem Schultergelenkmittelpunkt, das letztere, wenn sie hinter dem Schultergelenkmittelpunkt vorbeizieht. Bei der in Figur 7 angedeuteten Haltung des Armes würden beispielsweise die Drehungsmomente, welche der lange Kopf des M. triceps brachii auf die beiden Armabschnitte ausübt, lauten:

Fig. 7




$$D_1 = + Kk_1 \quad \text{und} \quad D_2 = - Kk_2 .$$

Das Verhalten eines solchen Muskels kann für verschiedene Stellungen des Armes ein ganz verschiedenes sein. Insbesondere kommt es vor, dass die nach 𝔈 verlegte Kraftrichtung mit der Oberarmlängsaxe zusammenfällt; dann ist der Werth von $D_1$ gleich Null.

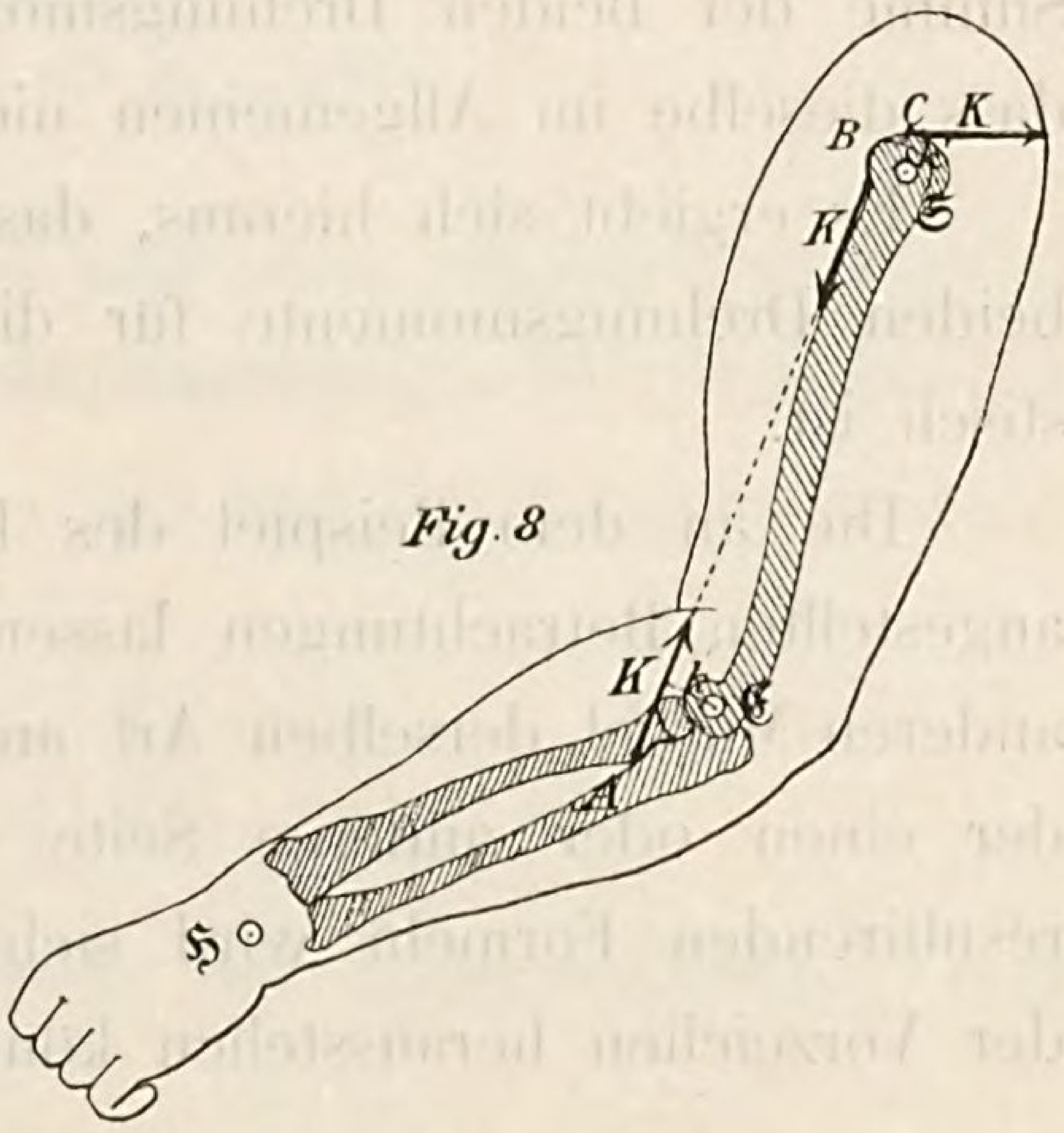
*β) Muskeln, welche sich nicht geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen können.*

Wenn ein Muskel, wie z. B. der lange Kopf des M. biceps brachii, über den Kopf des Oberarmknochens hinweggezwungen ist (vgl. Figur 8), so wirkt er im Grunde mit drei Kräften von gleicher Intensität $K$ auf das Armsystem ein. Die eine Kraft greift am Ansatz $A$ des Muskels an und besitzt die Richtung des dem Ansatz zunächst liegenden Theiles des resultirenden Muskelzuges; eine zweite Kraft besitzt ihren Angriffspunkt an der Stelle $B$, an welcher der Muskel, wenn man ihn vom Ansatz aus verfolgt, zuerst mit dem Humeruskopf in Berührung kommt, und zieht nach dem Ansatz hin; die dritte Kraft greift endlich an dem Punkte $C$ an, von welchem aus die Muskelsehne sich frei nach dem Schulterblatt herüberspannen kann, und zieht nach dem Ursprung hin. Es kommt dabei gar nicht in

Betracht, dass auf dieser letzten Strecke der Muskel gar keine Fasern mehr besitzt; wenn der Muskel sich contrahirt, so wird doch an jeder Stelle desselben die gleiche Spannung vorhanden sein. Würde man etwa die vom Ursprung ausgehende Sehne des Muskels auf der Strecke zwischen Ursprung und Humeruskopf zerschneiden, so müsste man an beiden Stümpfen mit derselben Kraft, welche der Muskel bei seiner Contraction entwickelt, ziehen, um das Auseinanderweichen der beiden Enden der Sehne an der Schnittstelle zu verhindern.

Man kann sich nun die weitere Untersuchung der drehenden Einwirkung des Muskels dadurch vereinfachen, dass man die beiden ersten der drei Kräfte zusammen betrachtet. Der Muskel kann dann zweckmässiger Weise als aus zwei gesonderten Theilen zusammengesetzt angesehen werden, welche beide die gleiche Spannung bei der Contraction besitzen. Der eine Theil entspricht einem eingelenkigen Muskel mit den beiden Insertionspunkten $A$ und $B$, der andere einem Muskel, welcher im Punkte $C$ des Humeruskopfes ansetzt und am Schulterblatt seinen Ursprung besitzt. Sind $D'_1, D'_2$ die Drehungsmomente, welche der letztere Theil und $D''_1$, $D''_2$ diejenigen, welche der erstere Theil auf die beiden Abschnitte des Armes ausübt, so hat man dann

Fig. 8




$$D_1 = D'_1 + D''_1 \quad \text{und} \quad D_2 = D'_2 + D''_2 .$$

Ist $k'$ die Entfernung des dem Ursprung zunächst liegenden Theiles des resultirenden Muskelzuges vom Schultergelenkmittelpunkte und $k$ die Entfernung des zwischen $A$ und $B$ liegenden resultirenden Muskelzuges vom Ellbogengelenkmittelpunkte, so hat man nach I, 4 unter Berücksichtigung der besonderen Verhältnisse des M. biceps brachii

$$D'_1 = + Kk' ; \quad D'_2 = 0$$

und nach I, 5

$$D''_1 = - Kk ; \quad D''_2 = + Kk .$$

Demnach wirkt der Muskel auf die beiden Armabschnitte mit folgenden Drehungsmomenten ein:

$$D_1 = + Kk' - Kk \quad \text{oder} \quad K(k' - k) \quad \text{resp.} \quad - K(k - k'),$$
$$D_2 = + Kk.$$

Vergleicht man die beiden Werthe der Drehungsmomente miteinander, so kommt man zu einem anderen Resultat wie bei den eingelenkigen Muskeln. Die Summe derselben besitzt hier nicht den Werth Null, sondern es ist

$$D_1 + D_2 = Kk'.$$

Verschafft man sich in dem unter I, 6 $\alpha$ behandelten Falle die Summe der beiden Drehungsmomente, so erkennt man auch dort, dass dieselbe im Allgemeinen nicht den Werth Null annimmt.

Es ergiebt sich hieraus, dass das Verschwinden der Summe der beiden Drehungsmomente für die eingelenkigen Muskeln charakteristisch ist.

Die an dem Beispiel des langen Kopfes des M. biceps brachii angestellten Betrachtungen lassen sich nun ohne Weiteres auf jeden anderen Muskel derselben Art anwenden, gleichgültig ob derselbe auf der einen oder anderen Seite der Gelenke vorüberzieht. In den resultirenden Formeln wird sich dann nur ein Unterschied betreffs der Vorzeichen herausstellen können.

## 7. Die Bedingungen, unter denen sich Schwere und Muskeln das Gleichgewicht halten können.

Das ganze Armsystem wird trotz der Einwirkung von Schwere und Muskeln in Ruhe verharren, wenn sowohl alle Drehungsmomente, welche auf den Oberarm einwirken, als auch alle Drehungsmomente, welche auf den Unterarm ausgeübt werden, sich gegenseitig aufheben. Es muss daher sowohl die Summe der Drehungsmomente des Oberarmes als die Summe der Drehungsmomente des Unterarmes gleich Null sein. Bezeichnet man im Folgenden mit $D_1$ und $D_2$ nur die Drehungsmomente, mit welchen irgend ein Muskel bei seiner Contraction auf die beiden Abschnitte des Armes einwirkt und verwendet für die Schwere in allen Fällen die unter I, 3 aufgestellten

Werthe der Drehungsmomente, so lauten die beiden Bedingungsgleichungen für den Fall, dass der Schwere durch einen einzigen Muskel das Gleichgewicht gehalten werden soll, ganz allgemein:

$$- m_0 c_1 \sin \varphi_1 + D_1 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin \varphi_2 + D_2 = 0 \,,$$

wobei für $\varphi_2$ auch die Summe $\varphi_1 + \psi$ eingesetzt werden kann.

Nach den eingeführten Bezeichnungen erhält man hieraus für

*α) das Gleichgewicht zwischen Schwere und einem Muskel, dessen Ursprung sich am Rumpf und dessen Ansatz sich am Oberarm befindet*, nach I, 4:

$$- m_0 c_1 \sin \varphi_1 \pm Kk = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin \varphi_2 = 0 \,;$$

*β) das Gleichgewicht zwischen Schwere und einem Muskel, welcher sich zwischen Oberarm und Unterarm erstreckt (eingelenkigen Muskel)*, nach I, 5,

wenn der Muskel auf der Beugeseite des Ellbogengelenkes vorüberzieht (Figur 5):

$$- m_0 c_1 \sin \varphi_1 - Kk = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin \varphi_2 + Kk = 0 \,,$$

und wenn derselbe auf der Streckseite des Ellbogengelenkes liegt (Figur 6):

$$- m_0 c_1 \sin \varphi_1 + Kk = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin \varphi_2 - Kk = 0 \,;$$

*γ) das Gleichgewicht zwischen Schwere und einem Muskel, dessen Ursprung sich am Rumpf und dessen Ansatz sich am Unterarm befindet*,

wenn der Muskel sich zwischen Ursprung und Ansatz geradlinig ausspannen kann, nach I, 6 α (Figur 7):

$$- m_0 c_1 \sin \varphi_1 \pm Kk_1 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin \varphi_2 \pm Kk_2 = 0 \,,$$

(in dem durch Figur 7 dargestellten Falle des langen Kopfes vom M. triceps brachii ist in der oberen Gleichung das positive, in der unteren das negative Vorzeichen für die Drehungsmomente des Muskels zu verwenden);

wenn der Muskel sich nicht geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen kann, nach I, 6 $\beta$ (Figur 8):

$$- m_0 c_1 \sin \varphi_1 \pm Kk' \pm Kk = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin \varphi_2 \pm Kk = 0\,.$$

(In dem durch Figur 8 dargestellten Falle des langen Kopfes vom M. biceps brachii ist in der oberen Gleichung zuerst das positive und dann das negative, in der unteren Gleichung dagegen wieder das positive Vorzeichen für die Drehungsmomente des Muskels zu verwenden.)

$\delta$) *das Gleichgewicht zwischen Schwere und einer Gruppe von Muskeln* hat man allgemein:

$$- m_0 c_1 \sin \varphi_1 + \Sigma D_1 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin \varphi_2 + \Sigma D_2 = 0\,,$$

unter $\Sigma D_1$ und $\Sigma D_2$ die Summe sämmtlicher Drehungsmomente verstanden, mit denen die Muskeln auf die beiden Abschnitte des Armes einwirken. —

Bevor auf die Bedeutung der Gleichgewichtsbedingungen in den verschiedenen Fällen und auf deren Verwendung zur Bestimmung der Muskelkraft näher eingegangen wird, sollen dieselben noch einmal auf anderem Wege, unter Anwendung des Princips der virtuellen Verrückungen abgeleitet werden.

## II. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen mit Hülfe des Princips der virtuellen Verrückungen.

Um das Princip der virtuellen Verrückungen richtig verstehen und auf das betrachtete Körpersystem des im Ellbogengelenk gegliederten Armes bei fixirtem Rumpf und Schultergürtel anwenden zu können, muss man sich zunächst über zwei Begriffe Klarheit verschaffen: den Begriff der virtuellen Verrückungen des Armsystems und den Begriff der virtuellen Elementararbeit, welche eine am Oberarm oder Unterarm angreifende Kraft bei irgend einer virtuellen Verrückung des Systems leistet.

Man nennt bekanntlich eine Verrückung, d. h. eine sehr kleine Bewegung eines Körpers oder Körpersystems, virtuell, wenn sie mit den Bedingungen der Beweglichkeit verträglich, also möglich ist, von dem Körpersystem thatsächlich ausgeführt werden kann. Dabei ist natürlich nicht nothwendig, dass sie im gegebenen Falle auch wirklich ausgeführt wird. Für einen vollständig frei beweglichen Körper sind alle Verrückungen virtuell. Sobald aber die Beweglichkeit des Körpers eingeschränkt wird, scheidet gewöhnlich eine grosse Anzahl von Verrückungen aus der Classe der virtuellen Verrückungen aus. Wenn beispielsweise bei allen Bewegungen eines Körpers ein Punkt fest bleiben soll, wie bei den Bewegungen des Oberschenkelknochens gegen das fixirte Becken der Mittelpunkt des Femurkopfes, so scheiden alle die kleinen Bewegungen des Körpers aus der Classe der virtuellen Verrückungen aus, bei denen der betreffende Punkt seinen Ort verändern würde. Es bleiben aber immerhin noch unzählig viele Verrückungen übrig, welche virtuell sind, nämlich alle kleinen Drehungen des Körpers um den festen Punkt. Dabei lässt sich in dem vorliegenden Falle eine jede virtuelle Verrückung aus drei sehr kleinen Drehungen um drei zu einander senkrechte,

entweder im Körper oder im Raume festliegende Axen zusammensetzen; oder mit anderen Worten, es lässt sich eine jede virtuelle Verrückung in drei von einander unabhängige Verrückungscomponenten zerlegen. Für einen um eine feste Axe drehbaren Körper giebt es von jeder bestimmten Stellung des Körpers aus überhaupt nur zwei Verrückungen, welche virtuell sind, nämlich eine sehr kleine Drehung um die feste Axe in dem einen Sinne und eine eben solche in dem entgegengesetzten Sinne.

Es fragt sich nun: Welche Verrückungen sind unter den gemachten Voraussetzungen für den im Ellbogengelenk gegliederten Arm virtuell? Die allgemeinste virtuelle Verrückung des Armes von irgend einer Haltung desselben aus besteht in einer kleinen Drehung im Schultergelenk und gleichzeitiger kleinen Drehung im Ellbogengelenk. Dieselbe lässt sich daher in zwei von einander unabhängige Verrückungscomponenten zerlegen, nämlich in eine kleine Drehung im Schultergelenk bei festgestelltem Ellbogengelenk und eine kleine Drehung im Ellbogengelenk bei feststehendem Schultergelenk. Bei der ersteren ändert sich nur der Winkel $\varphi_1$ (Figur 1 auf Seite 280) ein wenig, während $\psi$ constant bleibt, bei der letzteren wird dagegen umgedreht $\varphi_1$ constant bleiben und sich nur $\psi$ ein wenig verändern. Aus diesem Grunde soll die erstere der beiden Verrückungscomponenten in Zukunft kurz mit $V_\varphi$ und die letztere mit $V_\psi$ bezeichnet sein. Durch geeignete Wahl von $V_\varphi$ und $V_\psi$ kann man jede beliebige virtuelle Verrückung des Armes hervorbringen.

Man kann nun die Zerlegung in zwei von einander unabhängige Verrückungscomponenten noch in anderer Weise vornehmen. Bei dem Uebergang aus einer Haltung des Armes in eine benachbarte werden im Allgemeinen nicht nur die Gelenkstellungen, sondern es werden auch die Richtungen der Längsaxen von Ober- und Unterarm im Raume geändert. Man kann daher eine jede virtuelle Verrückung des Armes auch zusammengesetzt denken aus einer kleinen Bewegung, bei welcher allein die Richtung der Oberarmlängsaxe sich ein wenig ändert, während die Unterarmlängsaxe ihre Richtung im Raume beibehält, und einer kleinen Bewegung, bei welcher umgedreht die Oberarmlängsaxe ihre Richtung unverändert beibehält und nur die Richtung der Unterarmlängsaxe sich ein wenig ändert. Die erstere

Verrückungscomponente besteht in einer kleinen Drehung des Oberarmes im Schultergelenk mit gleichzeitiger Parallelverschiebung des Unterarmes, die letztere in einer kleinen Drehung des Unterarmes im Ellbogengelenk bei feststehendem Oberarm. Bei der ersteren ändert sich nur der Winkel $\varphi_1$ (Figur 1 auf Seite 280) ein wenig, während $\varphi_2$ (nicht aber $\psi$) constant bleibt, bei der letzteren wird dagegen umgedreht $\varphi_1$ constant bleiben und sich nur $\varphi_2$ ein wenig ändern. Es ist daher zweckmässig, diese beiden Verrückungscomponenten mit $V_{\varphi_1}$ und $V_{\varphi_2}$ zu bezeichnen. Auch durch diese kann bei geeigneter Wahl ihrer Grössen jede beliebige virtuelle Verrückung des Armes hervorgebracht werden.

Es lässt sich nicht leugnen, dass das erste Paar von Verrückungscomponenten anschaulicher und leichter aufzufassen ist als das zweite. Ausserdem entspricht jenes auch mehr der in der Anatomie und Physiologie gebräuchlichen Anschauungsweise, alle Aenderungen der Haltung des menschlichen Körpers als Folge von Aenderungen der Gelenkstellungen anzusehen. Andererseits zeigt sich aber, dass die Resultate bei der Verwendung des zweiten Paares von Verrückungscomponenten zum Theil in einfacherer und mehr symmetrischer Form erscheinen. Ferner ist nicht zu verkennen, dass das erste Paar von Verrückungscomponenten sich der Bestimmung der Armhaltung mit Hülfe der beiden Winkel $\varphi_1$ und $\psi$, dagegen das zweite Paar sich derjenigen mit Hülfe der Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ (vergl. Seite 281) anschmiegt. Aus diesem Grunde soll im Folgenden von beiden Arten der Zerlegung der allgemeinsten virtuellen Verrückung des Armes in Componenten Gebrauch gemacht werden.

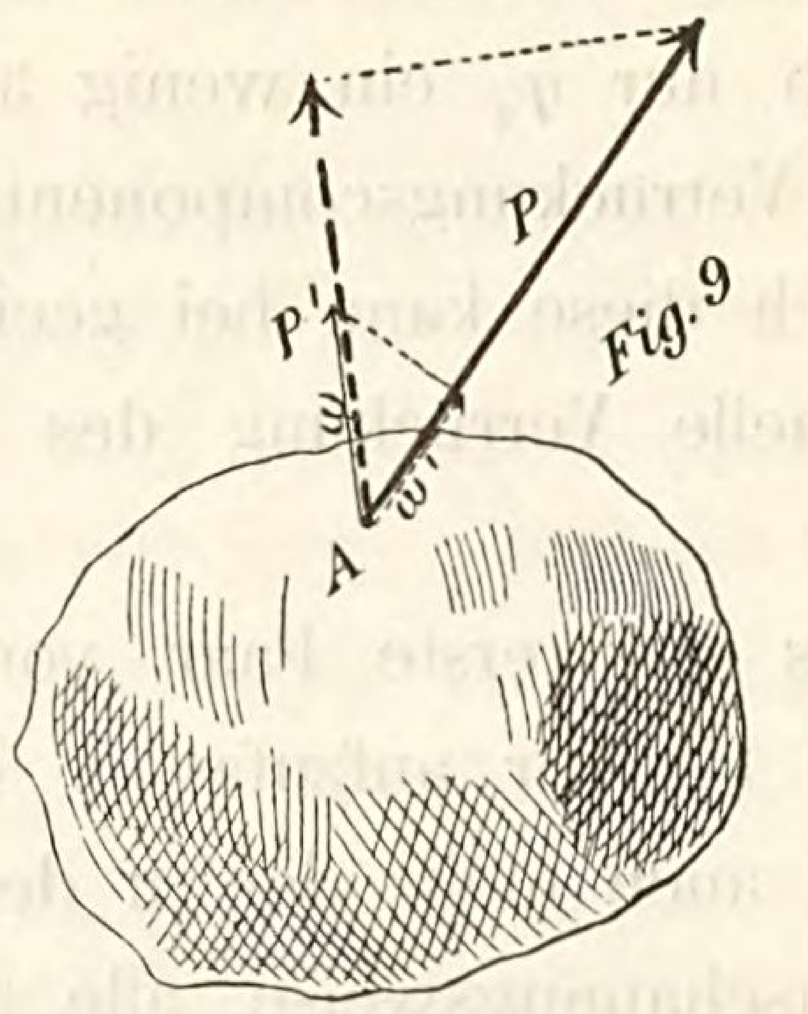
Um das Princip der virtuellen Verrückungen anwenden zu können, hat man nun die Frage zu beantworten: Welche Elementararbeiten leisten die einzelnen an den beiden Abschnitten des Armes angreifenden Kräfte bei den verschiedenen Componenten der virtuellen Verrückungen des Systems?

Die Arbeit, welche eine Kraft leistet, während ihr Angriffspunkt den Weg $w$ zurücklegt, wird bekanntlich durch das Product aus dem Weg $w$ des Angriffspunktes $A$ und der in die Richtung des Weges fallenden Componente $P'$ der Kraft $P$ (Figur 9, nächste Seite), oder durch das Product aus der Kraft $P$ und der in die Richtung der Kraft fallenden Wegcomponente $w'$ gemessen. Beide Bestimmungen kommen auf

dasselbe hinaus, denn aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke in Figur 9 folgt unmittelbar die Proportion

$$P' : P = w' : w$$

und hieraus die Gleichheit von $P.w'$ und $P'.w$. Je nachdem Kraftrichtung und Wegrichtung einen spitzen oder stumpfen Winkel mit




einander bilden, ist die Arbeit positiv oder negativ zu rechnen, weil in dem ersteren Falle Kraft und Wegcomponente bezüglich Kraftcomponente und Weg gleiche, im letzteren Falle entgegengesetzte Richtung besitzen.

Man nennt die von einer Kraft geleistete Arbeit »Elementararbeit«, wenn ihr Angriffspunkt nur einen verschwindend kleinen Weg zurückgelegt hat, und redet insbesondere von »virtueller Elementararbeit«, wenn die kleine Bewegung des Angriffspunktes die Folge einer virtuellen Verrückung des ganzen Systems ist.

Es soll nun zunächst untersucht werden, welche virtuelle Elementararbeiten eine am Oberarm angreifende und welche virtuelle Elementararbeiten eine am Unterarm angreifende Kraft bei den vier verschiedenen Componenten der virtuellen Verrückungen des Armes leistet. Mit Hülfe der gewonnenen Resultate lassen sich dann leicht die von der Schwere und den verschiedenen Muskelarten geleisteten virtuellen Elementararbeiten angeben. Damit sind aber alle Unterlagen geschaffen, um das Princip der virtuellen Verrückungen für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen verwenden zu können.

## 1. Die Elementararbeiten, welche eine am Oberarm angreifende Kraft bei den verschiedenen Componenten der virtuellen Verrückungen des Armes leistet.

Eine am Oberarm angreifende Kraft $P$ (Figur 10) wird nur bei denjenigen Componenten der virtuellen Verrückungen Arbeit leisten, welche eine Bewegung ihres Angriffspunktes $A$ bedingen. Dies ist aber nur der Fall, wenn eine Drehung im Schultergelenk stattfindet.

Daraus geht hervor, dass eine derartige Kraft bei den Verrückungscomponenten $V_\psi$ und $V_{\varphi_2}$ überhaupt keine Arbeit leistet. Es ist ferner leicht ersichtlich, dass die virtuelle Elementararbeit von $P$ bei den beiden anderen Componenten $V_\varphi$ und $V_{\varphi_1}$ dieselbe sein wird, sofern nur die kleine Drehung im Schultergelenk bei beiden Verrückungen gleich gross ist und in demselben Drehungssinne stattfindet; denn diese beiden Verrückungen unterscheiden sich nur in dem Verhalten des Unterarmes. Bezeichnet man den kleinen Weg, welchen ein in der Entfernung 1 vom Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ gelegener Punkt bei den Verrückungen $V_\varphi$ oder $V_{\varphi_1}$ beschreiben würde, mit $\delta\varphi_1$, so wird der Angriffspunkt $A$ der Kraft $P$ einen $e$-mal so grossen Weg beschreiben, wenn $e$ die Entfernung des Punktes $A$ vom Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ bedeutet. Der Weg von $A$ ist in Wirklichkeit ein kleines Kreisbogenstück, kann aber in Folge der Voraussetzung, dass es sich bei den virtuellen Verrückungen nur um verschwindend kleine Ortsänderungen handelt, mit genügender Annäherung als geradlinig aufgefasst werden. Bilden Kraftrichtung und Wegrichtung den Winkel $\alpha$ mit einander, so ist die Componente der Kraft in der Wegrichtung gleich $P\cos\alpha$ und umgekehrt die Componente des Weges in der Kraftrichtung gleich $e\,\delta\varphi_1 \,.\, \cos\alpha$. Man erhält also auf jeden Fall als Werth der virtuellen Elementararbeit der Kraft:

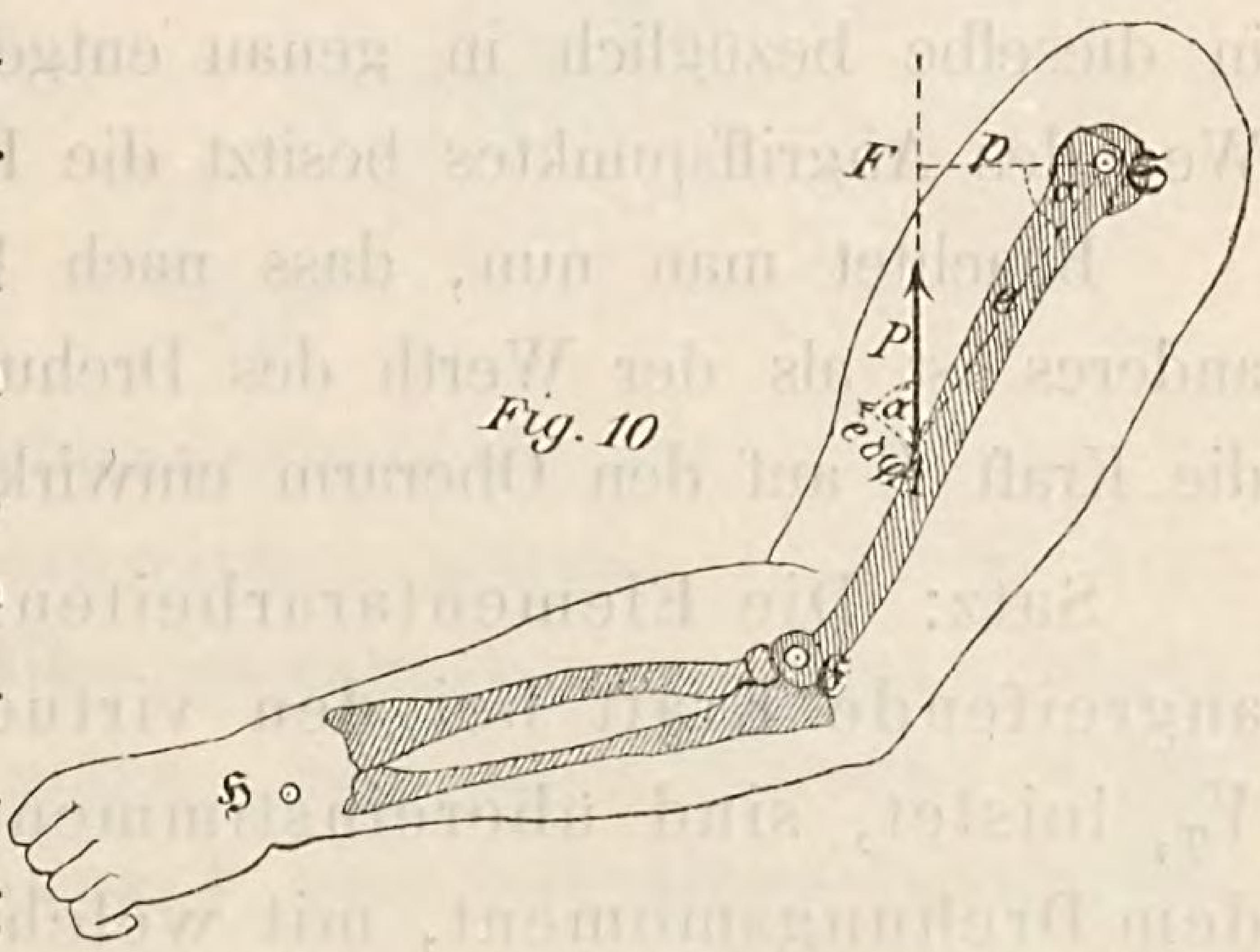


Fig. 10

$$Pe\cos\alpha \,.\, \delta\varphi_1 \,.$$

Denkt man sich nun von $\mathfrak{S}$ das Loth auf die Richtung der Kraft $P$ gefällt, so erkennt man, dass das Product $e\cos\alpha$ die Länge $p$ dieses Lothes darstellt; denn das entstehende rechtwinklige Dreieck $AF\mathfrak{S}$ besitzt in dem durch Figur 10 dargestellten Falle bei $\mathfrak{S}$ denselben Winkel $\alpha$, welchen Kraft- und Wegrichtung mit einander bilden. Würde die Kraft $P$ die entgegengesetzte Richtung wie in Figur 10 besitzen, so wäre der Winkel $\alpha$ zwischen Kraft- und Wegrichtung

stumpf; es würde dann der an der Ecke $\mathfrak{S}$ gelegene Winkel des rechtwinkligen Dreiecks $AF\mathfrak{S}$ nicht gleich dem Winkel $\alpha$ sein, sondern den letzteren zu $180^\circ$ ergänzen. In Folge dessen würde dann $e \cos\alpha = -p$ zu setzen sein. Es lässt sich daher die virtuelle Elementararbeit, welche die Kraft $P$ bei den Verrückungen $V_\varphi$ und $V_{\varphi_1}$ leistet, in der Form darstellen $\pm Pp\delta\varphi_1$. Einfacher gelangt man zu diesem Resultate, wenn man von dem Satze Gebrauch macht, dass eine Kraft ohne Aenderung ihrer Wirkung nach einem beliebigen Punkte ihrer Richtung verschoben werden kann. Man braucht nur den Angriffspunkt der Kraft $P$ nach dem Punkte $F$ verlegt zu denken und dabei die Annahme zu machen, dass dieser Punkt mit dem Oberarm starr verbunden sei, um das Resultat gleich anschreiben zu können; denn es fallen dann Kraft und Weg des Angriffspunktes in dieselbe bezüglich in genau entgegengesetzte Richtung, und der Weg des Angriffspunktes besitzt die Länge $p\delta\varphi_1$.

Beachtet man nun, dass nach I, 1 das Product $\pm Pp$ nichts anderes ist als der Werth des Drehungsmomentes $D_1$, mit welchem die Kraft $P$ auf den Oberarm einwirkt, so erhält man den

Satz: Die Elementararbeiten, welche eine am Oberarm angreifende Kraft bei den virtuellen Verrückungen $V_\varphi$ und $V_{\varphi_1}$ leistet, sind übereinstimmend gleich dem Producte aus dem Drehungsmoment, mit welchem die Kraft auf den Oberarm einwirkt, und dem kleinen Wege, welchen ein in der Entfernung 1 vom Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ gelegener Punkt des Oberarmes bei den beiden Verrückungen beschreibt.

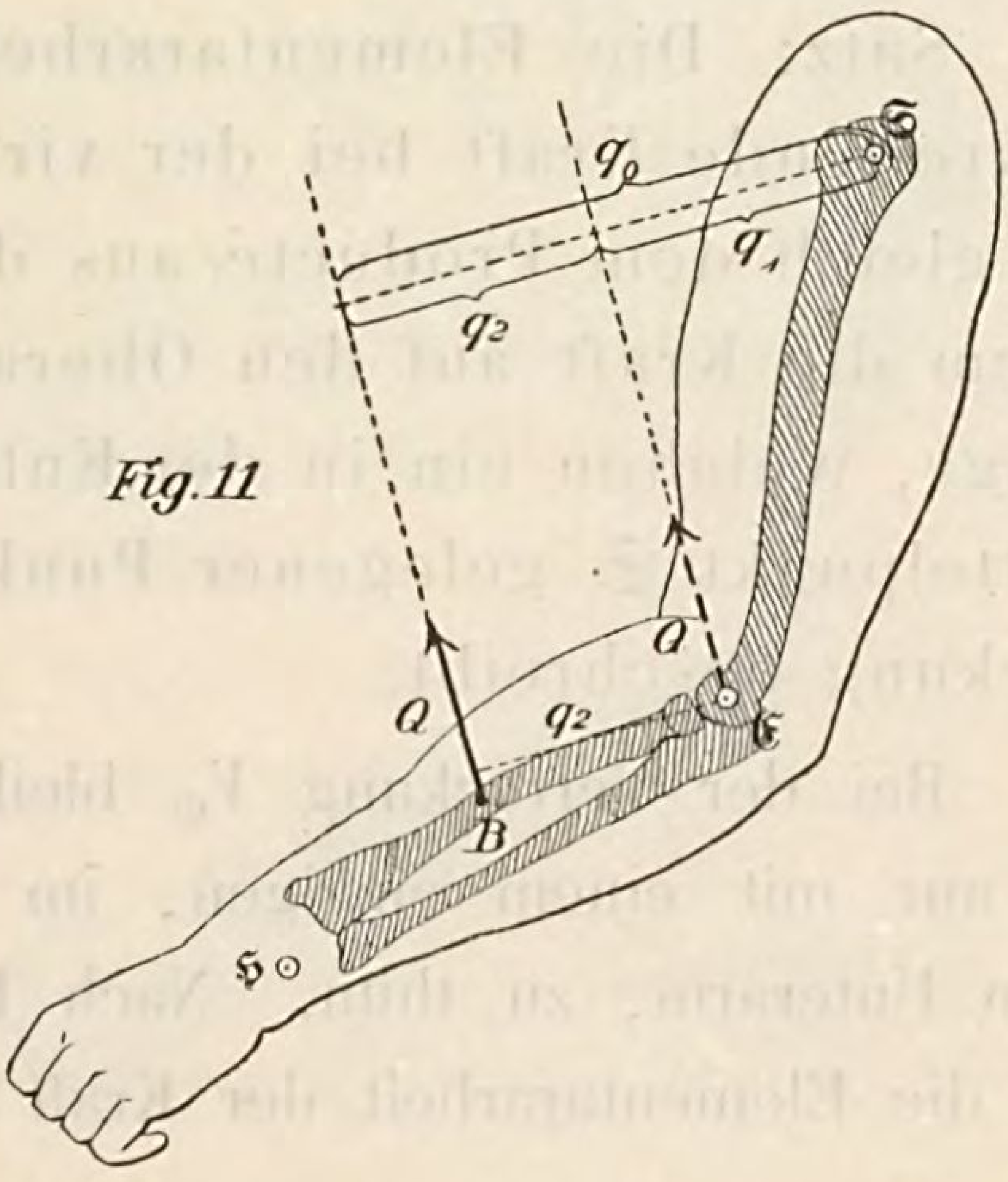
Diesem Satze ist der folgende hinzuzufügen:

Satz: Eine am Oberarm angreifende Kraft leistet bei den beiden Verrückungen $V_\psi$ und $V_{\varphi_2}$ keine Elementararbeit.

## 2. Die Elementararbeiten, welche eine am Unterarm angreifende Kraft bei den verschiedenen Componenten der virtuellen Verrückungen des Armes leistet.

Bei der Verrückung $V_\varphi$ verhält sich der ganze Arm wie eine einzige im Schultergelenk drehbare starre Masse. Es wird daher nach II, 1 eine im Punkte $B$ des Unterarmes angreifende Kraft $Q$

(Figur 11) eine Elementararbeit von der Grösse $\pm\, Q q_0 \delta\varphi_1$ leisten, unter $q_0$ den jeweiligen Abstand des Schultergelenkmittelpunktes von der Richtung der in $B$ angreifenden Kraft verstanden. Das Product $\pm\, Q q_0$ giebt nun die Grösse des Drehungsmoments an, mit welchem die Kraft $Q$ auf den ganzen Arm einwirken würde, wenn derselbe durch Feststellung des Ellbogengelenkes in eine einzige starre Masse verwandelt wäre. Bezeichnet man dasselbe mit $D_0$, so kann man die Elementararbeit auch in der Form $D_0 \delta\varphi_1$ schreiben. Man hat daher den




Satz: Die Elementararbeit, welche eine am Unterarm angreifende Kraft bei der virtuellen Verrückung $V_\varphi$ leistet, ist gleich dem Producte aus dem Drehungsmoment, mit welchem die Kraft auf den ganzen Arm einwirken würde, wenn derselbe durch Feststellung des Ellbogengelenks in eine einzige starre Masse verwandelt wäre, und dem kleinen Wege, welchen ein in der Entfernung 1 vom Schultergelenkmittelpunkt 𝔖 gelegener Punkt des Oberarmes bei der Verrückung beschreibt.

Bei der Verrückung $V_{\varphi_1}$ bewegt sich der Unterarm parallel im Raume fort, während der Oberarm sich im Schultergelenk dreht. In Folge der kleinen Parallelverschiebung des Unterarmes beschreiben alle Punkte desselben Wege von gleicher Grösse und Richtung. Es ist also beispielsweise der Weg des Angriffspunktes $B$ der Kraft bei der Verrückung $V_{\varphi_1}$ genau gleich dem Weg, welchen der Ellbogengelenkmittelpunkt 𝔈 dabei beschreibt. Das heisst aber nichts anderes, als dass die Kraft $Q$ genau die gleiche Elementararbeit leisten würde, wenn sie nicht im Punkte $B$, sondern im Punkte 𝔈 mit gleicher Grösse und in derselben Richtung angriffe; denn die Elementararbeit hängt ja ausser von der Kraft nur noch von dem Wege ihres Angriffspunktes ab. Denkt man nun die Kraft nach dem Punkte 𝔈 verlegt (Figur 11), so lässt sich ihre Elementararbeit deshalb leicht

angeben, weil dieser Punkt auch dem Oberarm als fester Punkt angehört. Nach II, 1 und I, 2 ergiebt sich als Grösse der Elementararbeit

$$\pm Q q_1 \, \delta\varphi_1 \quad \text{oder} \quad D_1 \, \delta\varphi_1 .$$

Hieraus folgt der

Satz: Die Elementararbeit, welche eine am Unterarm angreifende Kraft bei der virtuellen Verrückung $V_{\varphi_1}$ leistet, ist gleich dem Producte aus dem Drehungsmoment, mit welchem die Kraft auf den Oberarm einwirkt, und dem kleinen Wege, welchen ein in der Entfernung 1 vom Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ gelegener Punkt des Oberarmes bei der Verrückung beschreibt.

Bei der Verrückung $V_\psi$ bleibt der Oberarm fest, und man hat es nur mit einem einzigen, im Ellbogengelenk drehbaren Körper, dem Unterarm, zu thun. Nach II, 1 und I, 2 erhält man demnach für die Elementararbeit der Kraft $Q$ den Werth

$$\pm Q q_2 \, \delta\psi \quad \text{oder} \quad D_2 \, \delta\psi ,$$

unter $\delta\psi$ den kleinen Weg verstanden, welchen ein vom Ellbogengelenkmittelpunkt in der Einheit der Entfernung gelegener Punkt des Unterarmes bei der Verrückung beschreibt.

Da die Verrückung $V_{\varphi_2}$ nicht von der Verrückung $V_\psi$ verschieden ist, so erhält man natürlich auch den gleichen Werth

$$\pm Q q_2 \, \delta\varphi_2 \quad \text{oder} \quad D_2 \, \delta\varphi_2$$

für die Elementararbeit der Kraft $Q$, wobei nur zum Unterschied der kleine Weg eines Punktes des Unterarmes, welcher vom Ellbogengelenkmittelpunkt die Entfernung 1 besitzt, mit $\delta\varphi_2$ bezeichnet ist.

Man kann diese Resultate in den weiteren Satz zusammenfassen:

Satz: Die Elementararbeiten, welche eine am Unterarm angreifende Kraft bei den virtuellen Verrückungen $V_\psi$ und $V_{\varphi_2}$ leistet, sind übereinstimmend gleich dem Producte aus dem Drehungsmoment, mit welchem die Kraft auf den Unterarm einwirkt, und dem kleinen Wege, welchen ein in der Entfernung 1 vom Ellbogengelenkmittelpunkt $\mathfrak{E}$ gelegener Punkt des Unterarmes bei den beiden Verrückungen beschreibt.

### 3. Die Elementararbeiten der Schwere.

Da bei der Verrückung $V_\varphi$ der ganze Arm sich wie eine starre Masse verhält, so kann man sich für die Bestimmung der Elementararbeit der Schwere das Gesammtgewicht $m_0$ im Gesammtschwerpunkte $S_0$ angebracht denken. Bezeichnet man mit $r_0$ die Entfernung des Schultergelenkmittelpunktes $\mathfrak{S}$ von der Schwerlinie durch $S_0$ (Figur 12), so ist nach II, 1 die Elementararbeit der Schwere gleich

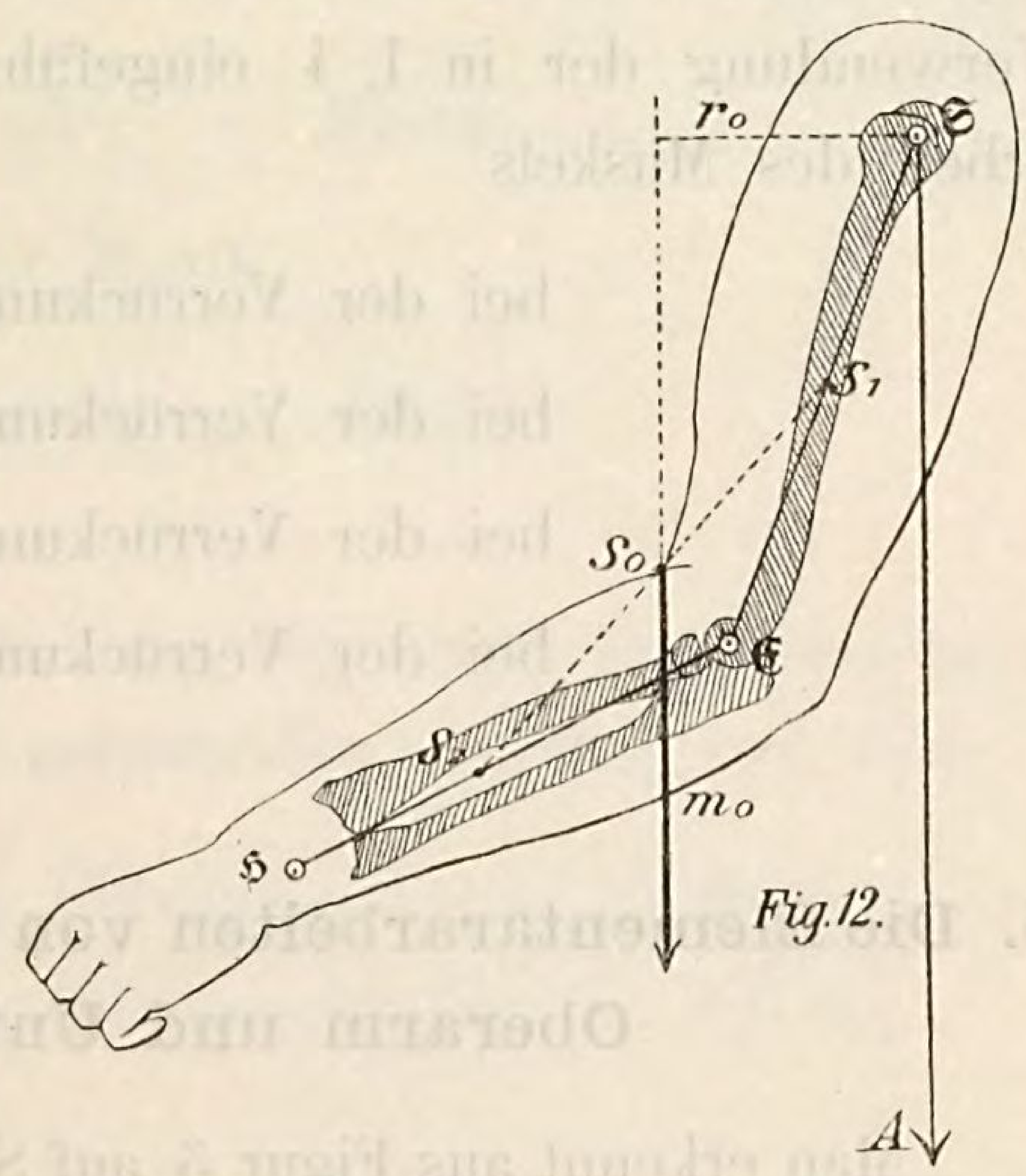


Fig. 12.

$$- m_0 r_0 \delta\varphi_1 .$$

Bei der Verrückung $V_\psi$ besitzt nach II, 1; II, 2 und I, 3 die Elementararbeit der Schwere den Werth

$$- m_2 r_2' \delta\psi \quad \text{oder} \quad - m_0 c_2' \delta\psi , \quad \text{(vgl. Seite 288)},$$

wofür man auch setzen kann

$$- m_2 r_2 \sin(\varphi_1 + \psi)\delta\psi \quad \text{oder} \quad - m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)\delta\psi .$$

Für die Verrückung $V_{\varphi_1}$ kann man das Gewicht des Unterarmes nach II, 2 nach dem Ellbogengelenkmittelpunkte und in Folge dessen nach I, 3 das Gesammtgewicht des Armes nach dem Hauptpunkte des Oberarmes (Figur 4) verlegt denken. Es ergiebt sich in Folge dessen als Werth der Elementararbeit nach I, 3

$$- m_0 c_1' \delta\varphi_1 \quad \text{oder} \quad - m_0 c_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 .$$

Die Elementararbeit, welche die Schwere bei der Verrückung $V_{\varphi_2}$ leistet, kann wiederum nicht verschieden sein von der Elementararbeit bei der Verrückung $V_\psi$. Verwendet man, wie früher, an Stelle von $\delta\psi$ die Bezeichnung $\delta\varphi_2$ für den kleinen Weg eines Punktes in der Entfernung 1 vom Ellbogengelenk, so hat man als Werth der Elementararbeit:

$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)\delta\varphi_2 .$$

## 4. Die Elementararbeiten von Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Oberarm ansetzen.

Da ein solcher Muskel nach I, 4 wie eine einzige am Oberarm angreifende Kraft auf den Arm einwirkt, so hat man nach II, 1 unter Verwendung der in I, 4 eingeführten Bezeichnungen als Elementararbeit des Muskels

bei der Verrückung $V_\varphi$ : $\pm Kk\,\delta\varphi_1$

bei der Verrückung $V_\psi$ : $0$

bei der Verrückung $V_{\varphi_1}$: $\pm Kk\,\delta\varphi_1$

bei der Verrückung $V_{\varphi_2}$: $0$.

## 5. Die Elementararbeiten von Muskeln, welche sich zwischen Oberarm und Unterarm erstrecken.

Man erkennt aus Figur 5 auf Seite 291 leicht, dass die Elementararbeiten, welche die beiden in $U$ und $A$ angreifenden Kräfte eines eingelenkigen Muskels bei der Verrückung $V_\varphi$ leisten, sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden. Dieselben werden sich daher aufheben, so dass ein solcher Muskel bei der Verrückung $V_\varphi$ gar keine Arbeit leistet, trotzdem die Angriffspunkte $U$ und $A$ der beiden Kräfte sich bewegen. Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man beachtet, dass dem Muskel bei fixirtem Ellbogengelenk gar nicht gestattet ist, seine Insertionspunkte einander zu nähern. Die beiden Kräfte, welche derselbe bei seiner Contraction entwickelt, stellen für den ganzen starren Arm ein Paar innerer Kräfte dar, die sich gegenseitig vernichten.

Bei der Verrückung $V_\psi$ leistet nur die in $A$ angreifende Kraft eine Elementararbeit, deren Grösse nach II, 2 und I, 5

für einen Beugemuskel des Ellbogengelenks (Fig. 5): $+ Kk\,\delta\psi$

und für einen Streckmuskel des Ellbogengelenks (Fig. 6): $- Kk\,\delta\psi$ ist.

Die Elementararbeiten, welche die beiden Kräfte eines eingelenkigen Muskels bei der Verrückung $V_{\varphi_1}$ leisten, heben sich nicht auf, weil die in $A$ angreifende Kraft nach II, 2 so wirkt, als ob sie

im Ellbogengelenkmittelpunkte 𝔈 angriffe. Nach den in den Figuren 5 und 6 verwendeten Bezeichnungen besitzen dieselben die Werthe

$$\pm Kk' \delta\varphi_1 \quad \text{und} \quad \mp Kk'' . \delta\varphi_1 ,$$

so dass sich für die Gesammtelementararbeit eines Beugemuskels der Werth

$$- K(k'' - k') \delta\varphi_1 \quad \text{oder} \quad - Kk \delta\varphi_1 ,$$

und für die eines Streckmuskels der Werth

$$+ K(k'' - k') \delta\varphi_1 \quad \text{oder} \quad + Kk \delta\varphi_1$$

herausstellt.

Endlich ist die bei der Verrückung $V_{\varphi_2}$ geleistete Elementararbeit wiederum gleich der zu $V_\psi$ gehörenden, so dass man hat

für einen Beugemuskel des Ellbogengelenks: $+ Kk \delta\varphi_2$
und für einen Streckmuskel des Ellbogengelenks: $- Kk \delta\varphi_2$ .

## 6. Die Elementararbeiten von Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Unterarm ansetzen.

### *α) Muskeln, welche sich geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen.*

Da solche Muskeln nur mit einer einzigen am Unterarm angreifenden Kraft auf den Arm wirken, so hat man nach II, 2 und I, 6 $\alpha$, wenn man die schon früher verwendeten Bezeichnungen (Figur 7) beibehält und ausserdem den Abstand des Schultergelenkmittelpunktes von der Richtung der in $A$ angreifenden Kraft mit $k_0$ bezeichnet, als Werth der Elementararbeit

bei der Verrückung $V_\varphi$ : $\pm Kk_0 \delta\varphi_1$
bei der Verrückung $V_\psi$ : $\pm Kk_2 \delta\psi$
bei der Verrückung $V_{\varphi_1}$: $\mp Kk_1 \delta\varphi_1$
bei der Verrückung $V_{\varphi_2}$: $\pm Kk_2 \delta\varphi_2$ .

Welches der beiden Vorzeichen im gegebenen Falle anzuwenden ist, lässt sich leicht entscheiden. Für den in Figur 7 dargestellten Fall des langen Kopfes vom M. triceps brachii gelten die unteren Vorzeichen;

ausserdem kann man allgemein sagen, dass für die Verrückungen $V_\psi$ und $V_{\varphi_2}$ das positive Vorzeichen anzuwenden ist, wenn es sich um einen Beuger, und das negative, wenn es sich um einen Strecker des Ellbogengelenks handelt.

*β) Muskeln, welche sich nicht geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen können.*

Für den durch Figur 8 dargestellten Fall des langen Kopfes des M. biceps brachii erhält man nach I, 6 β; II, 1 und II, 5 als Werth der Elementararbeit

für die Verrückung $V_\varphi$ : $+ Kk' \delta\varphi_1$
für die Verrückung $V_\psi$ : $+ Kk\, \delta\psi$
für die Verrückung $V_{\varphi_1}$: $+ K(k' - k)\, \delta\varphi_1$
für die Verrückung $V_{\varphi_2}$: $+ Kk\, \delta\varphi_2$ .

Die Elementararbeiten anderer Muskeln dieser besonderen Art können sich hiervon nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

## 7. Das Princip der virtuellen Verrückungen und die daraus abgeleiteten Bedingungen, unter denen sich Schwere und Muskeln das Gleichgewicht halten können.

Bezeichnet man mit $D_0$ das Drehungsmoment, mit welchem ein Muskel auf den ganzen Arm wirkt, nachdem das Ellbogengelenk festgestellt worden ist und, wie früher, mit $D_1$ und $D_2$[1]) die Drehungsmomente, mit welchen derselbe auf die beiden Abschnitte des Armes allein einwirkt, so kann man die Elementararbeiten kurz in folgender Form schreiben:

1) Der Grösse nach ist $D_0$ gleich dem Gesammtdrehungsmoment sämmtlicher Kräfte, mit welchen der Muskel auf den ganzen Arm nach Feststellung des Ellbogengelenkes wirkt, in Bezug auf den Schultergelenkmittelpunkt, $D_1$ gleich dem Gesammtdrehungsmoment der Muskelkräfte in Bezug auf den Schultergelenkmittelpunkt, wenn die eventuell am Unterarm angreifende Kraft parallel nach dem Ellbogengelenkmittelpunkt verlegt worden ist, und endlich $D_2$ gleich dem Gesammtdrehungsmoment der Kräfte des Muskels in Bezug auf den Ellbogengelenkmittelpunkt, nachdem das Schultergelenk und damit der ganze Oberarm festgestellt worden ist.

für die Verrückung $V_\varphi$ : $D_0\delta\varphi_1$
für die Verrückung $V_\psi$ : $D_2\delta\psi$
für die Verrückung $V_{\varphi_1}$: $D_1\delta\varphi_1$
für die Verrückung $V_{\varphi_2}$: $D_2\delta\varphi_2$.

Das Princip der virtuellen Verrückungen lautet nun: »Zwei oder mehrere Kräfte halten sich an einem Körper oder Körpersystem das Gleichgewicht, wenn bei jeder virtuellen Verrückung die algebraische Summe der von den Kräften geleisteten Elementararbeiten gleich Null ist.«

Da eine jede allgemeine virtuelle Verrückung des im Ellbogengelenk gegliederten Armes bei festem Schultergürtel durch zwei von einander unabhängige Verrückungscomponenten einfacherer Art zusammengesetzt werden kann, so wird in dem vorliegenden Falle das Gleichgewicht daran erkannt werden, dass gleichzeitig die Summen der bei den beiden Verrückungscomponenten geleisteten Elementararbeiten aller am Arm angreifenden Kräfte verschwinden. Entsprechend der doppelten Art der Zerlegung der allgemeinsten virtuellen Verrückung des Armes in Componenten gelangt man auf diesem Wege zu zwei verschiedenen Formen der Bedingungsgleichungen, die aber natürlich beide das gleiche Resultat liefern müssen.

Unter Verwendung der Zerlegung in die beiden Verrückungscomponenten $V_\varphi$ und $V_\psi$ liefert das Princip der virtuellen Verrückungen nach II, 3 unmittelbar die beiden Bedingungsgleichungen:

$$- m_0 r_0 \,\delta\varphi_1 + D_0\,\delta\varphi_1 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)\,\delta\psi + D_2\,\delta\psi = 0 .$$

Da sowohl $\delta\varphi_1$ als $\delta\psi$ zwar kleine, aber doch immerhin nicht verschwindende Grössen darstellen, so reduciren sich nach Absonderung des Factors $\delta\varphi_1$ bezüglich $\delta\psi$ die beiden Bedingungsgleichungen auf:

$$- m_0 r_0 + D_0 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) + D_2 = 0 ,$$

welche gleichzeitig erfüllt werden müssen.

Zieht man die Zerlegung der allgemeinen virtuellen Verrückung des Armes in die beiden Componenten $V_{\varphi_1}$ und $V_{\varphi_2}$ in Betracht, so

ergiebt das Princip der virtuellen Verrückungen zunächst die beiden Bedingungsgleichungen

$$- m_0 c_1 \sin\varphi_1 \,\delta\varphi_1 + D_1 \,\delta\varphi_1 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin\varphi_2 \,\delta\varphi_2 + D_2 \,\delta\varphi_2 = 0\,,$$

welche sich auf die Gleichungen

$$- m_0 c_1 \sin\varphi_1 + D_1 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin\varphi_2 + D_2 = 0$$

reduciren lassen, wobei für $\varphi_2$ auch die Summe $\varphi_1 + \psi$ eingesetzt werden kann.

Man erkennt ohne Weiteres, dass dieses letzte Paar von Bedingungsgleichungen mit dem unter I, 7 abgeleiteten identisch ist. Es werden sich daher unter Verwendung des letzten Gleichungenpaares für die einzelnen Fälle des Gleichgewichts zwischen Schwere und Muskeln, die schon in I, 7 $\alpha$ bis I, 7 $\delta$ niedergelegten Resultate ergeben, so dass dieselben an dieser Stelle nicht noch einmal angeführt zu werden brauchen.

Dagegen hat die Zerlegung in die Verrückungscomponenten $V_\varphi$ und $V_\psi$ eine ganz neue Form der Bedingungsgleichungen ergeben. Es ist nun zunächst nöthig, nachzuweisen, dass es sich hierbei thatsächlich nur um eine neue Form der Bedingungsgleichungen, nicht aber um ein anderes Resultat handelt.

Beachtet man, dass $\varphi_2$ durch $\varphi_1 + \psi$ ersetzt werden kann, so bestätigt man zunächst, dass die zweite Bedingungsgleichung in beiden Paaren dieselbe ist. Was nun die erste Bedingungsgleichung des ersten Paares anlangt, so stellt dieselbe nichts anderes dar, als die Summe der beiden Bedingungsgleichungen des zweiten Paares. Durch Addition der letzteren erhält man zunächst

$$- m_0 (c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \sin\varphi_2) + [D_1 + D_2] = 0\,.$$

Betrachtet man die in den »Beiträgen zur Muskeldynamik I.«[1]) ausführlich bewiesene Bedeutung der Hauptpunkte der beiden Arm-

1) a. a. O. Seite 112.

abschnitte für die Construction des Gesammtschwerpunktes $S_0$, so lässt sich leicht erkennen, dass die Summe $c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \sin\varphi_2$ den Abstand $r_0$ der Schwerlinie des Armes vom Schultergelenkmittelpunkt (Figur 12) darstellt. Es hat sich nämlich herausgestellt, dass man jedesmal zu dem Gesammtschwerpunkte $S_0$ des Armes gelangt, wenn man von einem der beiden Hauptpunkte eine Strecke abträgt, welche gleich und parallel der zwischen dem Ellbogengelenkmittelpunkte und dem anderen Hauptpunkte liegenden Strecke ist. So kann man $S_0$ dadurch construiren, dass man entweder von $H_1$ aus die Strecke $\overline{\mathfrak{S}H_2}$ (vgl. Figur 13) oder von $H_2$ aus die Strecke $\overline{\mathfrak{S}H_1}$ abträgt, so dass also das Viereck $H_1\mathfrak{S}H_2S_0$ für alle Haltungen des Armes ein Parallelogramm darstellt.

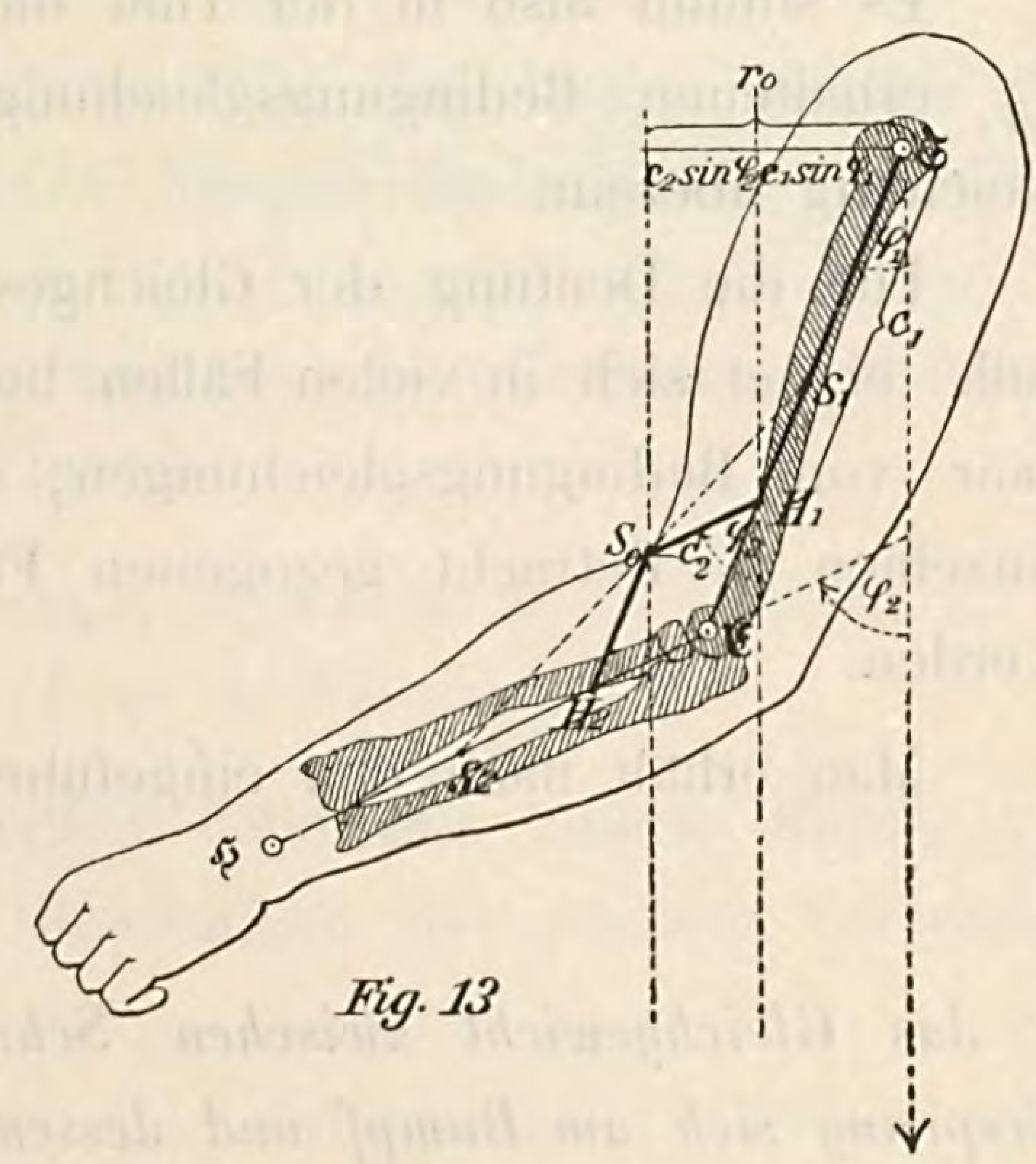


Fig. 13

Denkt man sich nun, wie es in Figur 13 geschehen ist, durch $\mathfrak{S}$, $H_1$ und $S_0$ Verticale gezogen, so erkennt man nach Figur 4 und Figur 12 leicht, dass der Abstand der ersten beiden gleich $c_1 \sin\varphi_1$, der der zweiten und dritten gleich $c_2 \sin\varphi_2$ und der der ersten und dritten Verticalen gleich $r_0$ ist, woraus unmittelbar folgt

$$c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \sin\varphi_2 = r_0 .$$

Ferner lässt sich nachweisen, dass allgemein die Summe der beiden Drehungsmomente $D_1$, $D_2$, mit welchen ein Muskel auf Oberarm und Unterarm einwirkt, gleich dem Drehungsmoment $D_0$ ist, mit welchem derselbe auf den ganzen Arm einwirken würde, wenn das Ellbogengelenk festgestellt wäre. Dies geht daraus hervor, dass man das Drehungsmoment $D_1$ aus dem Drehungsmoment $D_0$ erhält, wenn man die eventuell am Unterarm angreifende Kraft parallel nach dem Ellbogengelenkmittelpunkt verlegt. Hierdurch verringert man aber $D_0$ um das Moment eines Kräftepaares, dessen Arm gleich dem Abstand des Ellbogengelenkmittelpunktes von der am Unterarm angreifenden Kraft ist. Dieses ist aber nichts anderes als das Drehungsmoment $D_2$,

mit welchem der Muskel auf den Unterarm einwirkt. Man hat daher zunächst ganz allgemein:

$$D_1 = D_0 - D_2$$

und hieraus

$$D_1 + D_2 = D_0 .$$

Es stimmt also in der That die Summe der beiden aus $V_{\varphi_1}$ und $V_{\varphi_2}$ erhaltenen Bedingungsgleichungen mit der aus $V_\varphi$ erhaltenen Gleichung überein.

Für die Deutung der Gleichgewichtsbedingungen im gegebenen Falle eignet sich in vielen Fällen besser das aus $V_\varphi$ und $V_\psi$ erhaltene Paar von Bedingungsgleichungen; daher sollen dieselben für die einzelnen in Betracht gezogenen Fälle noch ausführlich angegeben werden.

Man erhält nach den eingeführten Bezeichnungen für

*α) das Gleichgewicht zwischen Schwere und einem Muskel, dessen Ursprung sich am Rumpf und dessen Ansatz sich am Oberarm befindet*, nach II, 4:

$$- m_0 r_0 \pm Kk = 0$$

$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) = 0 ,$$

*β) das Gleichgewicht zwischen Schwere und einem Muskel, welcher sich zwischen Oberarm und Unterarm erstreckt (eingelenkiger Muskel)*, nach II, 5,

wenn der Muskel auf der Beugeseite des Ellbogengelenks vorüber zieht (Figur 5):

$$- m_0 r_0 = 0$$

$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) + Kk = 0 ,$$

und wenn derselbe auf der Streckseite des Ellbogengelenks liegt (Figur 6):

$$- m_0 r_0 = 0$$

$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) - Kk = 0 ,$$

$\gamma$) *das Gleichgewicht zwischen Schwere und einem Muskel, dessen Ursprung sich am Rumpf und dessen Ansatz sich am Unterarm befindet*,

wenn der Muskel sich zwischen Ursprung und Ansatz geradlinig ausspannen kann, nach II, 6 $\alpha$ (Figur 7):

$$- m_0 r_0 \pm K k_0 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) \pm K k_2 = 0 ,$$

(in dem durch Figur 7 dargestellten Falle des langen Kopfes von M. triceps brachii ist in beiden Gleichungen das negative Vorzeichen zu verwenden),

wenn der Muskel sich nicht geradlinig zwischen Ursprung und Ansatz ausspannen kann, nach II, 6 $\beta$ (Figur 8):

$$- m_0 r_0 \pm K k' = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) \pm K k = 0 ,$$

(in dem durch Figur 8 dargestellten Falle des langen Kopfes von M. biceps brachii ist in beiden Gleichungen das positive Vorzeichen zu verwenden).

$\delta$) *das Gleichgewicht zwischen Schwere und einer Gruppe von Muskeln:*

$$- m_0 r_0 + \Sigma D_0 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) + \Sigma D_2 = 0 .$$

## III. Das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Oberarm ansetzen.

Die erste Form der Gleichgewichtsbedingungen lautete (I, 7, $\alpha$)

$$- m_0 c_1 \sin \varphi_1 \pm Kk = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin \varphi_2 = 0 .$$

Da $m_0$ und $c_2$ endliche Grössen sind, so kann die zweite Bedingungsgleichung nur erfüllt werden, wenn

$$\sin \varphi_2 = 0$$

ist; dies ist wiederum nur möglich, wenn $\varphi_2$ entweder selbst Null oder gleich $\pm 180^\circ$ ist. Daraus geht aber der Satz hervor:

Satz: Ein Muskel, welcher am Oberarm ansetzt, vermag nur dann der Schwere des ganzen Armes Gleichgewicht zu halten, wenn die Längsaxe des Unterarmes entweder vertical nach unten oder vertical nach oben gerichtet ist.

Es ist zwar auch möglich, dass ein solcher Muskel bei anderen Richtungen der Unterarmlängsaxe der Schwere das Gleichgewicht halten kann, wenn nämlich der Unterarm durch seine eigene Schwere in der äussersten Streckstellung gegen den Oberarm arretirt ist. Die Untersuchung dieses Falles gehört aber nicht hierher, da man es dabei im Grunde nur mit einem einzigen starren Körper zu thun hat, welcher sich um den Schultergelenkmittelpunkt drehen kann. Es würden dann die einfachen Gesetze in Frage kommen, welche für das Gleichgewicht eines starren Hebels gelten. Die obigen Gleichgewichtsbedingungen

beziehen sich dagegen auf den Fall, dass in keinem der beiden Gelenke die Bewegung durch Hindernisse beeinträchtigt ist, so dass man es mit zwei durch ein Gelenk mit einander verbundenen Hebeln zu thun hat. Da die Beugung im Ellbogengelenk im alleräussersten Falle nur bis zu 150° Beugungswinkel ($\psi$) getrieben werden kann, so lässt sich eine verticale Stellung der Unterarmlängsaxe für diejenigen Stellungen des Oberarmes gar nicht erreichen, bei welchen $\varphi_1$ zwischen 0° und + 30° liegt.

Es gehören nun zwar zu jedem Werth des Beugungswinkels $\psi$ des Ellbogengelenks im Allgemeinen zwei Werthe des Drehungswinkels $\varphi_1$ des Schultergelenkes, weil infolge von $\varphi_1 + \psi = \varphi_2$ entweder $\varphi_1 + \psi = 0$ oder $\varphi_1 + \psi = 180°$ sein muss. Damit ist aber nicht gesagt, dass ein Muskel bei einer bestimmten Beugestellung des Ellbogengelenkes auch thatsächlich in zwei verschiedenen Stellungen des Oberarmes der Schwere das Gleichgewicht halten kann. Wenn z. B. $\psi = 40°$ ist, so ergeben die obigen beiden Bedingungsgleichungen für $\varphi_1$ die beiden Werthe — 40° und + 140°. Der erstere entspricht einer Armhaltung, bei welcher der Oberarm im Schultergelenk um 40° aus der verticalen Stellung (Normalstellung) nach rückwärts gedreht (gestreckt) ist, der letztere einer Haltung, bei welcher der Oberarm um 140° nach vorn gedreht (gebeugt) ist. Es ist leicht einzusehen, dass bei der ersteren Armhaltung nur ein Streckmuskel des Schultergelenkes, bei der letzteren nur ein Beugemuskel dieses Gelenkes der Schwere Gleichgewicht halten kann. Dies ergiebt sich auch aus der ersten der beiden Bedingungsgleichungen, welche die Kraft $K$ berechnen lässt, die der Muskel bei seiner Contraction entfalten muss, um das Gleichgewicht herzustellen. Man erhält für $K$ den Werth

$$K = \pm \frac{m_0 c_1 \sin \varphi_1}{k},$$

wo das positive Vorzeichen im Falle eines Beugemuskels, dagegen das negative im Falle eines Streckmuskels des Schultergelenkes gilt. Da nun $m_0$, $c_1$ und $k$ ihrer Bedeutung nach ebenso wie $K$ positive Grössen sind, so muss $\sin \varphi_1$ und infolgedessen der Winkel $\varphi_1$ selbst im Falle eines Beugemuskels positiv, im Falle eines Streckmuskels negativ sein. Zieht man dies in Rücksicht, so erkennt man leicht, dass für einen bestimmten Muskel zu jedem Werthe von $\psi$ immer nur ein einziger Werth von $\varphi_1$ gehört. Die zusammengehörigen Werthe von $\psi$ und $\varphi_1$ sind

für einen Beugemuskel des Schultergelenkes:

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1$ | + 180° | + 170° | + 160° | + 150° | + 140° | + 130° | + 120° | + 110° | + 100° | + 90° | + 80° | + 70° | + 60° | + 50° | + 40° | + 30° |

und für einen Streckmuskel des Schultergelenkes:

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1$ | 0° | − 10° | − 20° | − 30° | − 40° | − 50° | − 60° | − 70° | − 80° | − 90° | − 100° | − 110° | − 120° | − 130° | − 140° | − 150° |

Einige der hierdurch bestimmten Haltungen des Armes finden sich auf Tafel I verzeichnet.

Wäre man von der zweiten Form der Bedingungsgleichungen (II, 7, $\alpha$):

$$- m_0 r_0 \pm Kk = 0$$

$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) = 0$$

ausgegangen, so hätte sich für $K$ ergeben

$$K = \pm \frac{m_0 r_0}{k}.$$

Der hieraus berechnete Werth von $K$ kann nur dann gleich dem aus der ersten Formel gewonnenen sein, wenn $c_1 \sin \varphi_1 = r_0$ ist. Dies trifft nun thatsächlich in dem speciellen Falle eines am Oberarm ansetzenden Muskels zu. Da die Unterarmlängsaxe vertical gerichtet ist, so liegen der Hauptpunkt $H_1$ und der Gesammtschwerpunkt $S_0$ ebenfalls in einer Verticalen, denn die Strecke $\overline{H_1 S_0}$ bleibt ja für alle Haltungen des Armes parallel der Längsaxe des Unterarmes (vergl. Figur 13 und Seite 313). Es ist daher der Abstand des Schultergelenkmittelpunktes von der Verticalen durch den Hauptpunkt des Oberarmes ($c_1 \sin \varphi_1$) gleich dem Abstand desselben Punktes von der Verticalen durch den Gesammtschwerpunkt ($r_0$). Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man in die allgemein geltende Beziehung

$$c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \sin \varphi_2 = r_0$$

für $\varphi_2$ den Werth 0° oder 180° einsetzt.

## IV. Das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln, welche sich zwischen Oberarm und Unterarm erstrecken (eingelenkigen Muskeln).

Es ist zweckmässig, für die Untersuchung dieses Falles die zweite Form der Bedingungsgleichungen (II, 7, $\beta$):

$$-m_0 r_0 = 0$$
$$-m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) \pm Kk = 0$$

zu verwenden, wobei in der unteren Gleichung das positive Vorzeichen für einen eingelenkigen Beugemuskel, das negative für einen eingelenkigen Streckmuskel des Ellbogengelenkes gilt. Die erste der beiden Gleichungen kann nur dann befriedigt werden, wenn $r_0 = 0$ ist; denn $m_0$ ist ja eine bestimmte endliche Grösse. Nach der Bedeutung von $r_0$ heisst dies aber nichts anderes, als dass die Schwerlinie durch $\mathfrak{S}$ hindurchgehen muss. Man hat daher den

Satz: Ein Muskel, welcher sich zwischen Oberarm und Unterarm erstreckt, vermag nur dann der Schwere das Gleichgewicht zu halten, wenn der Gesammtschwerpunkt entweder vertical unter oder vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte liegt.

Die zusammengehörigen Werthe von $\psi$ und $\varphi_1$, welche diesen für die eingelenkigen Muskeln charakteristischen Stellungen des ganzen Armes entsprechen, ergeben sich aus der zwischen $r_0$ und den beiden Winkeln bestehenden Gleichung (vergl. Seite 313)

$$c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) = r_0,$$

wenn man beachtet, dass $r_0 = 0$ sein muss. Man erhält infolgedessen für $\varphi_1$ und $\psi$ die Beziehung

$$c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) = 0$$

oder

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \psi)} = -\frac{c_2}{c_1}.$$

Da $c_1$ und $c_2$ constante Grössen sind, nämlich die Entfernungen der beiden Hauptpunkte von den proximalwärts zu ihnen gelegenen Gelenkmittelpunkten (Hauptstrecken), so sind also die zusammengehörenden Werthe der beiden Gelenkwinkel $\varphi_1$ und $\psi$ dadurch gekennzeichnet, dass das Verhältniss der Sinus des Drehungswinkels vom Schultergelenk einerseits und der Summe des Drehungswinkels vom Schultergelenk und Beugungswinkels vom Ellbogengelenk andererseits einen constanten Werth besitzt. Die beiden Hauptstrecken $c_1$ und $c_2$ sind schon in den Beiträgen zur Muskeldynamik berechnet worden[1]). Es hatte sich an dem Präparat eines Armes ergeben

für die Länge des Oberarmes (Entfernung der Mittelpunkte vom Schulter- und Ellbogengelenk): $l_1 = 30,3$ cm,

die Entferung des Oberarmschwerpunktes vom Schultergelenkmittelpunkte: $r_1 = 13,6$ cm,

die Entfernung des Schwerpunktes des starren Systems: Unterarm plus Hand vom Ellbogengelenkmittelpunkte: $r_2 = 19,0$ cm,

das Gewicht des ganzen Armes: $m_0 = 3683$ g,

das Gewicht des Oberarmes allein: $m_1 = 1908$ g,

das Gewicht von Unterarm plus Hand: $m_2 = 1775$ g.

Hieraus erhält man in Folge der Bedeutung der Hauptpunkte

für die Entfernung des Hauptpunktes des Oberarmes vom Schultergelenkmittelpunkte: $c_1 = 21,65$ cm

und für die Entfernung des Hauptpunktes des Systems: Unterarm plus Hand vom Ellbogengelenkmittelpunkte: $c_2 = 9,16$ cm

und für das Verhältniss dieser beiden Entfernungen

$$\frac{c_2}{c_1} = 0,423 .$$

1) a. a. O. Seite 134 und 135.

Es lautet daher für den Arm die Beziehung zwischen $\varphi_1$ und $\psi$

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \psi)} = -0{,}423 .$$

Die Rechnung ergiebt auch hier wieder zu jedem Werthe von $\psi$ zwei Werthe des Winkels $\varphi_1$, einen negativen und einen positiven. Man erhält nämlich (bis auf ganze, bezüglich halbe Grade abgerundet) als zusammengehörende Werthe

entweder

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1$ | 0° | −3° | −6° | −9° | −12° | −14½° | −17° | −19° | −21° | −23° | −24° | −25° | −25° | −24° | −22° | −18½° |

oder

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1$ | +180° | +177° | +174° | +171° | +168° | +165½° | +163° | +161° | +159° | +157° | +156° | +155° | +155° | +156° | +158° | +161½° |

Alle diesen Werthepaaren entsprechenden Haltungen des Armes, von denen eine Anzahl auf Tafel II dargestellt ist, genügen der Bedingung, dass der Gesammtschwerpunkt des Armes mit dem Schultergelenkmittelpunkte in einer Verticalen liegt. Man überzeugt sich leicht, dass bei den durch die erste Tabelle bestimmten Haltungen der Gesammtschwerpunkt vertical unter, dagegen bei den durch die zweite Tabelle angegebenen Haltungen derselbe vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte liegt.

Die Stellungen des Armes, bei denen allein ein zwischen Oberarm und Unterarm ausgespannter Muskel der Schwere das Gleichgewicht zu halten vermag, lassen sich nun noch in einer anderen Weise definiren. Hierdurch wird man in den Stand gesetzt, bequemer und auch genauer, als es unter Zuhülfenahme des Gesammtschwerpunktes möglich ist, diese für die eingelenkigen Muskeln charakteristischen Stellungen am lebenden Menschen zu ermitteln.

Denkt man sich den Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ mit dem Gesammtschwerpunkte $S_0$ des Armes verbunden (Figur 14, nächste Seite) und diese Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte $R$ mit der Unterarmslängsaxe

verlängert, so lässt sich nachweisen, dass man für jede beliebige Beugestellung des Ellbogengelenkes auf diese Weise immer zu demselben Punkte $R$ gelangt. Derselbe stellt einen im Unterarm festen Punkt dar, dessen Lage im engsten Zusammenhange zu der Lage der beiden Hauptpunkte $H_1$ und $H_2$ steht. Aus der schon mehrfach hervorgehobenen Beziehung der Hauptpunkte zu dem Gesammtschwerpunkte geht nämlich hervor, dass das Dreieck $R\mathfrak{E}\mathfrak{S}$ für alle Beugestellungen des Ellbogengelenkes den Dreiecken $S_0H_1\mathfrak{S}$ und $RH_2S_0$ ähnlich sein wird. Es gilt daher unter anderen die Proportion

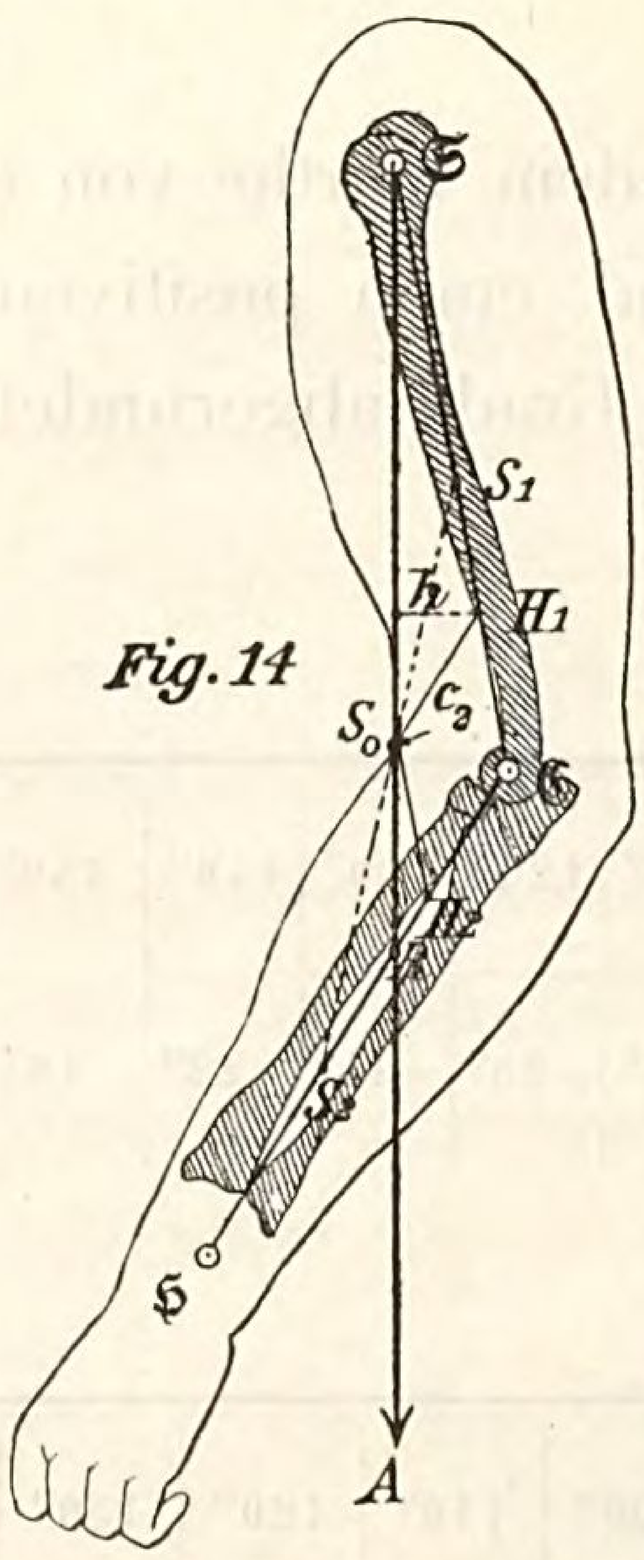



Fig. 14

$$\overline{\mathfrak{E}R} : \overline{\mathfrak{S}\mathfrak{E}} = \overline{H_1S_0} : \overline{\mathfrak{S}H_1}.$$

Da nun $\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{E}}$, $\overline{H_1S_0}$ und $\overline{\mathfrak{S}H_1}$ constante Grössen sind, nämlich die mit $l_1$, $c_1$ und $c_2$ bezeichneten Längen, so muss auch $\overline{\mathfrak{E}R}$ eine constante Grösse sein. Es folgt aus der obigen Proportion

$$\overline{\mathfrak{E}R} = \frac{c_2}{c_1} l_1.$$

Bei den Dimensionen des schon in Betracht gezogen Armes hat man

$$\overline{\mathfrak{E}R} = 0{,}423 \,.\, 30{,}3 \text{ cm} = 12{,}82 \text{ cm}.$$

Da der Punkt $R$ stets mit $S_0$ und $\mathfrak{S}$ in gerader Linie liegt, so muss derselbe gleichzeitig mit dem Gesammtschwerpunkte vertical unter oder vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte liegen. Derselbe kann daher an Stelle des Gesammtschwerpunktes verwendet werden, um die Haltungen des Armes zu charakterisiren, bei denen ein zwischen Ober- und Unterarm ausgespannter Muskel der Schwere Gleichgewicht zu halten vermag. Um den Arm in eine solche Stellung zu bringen, hat man diesen festen Punkt des Unterarmes nur mit dem Schultergelenkmittelpunkt in eine Verticale einzurichten. Wegen dieser Eigenschaft soll derselbe als »Richtpunkt des Unterarmes« bezeichnet sein. Seine Entfernung vom Ellbogengelenk beträgt nach der obigen Berechnung 12,82 cm; dabei liegt er zwischen Hauptpunkt und Schwerpunkt des starren Systems: Unterarm plus Hand.

Der Richtpunkt gestattet auch, wie nebenbei bemerkt sein mag, in einfacher Weise bei einer ganz beliebigen Haltung des Armes die Lage des Gesammtschwerpunktes zu finden. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $RH_2S_0$ und $S_0H_1\mathfrak{S}$ in Figur 14 geht nämlich hervor, dass

$$\overline{RS_0} : \overline{S_0\mathfrak{S}} = \overline{H_2S_0} : \overline{H_1\mathfrak{S}}$$

oder, da

$$\overline{H_2S_0} = \overline{\mathfrak{G}H_1},$$

$$\overline{RS_0} : \overline{S_0\mathfrak{S}} = \overline{\mathfrak{G}H_1} : \overline{H_1\mathfrak{S}}.$$

Nun ist $\overline{\mathfrak{G}H_1} = 8{,}65$ cm und $\overline{H_1\mathfrak{S}} = 21{,}65$ cm; diese beiden Strecken verhalten sich fast genau wie 2 : 5. Man hat daher die Verbindungsstrecke des Richtpunktes mit dem Schultergelenkmittelpunkte nur im Verhältniss 2 : 5 zu theilen, um auf den Gesammtschwerpunkt des Armes zu kommen.

Der auf Seite 319 angegebene Satz lässt sich nunmehr auch in den folgenden verwandeln:

Satz: Ein Muskel, welcher sich zwischen Oberarm und Unterarm erstreckt, vermag nur in den Haltungen des Armes der Schwere das Gleichgewicht zu halten, bei welchen ein bestimmter fester Punkt der Unterarmlängsaxe, der Richtpunkt des Unterarmes, entweder vertical unter oder vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte liegt.

Es ist nun die weitere Frage zu beantworten, wie gross die Muskelspannung $K$ sein muss, damit in irgend einer dieser Stellungen das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskel thatsächlich hergestellt wird. Die Antwort auf diese Frage giebt die zweite Bedingungsgleichung

$$-m_0c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) \pm Kk = 0.$$

Für einen eingelenkigen Beugemuskel gilt das positive Vorzeichen; man erhält daher für $K$ den Werth:

$$K = \frac{m_0c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}{k};$$

dagegen ergiebt sich für einen eingelenkigen Streckmuskel der Werth:

$$K = -\frac{m_0c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}{k}.$$

Da für eingelenkige Muskeln nach Seite 320

$$c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) = 0$$

sein muss, so kann man die Formeln auch umwandeln in

$$K = \mp \frac{m_0 c_1 \sin \varphi_1}{k}.$$

Beachtet man nun, dass $c_1 \sin \varphi_1$ die Entfernung $h$ des ersten Hauptpunktes von der durch Schultergelenkmittelpunkt, Gesammtschwerpunkt und Richtpunkt hindurchgehenden Verticalen darstellt (vergl. Figur 14 auf Seite 322), und dass $c_1 \sin \varphi_1$ in Folge des negativen Werthes von $\varphi_1$ negativ ausfällt, wenn Gesammtschwerpunkt und Richtpunkt unter dem Schultergelenkmittelpunkt liegen, so kann man auch schreiben

$$K = \frac{m_0 h}{k} \quad \text{oder} \quad K : m_0 = h : k, \quad \text{d. h. aber}$$

Satz: Im Falle des Gleichgewichtes zwischen einem eingelenkigen Muskel und der Schwere des Armes verhält sich die Muskelspannung zu dem Armgewicht, wie der Abstand des Hauptpunktes des Oberarmes von der durch den Gesammtschwerpunkt gehenden Schwerlinie zu dem Abstand des Ellbogengelenkmittelpunktes von der Richtung des resultirenden Muskelzuges.

Für die Berechnung der Muskelspannung nach der Formel

$$K = \pm \frac{m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}{k}$$

hat man sich zunächst die für die eingelenkigen Muskeln charakteristischen Werthe der Winkelsumme $\varphi_1 + \psi$ zu verschaffen, welche zu bestimmten Stellungen im Ellbogengelenk gehören.

Aus den beiden Tabellen auf Seite 321 erhält man für die verschiedenen Werthe des Beugungswinkels $\psi$ des Ellbogengelenkes:

entweder

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1 + \psi$ | 0° | 7° | 14° | 21° | 28° | 35½° | 43° | 51° | 59° | 67° | 76° | 85° | 95° | 106° | 118° | 131½° |

oder

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1 + \psi$ | 180° | 187° | 194° | 201° | 208° | 215½° | 223° | 231° | 239° | 247° | 256° | 265° | 275° | 286° | 298° | 311½° |

Aus den beiden Formeln für $K$ ergiebt sich, da $m_0$, $c_2$, $k$ und $K$ ihrer Natur nach positive Grössen sind, dass $\sin(\varphi_1 + \psi)$ im Falle eines Beugemuskels positiv und im Falle eines Streckmuskels negativ ausfallen muss. Der Sinus eines Winkels kann nur dann negativ werden, wenn entweder der Winkel selbst negativ ist, oder wenn derselbe eine Grösse über 180° besitzt. Ein Blick auf die beiden Tabellen auf Seite 324 lehrt, dass das letztere in der zweiten Tabelle durchweg der Fall ist. Beachtet man nun noch, dass die Winkelwerthe der ersten Tabelle den Stellungen entsprechen, bei denen der Gesammtschwerpunkt des Armes vertical unter, die der zweiten Tabelle den Stellungen, bei welchen er vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte liegt, so hat man den weiteren

Satz: Ein eingelenkiger Beugemuskel vermag nur dann der Schwere das Gleichgewicht zu halten, wenn der Gesammtschwerpunkt des Armes, bezüglich der Richtpunkt des Unterarmes vertical *unter* dem Schultergelenkmittelpunkt liegt. Dagegen kann ein eingelenkiger Streckmuskel der Schwere nur Gleichgewicht halten, wenn der Gesammtschwerpunkt des Armes, bezüglich der Richtpunkt des Unterarmes vertical *über* dem Schultergelenkmittelpunkte liegt.

Zur Berechnung der Muskelspannung muss man noch den Werth von $k$ kennen, d. h. die Entfernung des resultirenden Muskelzuges vom Ellbogengelenkmittelpunkt. Dies ist eine Grösse, welche man gewöhnlich als idealen Hebelarm des Muskels bezeichnet. Derselbe ist nicht constant, sondern er ändert sich im Allgemeinen mit der Beugestellung des Ellbogengelenkes; seine Länge muss für jeden bestimmten Muskel durch Messung an einem geeigneten Präparat ermittelt werden. Derartige Messungen sind mit Hülfe gewisser indirecter Methoden ausgeführt worden.

Um nur ein Beispiel anzuführen, mögen in folgender Tabelle die Werthe von $k$ in Centimetern angegeben werden, wie sie sich für den M. brachialis herausgestellt haben[1]):

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 1,10 | 1,25 | 1,38 | 1,53 | 1,70 | 1,96 | 2,30 | 2,66 | 3,00 | 3,35 | 3,65 | 3,59 | 3,34 | 3,14 |

1) Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wiss., math.-phys. Classe, Bd. XV, S. 275.

Damit hat man nun alle Unterlagen, um die Grösse der von dem Muskel bei seiner Contraction entfalteten Gesammtspannung zu berechnen. Da es sich um einen Beugemuskel handelt, so hat man die Formel

$$K = \frac{m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}{k}$$

zu verwenden und in dieselbe die in der oberen Tabelle auf Seite 324 niedergelegten Werthe von $\varphi_1 + \psi$ einzusetzen, während $m_0$ und $c_2$ durch die schon früher angegebenen Zahlen 3683 und 9,16 gemessen werden. Die Rechnung ergiebt die folgenden Werthe der Muskelspannung $K$ für den M. brachialis in Kilogramm:

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 0 | 3,33 | 5,91 | 7,90 | 9,32 | 10,12 | 10,00 | 9,86 | 9,64 | 9,27 | 8,89 | 9,36 | 10,06 | 10,33 |

Man erkennt aus dieser Tabelle, dass der Muskel in der Nähe der Streckstellung des Armes verhältnissmässig wenig gespannt zu sein braucht, um der Schwere das Gleichgewicht zu halten. Die Spannung wächst aber sehr rasch mit der Beugung im Ellbogengelenk und erreicht schon bei etwas über 40° ihr Maximum von abgerundet 10 Kilogramm, auf dem sie bei weitergehender Beugung des Armes, von kleinen Schwankungen abgesehen, stehen bleibt.

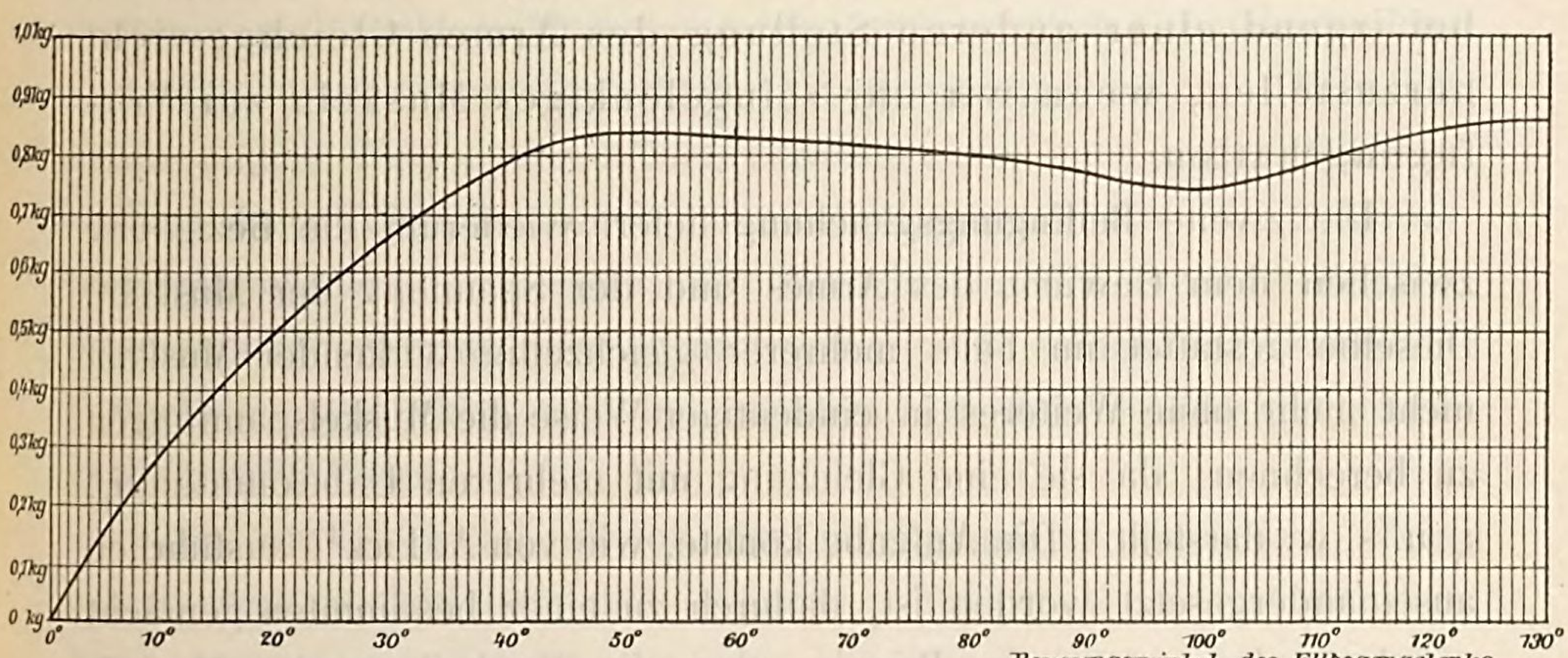
Will man die Spannung bestimmen, welche die Querschnittseinheit des Muskels besitzt, so braucht man nur die erhaltenen Werthe von $K$ durch die Querschnittszahl des betreffenden Muskels zu dividiren. Rechnet man den Querschnitt des M. brachialis rund zu 12 qcm[1]), so erhält man für die Spannung, welche der M. brachialis pro Querschnittseinheit aufwenden muss, um allein der Schwere des Armes Gleichgewicht zu halten, die Werthe:

| Beugungswinkel des Ellbogengelenkes | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Spannung des M. brachialis in Kilogramm | 0 | 0,28 | 0,49 | 0,66 | 0,78 | 0,84 | 0,83 | 0,82 | 0,80 | 0,77 | 0,74 | 0,78 | 0,84 | 0,86 |

Die Maximalspannung des Muskels pro Quadratcentimeter Querschnitt, mit welcher er den unbelasteten Arm in seiner Lage erhalten kann, beträgt demnach rund 0,8 Kilogramm; nur bei Beugestellungen des Armes unter 40° Beugungswinkel ist dieselbe

1) a. a. O. Seite 292.

merklich geringer. Um einen genauen Einblick in die Abhängigkeit der Muskelspannung pro Querschnittseinheit von der Beugestellung des Ellbogengelenkes zu gewinnen, zeichnet man sich am besten ein Diagramm in der Weise auf, dass man die Abscissen den Beugungswinkeln des Ellbogengelenks und die Ordinaten den Spannungswerthen proportional annimmt. In Figur 15, welche dieses Diagramm darstellt, ist 1° Beugungswinkel durch eine Länge von 1 Millimeter, dagegen 0,1 kg Muskelspannung durch eine Länge von $\frac{1}{2}$ Centimeter dargestellt.




*Graphische Darstellung der Spannung, welche der M. brachialis pro Quadratcentimeter Querschnitt entfalten muss, um in den verschiedenen für ihn charakteristischen Haltungen des Armes der Schwere des ganzen Armes Gleichgewicht zu halten.*

*Fig. 15.*

Dies eine Beispiel wird genügen, um erkennen zu lassen, wie man die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Spannung eines eingelenkigen Muskels verwenden kann. —

Befinden sich gleichzeitig mehrere allein zwischen Oberarm und dem starren System: Unterarm plus Hand ausgespannte Muskeln in Contraction, so lauten die Bedingungsgleichungen, wie man nach den früheren Entwickelungen ohne Mühe bestätigen wird:

$$- m_0 r_0 = 0$$

$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) \pm i_1 q_1 k_1 \pm i_2 q_2 k_2 \pm i_3 q_3 k_3 \pm \cdots \pm i_n q_n k_n = 0,$$

unter $i_1$, $i_2$ u. s. w. die Spannungen pro Querschnittseinheit, unter $q_1$, $q_2$ u. s. w. die Querschnitte und unter $k_1$, $k_2$ u. s. w. die idealen Hebelarme der verschiedenen »eingelenkigen« Muskeln verstanden. Dabei ist jedesmal das positive oder negative Vorzeichen zu verwenden, je nachdem es sich um einen Beugemuskel oder einen Streckmuskel des Ellbogengelenkes handelt.

Die erste der beiden Bedingungsgleichungen ist dieselbe wie früher. Hieraus ist ersichtlich, dass auch eine Gruppe von gleichzeitig in Contraction befindlichen Muskeln, soweit dieselben sich allein zwischen Oberarm und Unterarm ausspannen, nur bei denjenigen Haltungen des Armes der Schwere Gleichgewicht halten kann, bei denen der Gesammtschwerpunkt des Armes, bezüglich der Richtpunkt des Unterarmes mit dem Schultergelenkmittelpunkt in einer Verticalen liegt. Es wäre also überhaupt nicht möglich, bei irgend einer anderen Stellung des Armes Gleichgewicht herzustellen, wenn wir nur »eingelenkige« Muskeln zur Verfügung hätten.

Die zweite Bedingungsgleichung liefert wiederum die Beziehung zwischen dem Gewicht des Armes und der Spannung der Muskeln. Dieselbe gestattet im Falle mehrerer gleichzeitig wirkender Muskeln nicht mehr ohne Weiteres in eindeutiger Weise die Muskelspannungen zu berechnen, da sie eine Gleichung mit mehreren Unbekannten $i_1$, $i_2$ u. s. w. darstellt. Die Aufgabe könnte, wie von A. Fick[1]) ausführlich auseinandergesetzt worden ist, dadurch zu einer bestimmten gemacht werden, dass man ein Princip über die Vertheilung der Muskelspannungen, wie etwa das Princip der kleinsten Anstrengung, zu Hülfe nimmt. Die Aufgabe würde auch in dem speciellen Falle unmittelbar zu lösen sein, wenn alle betheiligten Muskeln sich mit gleicher Spannung pro Querschnittseinheit contrahirten, so dass also alle Muskelfaserbündel von 1 qcm Querschnitt gleich gespannt wären. Es würde dann $i_1 = i_2 = i_3 = \cdots i_n$ sein und man hätte für die jetzt kurz mit $i$ bezeichnete Muskelspannung pro Querschnittseinheit den Werth:

$$i = \frac{m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}{\pm q_1 k_1 \pm q_2 k_2 \pm q_3 k_3 \pm \cdots \pm q_n k_n}.$$

Bevor auf das Gleichgewicht zwischen Schwere und mehrgelenkigen Muskeln eingegangen wird, soll an einigen anderen Beispielen gezeigt werden, dass mit der Untersuchung des Gleichgewichtes zwischen Schwere und eingelenkigen Muskeln an dem im Ellbogengelenk gegliederten Arm alle anderen Fälle von analog zusammengesetzten zweigliedrigen Systemen im Princip erledigt sind. Die aufgestellten Gleich-

1) Medicinische Physik, 3. Auflage, Seite 89 ff.

gewichtsbedingungen haben ganz allgemeine Gültigkeit; die einzelnen hierher gehörenden Beispiele werden sich nur durch die Werthe der maassgebenden Grössen $m_0$, $l_1$, $c_1$ und $c_2$ unterscheiden. Die allgemeinen Sätze über die Lage des Gesammtschwerpunktes bezüglich Richtpunktes des Unterarmes zu dem feststehenden Mittelpunkte des einen Gelenkes, über den Unterschied zwischen der Wirkungsweise von Beugemuskeln und Streckmuskeln, über die Bestimmung der Muskelspannung bei gegebener Stellung des Gliedersystems, über die gleichzeitige Thätigkeit mehrerer eingelenkiger Muskeln werden sich wörtlich auf jedes andere System von der vorausgesetzten Art übertragen lassen. Natürlich haben andere Werthe der beiden Grössen $c_1$, $c_2$ auch andere Gliederstellungen zur Folge, bei denen allein eingelenkige Muskeln der Schwere Gleichgewicht halten können; die Berechnung der diese Stellungen bestimmenden Werthe von $\varphi_1$ und $\psi$ hat aber genau mit denselben Formeln zu geschehen, wie beim System des allein im Ellbogengelenk gegliederten Armes.

Als erstes Beispiel soll das im Kniegelenk gegliederte Bein bei fixirtem Becken betrachtet werden. Entsprechend den für den Arm gemachten Voraussetzungen muss dabei angenommen werden, dass der Unterschenkel zusammen mit dem Fusse durch innere Kräfte zu einer einzigen starren Masse vereinigt ist, dass das Kniegelenk eine feste Axe besitzt, und dass im Hüftgelenk nur Drehungen ausgeführt werden um eine der Knieaxe parallele Axe. Als Längsaxe des Oberschenkels ist die Verbindungslinie des Hüftgelenkmittelpunktes $\mathfrak{H}$ (Figur 16) mit dem Kniegelenkmittelpunkt $\mathfrak{K}$, und als Längsaxe des starren Systems: Unterschenkel plus Fuss die Verbindungslinie dieses letzteren Punktes mit dem gemeinsamen Schwer-

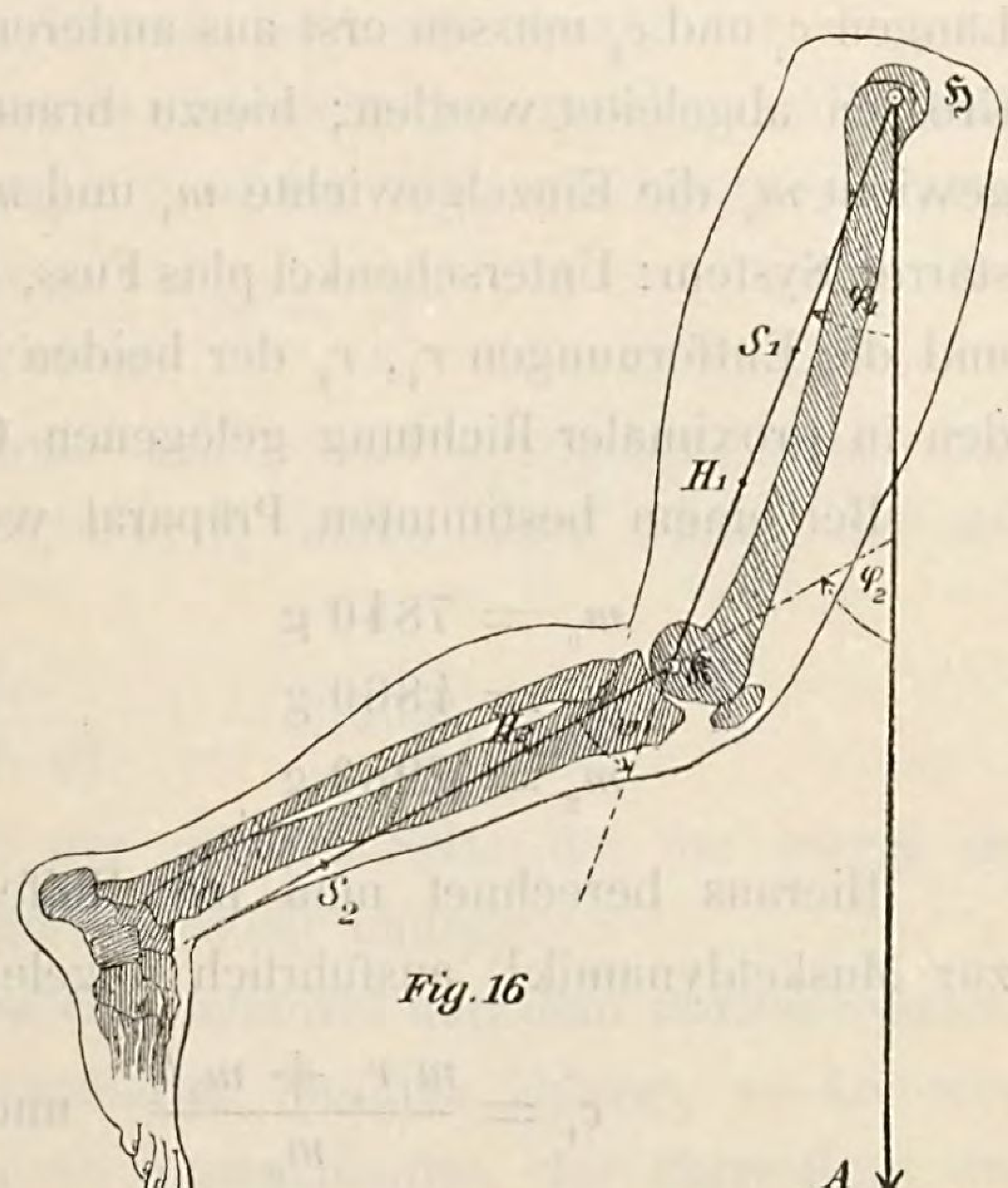



Fig. 16

punkt $S_2$ von Unterschenkel und Fuss aufzufassen. Die Längsaxe des Oberschenkels enthält den Schwerpunkt des Oberschenkels $S_1$ und in Folge der Bedeutung des Hauptpunktes vom Oberschenkel auch diesen Punkt $H_1$; auf der Längsaxe vom System: Unterschenkel plus Fuss befindet sich dagegen der Hauptpunkt $H_2$ dieses Systems. Um eine vollständige Uebereinstimmung mit den für den Arm eingeführten Bezeichnungen herbeizuführen, muss man mit $\varphi_1$ den Winkel bezeichnen, welchen die Oberschenkellängsaxe mit der Verticalen durch den Hüftgelenkmittelpunkt $\mathfrak{H}$ bildet und muss diesem Winkel das positive Vorzeichen beilegen, wenn der Oberschenkel gegen die Verticale nach rückwärts, und das negative, wenn er nach vorwärts gedreht erscheint; dieser Winkel hat dann den Namen »Drehungswinkel des Hüftgelenkes« zu führen. Unter dem Beugungswinkel des Kniegelenkes hat man endlich den Winkel $\psi$ zu verstehen, welchen die Längsaxe des starren Systems: Unterschenkel plus Fuss mit der Verlängerung der Oberschenkellängsaxe bildet. Von den vier maassgebenden Grössen $m_0$, $l_1$, $c_1$, $c_2$ sind nur das Gesammtgewicht des Beines $m_0$ und die Länge des Oberschenkels $l_1$ direct am Präparat zu bestimmen. Die beiden Längen $c_1$ und $c_2$ müssen erst aus anderen am Präparat zu bestimmenden Grössen abgeleitet werden; hierzu braucht man ausser dem Gesammtgewicht $m_0$ die Einzelgewichte $m_1$ und $m_2$ vom Oberschenkel und dem starren System: Unterschenkel plus Fuss, die Länge $l_1$ des Oberschenkels und die Entfernungen $r_1$, $r_2$ der beiden Einzelschwerpunkte $S_1$, $S_2$ von den in proximaler Richtung gelegenen Gelenkmittelpunkten $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$.

Bei einem bestimmten Präparat wurde gefunden

$$m_0 = 7840 \text{ g} \qquad l_1 = 35{,}9 \text{ cm}$$
$$m_1 = 4860 \text{ g} \qquad r_1 = 15{,}7 \text{ cm}$$
$$m_2 = 2980 \text{ g} \qquad r_2 = 24{,}8 \text{ cm.}$$

Hieraus berechnet man mit Hülfe der in dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik[1]) ausführlich abgeleiteten Formeln

$$c_1 = \frac{m_1 r_1 + m_2 l_1}{m_0} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{m_2 r_2}{m_0}$$

für die beiden Hauptstrecken die Werthe:

$$c_1 = 23{,}4 \text{ cm} \quad \text{und} \quad c_2 = 9{,}4 \text{ cm.}$$

---

1) a. a. O. Seite 133.

Damit sind alle Unterlagen beigebracht, um die Untersuchung in derselben Weise wie beim Arm durchführen zu können. Insbesondere ergiebt sich für die Entfernung des zwischen $H_2$ und $S_2$ gelegenen Richtpunktes des Unterschenkels vom Kniegelenk durch Einsetzen der Werthe in $\frac{c_2}{c_1} l_1$ die Grösse 14,4 cm. Trotzdem die Massenverhältnisse und die Lagen der Schwerpunkte für die beiden Abschnitte des Beines ganz andere sind, wie für die Armabschnitte, so zeigt sich kein wesentlicher Unterschied in der Entfernung des Richtpunktes vom Mittelpunkt des beide Abschnitte verbindenden Gelenkes. Diese Entfernung ist nur um ca. $1\frac{1}{2}$ cm grösser wie beim Arm. Zieht man in Rücksicht, dass die Länge des Oberschenkels annähernd in demselben Verhältniss gegenüber der Länge des Oberarmes vergrössert erscheint wie die Entfernung des Unterschenkelrichtpunktes vom Kniegelenkmittelpunkt gegenüber der Entfernung des Unterarmrichtpunktes vom Ellbogengelenkmittelpunkt, so erkennt man ohne alle Rechnung, dass die Stellungen des Beines, bei denen allein zwischen Oberschenkel und Unterschenkel plus Fuss ausgespannte Muskeln der Schwere Gleichgewicht halten können, sich nur wenig von den entsprechenden Stellungen des Armes unterscheiden werden. Will man diese Stellungen genau bestimmen, so hat man nur aus der Formel

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \psi)} = - \frac{c_2}{c_1}$$

die zusammengehörenden Werthe von $\psi$ und $\varphi_1$ zu berechnen. Bei den speciellen Werthen von $c_1$ und $c_2$ nimmt diese Formel die bestimmte Gestalt an

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \psi)} = - 0{,}402\,,$$

während beim Arm sich auf der rechten Seite der nur wenig abweichende Werth — 0,423 herausgestellt hatte.

Was endlich die zwischen Oberschenkel und dem starren System: Unterschenkel plus Fuss ausgespannten Muskeln anlangt, so kommen hier im Wesentlichen nur der M. gastrocnemius, der kurze Kopf des M. biceps femoris, der M. popliteus und der M. plantaris in Betracht, da sie allein im Stande sind, der Schwere das Gleichgewicht zu halten, wenn der Gesammtschwerpunkt des Beines bezüglich der Richtpunkt des Unterschenkels vertical unter dem Hüftgelenkmittelpunkt liegt. Der

Fall, dass die beiden Punkte vertical über dem Hüftgelenkmittelpunkt liegen, kommt bei aufrechter Stellung des Körpers überhaupt nicht vor. Eine solche Haltung des Beines lässt sich nur beim Liegen auf dem Rücken oder bei irgend einer an einem Turngeräth eingenommenen abnormen Körperstellung erreichen; ist dies der Fall, so können unter den »eingelenkigen« Muskeln nur die Mm. vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis der Schwere des Beines Gleichgewicht halten. Zur Bestimmung der Muskelspannung hat man dann wieder die Formel

$$K = \pm \frac{m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}{k}.$$

Als zweites Beispiel soll ein Fall ins Auge gefasst werden, welcher in vieler Hinsicht singulär ist und in Folge dessen eine grosse Vereinfachung der Behandlung gestattet. Es kann nämlich vorkommen, dass das Gewicht des einen der beiden Abschnitte sich verschwindend klein im Vergleich zu dem Gewicht des anderen ergiebt, so dass es in Anbetracht der bei Gewichtsmessungen am Präparat auftretenden unvermeidlichen Fehlerquellen ganz vernachlässigt werden kann. Ein derartiger Fall würde also z. B. dadurch charakterisirt sein, dass $m_1 = 0$ ist und in Folge dessen $m_2 = m_0$ angenommen werden kann. Dies hat nun weiterhin im Gefolge, dass der Hauptpunkt $H_1$ des ersten Gliedes mit dem Mittelpunkt des beide Abschnitte verbindenden Gelenkes und der Hauptpunkt $H_2$ des zweiten Gliedes mit dem Schwerpunkte $S_2$ des zweiten Gliedes zusammenfällt. Da der im zweiten Gliede gelegene Richtpunkt $R$ immer zwischen Hauptpunkt und Schwerpunkt des zweiten Gliedes zu suchen ist, so wird auch dieser Punkt mit $S_2$ zusammenfallen. Endlich wird der Schwerpunkt $S_2$ selbst mit dem Gesammtschwerpunkt $S_0$ des ganzen Gliedersystems zusammenfallen, so dass dieser nicht weniger als vier Punkte in sich vereinigt. Aus alledem geht hervor, dass man in diesem singulären Falle sich zur Bestimmung der Hauptstrecken $c_1$, $c_2$ nicht nur alle Rechnung, sondern sogar Messungen ersparen kann. Man braucht nämlich ausser dem Gesammtgewicht $m_0$ des Körpersystems nur noch die Länge $l_1$ des ersten Gliedes und die Entfernung $r_2$ des Schwerpunktes $S_2$ vom Mittelpunkt des beide Abschnitte verbindenden Gelenkes direct zu messen; denn es ist, wie man leicht bestätigt, in diesem besonderen Falle

$$c_1 = l_1 \quad \text{und} \quad c_2 = r_2\,.$$

In Folge dessen nimmt die Formel, welche die zusammengehörigen Werthe der beiden Gelenkwinkel $\varphi_1$ und $\psi$ bestimmt, die Gestalt an

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \psi)} = -\frac{r_2}{l_1},$$

und die Muskelspannungen lassen sich mit Hülfe der Formel

$$K = \pm \frac{m_0 r_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}{k}$$

berechnen.

Einen solchen Fall hätte man beispielsweise, wenn man in der Hand ein so schweres Gewicht halten würde, dass das Gewicht des Oberarmes dagegen vernachlässigt werden könnte; man müsste nur dabei dieses neu hinzukommende Gewicht mit Unterarm und Hand zu einer einzigen starren Masse verbunden denken.

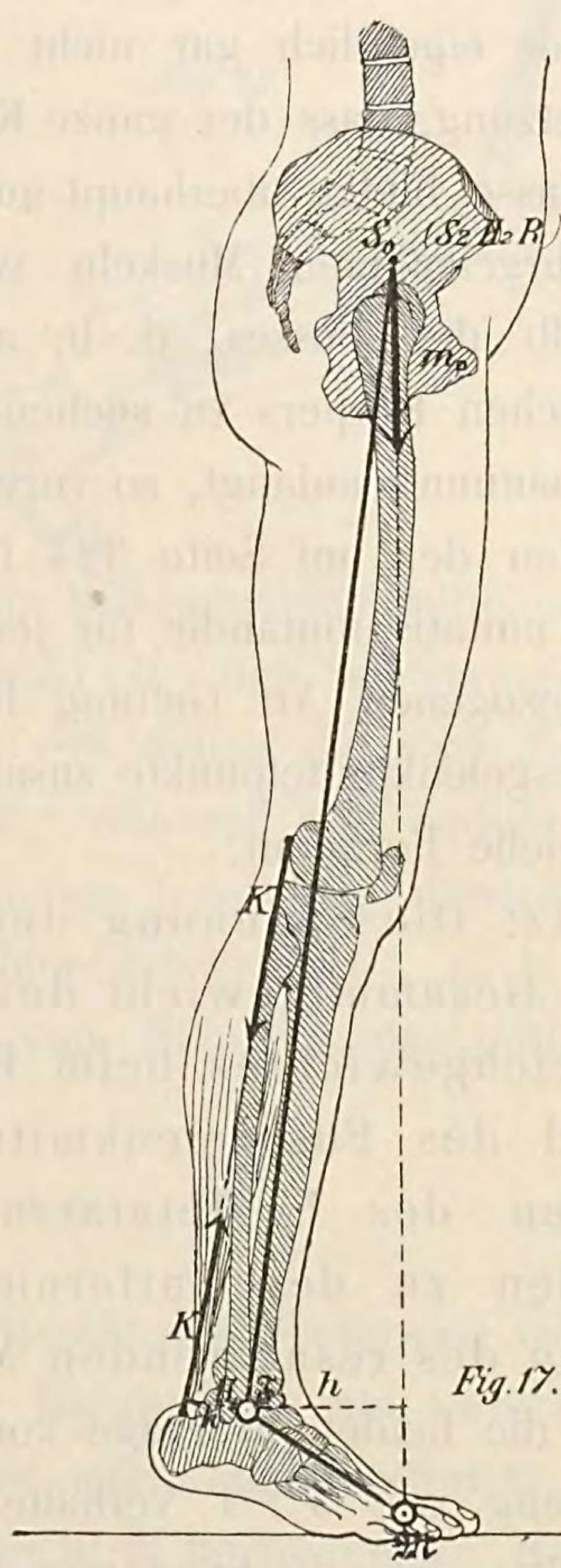


Fig. 17.

Einen solchen Fall hat man unter anderen auch, wenn man die Bedingungen untersucht, unter denen die Wadenmuskulatur dem Gewicht des ganzen Körpers das Gleichgewicht hält, wenn man sich auf die Zehen erhoben hat. Man braucht nur den ganzen Körper mit Ausnahme des einen Fusses, auf dem man steht, als eine einzige starre Masse aufzufassen, welche mit dem auf dem Boden aufstehenden Fusse durch das erste Fussgelenk verbunden ist. Der fixirte Mittelpunkt des ersten Gelenkes 𝔐 (Figur 17), welcher also dem Schultergelenkmittelpunkte entspricht, ist der Mittelpunkt des I. Metatarsophalangealgelenkes, und dem Mittelpunkt des Ellbogengelenkes entspricht der Mittelpunkt 𝔉 des

ersten Fussgelenkes. Der Hauptpunkt $H_1$ fällt mit dem Fussgelenkmittelpunkt und Hauptpunkt $H_2$, Richtpunkt $R$ und Schwerpunkt $S_2$ fallen mit dem Gesammtschwerpunkte $S_0$ des ganzen Körpers zusammen. Es kann nun nach dem Früheren nur dann Gleichgewicht stattfinden, wenn der Gesammtschwerpunkt des Körpers mit dem Mittelpunkt 𝔐 des I. Metatarsophalangealgelenkes in einer Verticalen liegt. Es liegt in der Natur der Sache, dass dabei der erstere nur vertical über dem letzteren liegen kann. Daraus geht aber wiederum hervor, dass für das Gleichgewicht hier überhaupt nur eingelenkige Muskeln in Frage kommen können, welche hinter der Axe des ersten Fussgelenkes vorüberziehen; dies ist bei der Wadenmuskulatur der Fall. Der Zusatz »eingelenkig« wäre hier eigentlich gar nicht nöthig, da es unter der gemachten Voraussetzung, dass der ganze Körper mit Ausnahme des Fusses eine starre Masse bildet, überhaupt nur »eingelenkige« Muskeln giebt. Denn bei mehrgelenkigen Muskeln würde ja der erste Insertionspunkt ausserhalb des Fusses, d. h. aber hier überhaupt ausserhalb des menschlichen Körpers zu suchen sein. Was nun die Berechnung der Muskelspannung anlangt, so verwendet man in dem vorliegenden Falle am besten den auf Seite 324 für das Armsystem angeführten Satz, welcher mutatis mutandis für jedes zweigliedrige System der in Betracht gezogenen Art Geltung besitzt. Da der Hauptpunkt $H_1$ mit dem Fussgelenkmittelpunkte zusammenfällt, so nimmt dieser Satz hier die specielle Form an:

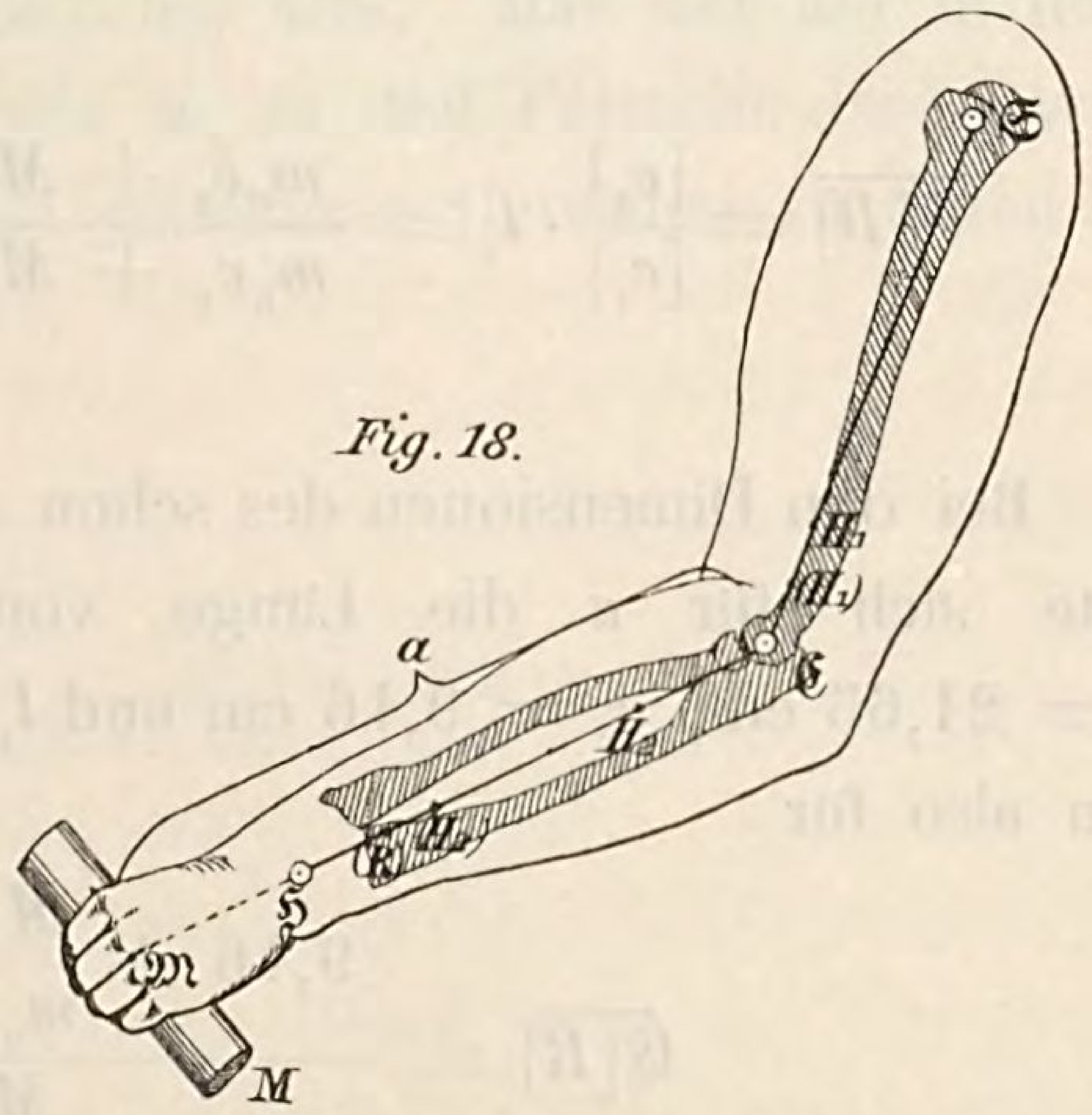
Satz: Die Spannung der Wadenmuskulatur verhält sich zu dem Gesammtgewicht des menschlichen Körpers im Falle des Gleichgewichtes beim Erheben auf die Zehen wie der Abstand des Fussgelenkmittelpunktes von der durch das Köpfchen des I. Metatarsusknochens hindurch gehenden Verticalen zu der Entfernung desselben Punktes von der Richtung des resultirenden Muskelzuges.

Da die beiden in Frage kommenden Abstände sich mit grosser Annäherung wie 3 : 1 verhalten, so hat man ohne alle Rechnung das Resultat, dass die Spannung der Wadenmuskulatur gleich dem Dreifachen des Körpergewichtes sein muss. Rechnet man das Körpergewicht zu 60 kg, so ergiebt sich für die Spannung der Wadenmuskulatur 180 kg. Rechnet man weiterhin als durchschnittlichen Werth des

Querschnittes der Wadenmuskulatur 40 qcm, so ergiebt sich für die zum Gleichgewicht nothwendige Spannung eines Bündels Muskelfasern von der Querschnittseinheit rund 4,5 kg.

Als drittes Beispiel soll endlich der Fall in Betracht gezogen werden, dass ein eingelenkiger Muskel der Schwere das Gleichgewicht hält, wenn unter den für den Arm getroffenen Voraussetzungen in der Hand ein Gewicht $M$ gehalten wird, gegen welches das Gewicht des Oberarmes nicht vernachlässigt werden kann (Figur 18). Ein in der Hand gehaltenes Gewicht, welches natürlich dem starren System: Unterarm plus Hand hinzugefügt wird, ändert in erster Linie die Lage des Hauptpunktes $H_2$. Fällt der Schwerpunkt $\mathfrak{M}$ des Gewichtes $M$, wie der Einfachheit halber angenommen werden soll, in die Verlängerung der Längsaxe des Unterarmes hinein, und besitzt derselbe vom Ellbogengelenkmittelpunkt den Abstand $a$, so wird der neue Hauptpunkt $[H_2]$ den Schwerpunkt eines Systems von zwei Massen darstellen, von denen die eine die Grösse $m_0$ besitzt und in $H_2$ concentrirt ist, während die andere die im Punkte $\mathfrak{M}$ vereinigte Masse $M$ des neuen Gewichtes darstellt. Man hat in Folge dessen für die neue Hauptstrecke $[c_2]$[1], d. h. für die Entfernung des neuen Hauptpunktes vom Ellbogengelenkmittelpunkte die Beziehung

Fig. 18.




$$(m_0 + M)[c_2] = m_0 c_2 + Ma .$$

Es wird sich aber auch der Hauptpunkt des Oberarmes verändern. Derselbe wird sich ebenso wie der Hauptpunkt von Unterarm plus Hand in distaler Richtung von seiner alten Lage entfernen, weil ja im Ellbogengelenkmittelpunkt das Gewicht $M$ hinzukommt. Bezeichnet man mit $[c_1]$ die neue Hauptstrecke, d. h. die Entfernung der neuen

1) Vergl. auch die Beiträge zur Muskeldynamik I, Seite 184.

Lage des ersten Hauptpunktes $[H_1]$ vom Schultergelenkmittelpunkte, so hat man die Beziehung:

$$(m_0 + M)[c_1] = m_0 c_1 + M l_1 .$$

In Folge der Verschiebung der Hauptpunkte wird endlich auch der Richtpunkt des Unterarmes seinen Ort verändern. Ist $[R]$ die neue Lage desselben, so hat man nach den früheren Auseinandersetzungen für seine Entfernung vom Ellbogengelenkmittelpunkt:

$$\overline{\mathfrak{E}[R]} = \frac{[c_2]}{[c_1]} \cdot l_1 = \frac{m_0 c_2 + Ma}{m_0 c_1 + M l_1} \cdot l_1 = \frac{c_2 + \frac{M}{m_0} a}{c_1 + \frac{M}{m_0} l_1} \cdot l_1 .$$

Bei den Dimensionen des schon in Betracht gezogenen Präparates hatte sich für $a$ die Länge von 34,6 cm herausgestellt. Da $c_1 = 21{,}65$ cm, $c_2 = 9{,}16$ cm und $l_1 = 30{,}3$ cm lang waren, so hat man also für

$$\overline{\mathfrak{E}[R]} = \frac{9{,}16 + \frac{M}{m_0}\, 34{,}6}{21{,}65 + \frac{M}{m_0}\, 30{,}3} \cdot 30{,}3 \text{ cm}.$$

Hätte man beispielsweise ein Gewicht in der Hand, welches gleich dem Gewicht $m_0 = 3683$ g des ganzen Armes ist, so würde $\frac{M}{m_0}$ den Werth 1 annehmen, und es würde sich dann ergeben für

$$\overline{\mathfrak{E}[R]} = \frac{9{,}16 + 34{,}6}{21{,}65 + 30{,}3} \cdot 30{,}3 \text{ cm} = 25{,}52 \text{ cm}.$$

Da bei unbelastetem Arm die Entfernung des Richtpunktes von $\mathfrak{E}$ nur 12,82 cm betrug, so ist derselbe durch Hinzufügen eines Gewichtes von der Grösse des Armgewichtes fast genau in die doppelte Entfernung gerückt. Dadurch werden nun vor allen Dingen die Haltungen des Armes vollständig anders ausfallen, bei denen allein ein eingelenkiger Muskel der Schwere Gleichgewicht halten kann.

Es ist leicht einzusehen, dass bei stetiger Vergrösserung des in der Hand gehaltenen Gewichtes der Richtpunkt sich immer mehr vom Ellbogengelenkmittelpunkt entfernen wird, bis er schliesslich bei einem

Gewicht, gegen welches die Gewichte von Oberarm und Unterarm vernachlässigt werden können, mit dem Schwerpunkt $\mathfrak{M}$ desselben zusammenfällt. Dann hat man aber den schon als zweites Beispiel behandelten Fall.

Nachdem die neue Lage des Richtpunktes und die neuen Grössen der beiden Hauptstrecken festgestellt sind, erledigen sich die übrigen Fragen, über die für die eingelenkigen Muskeln charakteristischen Armhaltungen, über die Bestimmung der Muskelspannung u. s. w. in derselben Weise wie beim unbelasteten Arm. Man hat nur in Rücksicht zu ziehen, dass an Stelle von $m_0$ in den Formeln das Gewicht des Armes plus dem in der Hand gehaltenen Gewichte zu treten hat.

---

## V. Das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln, welche am Rumpf ihren Ursprung haben und am Unterarm ansetzen (mehrgelenkigen Muskeln).

Die allgemeinen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen Schwere und irgend einem Muskel lauten nach II, 7 in der einen Form:

$$-m_0 r_0 + D_0 = 0$$

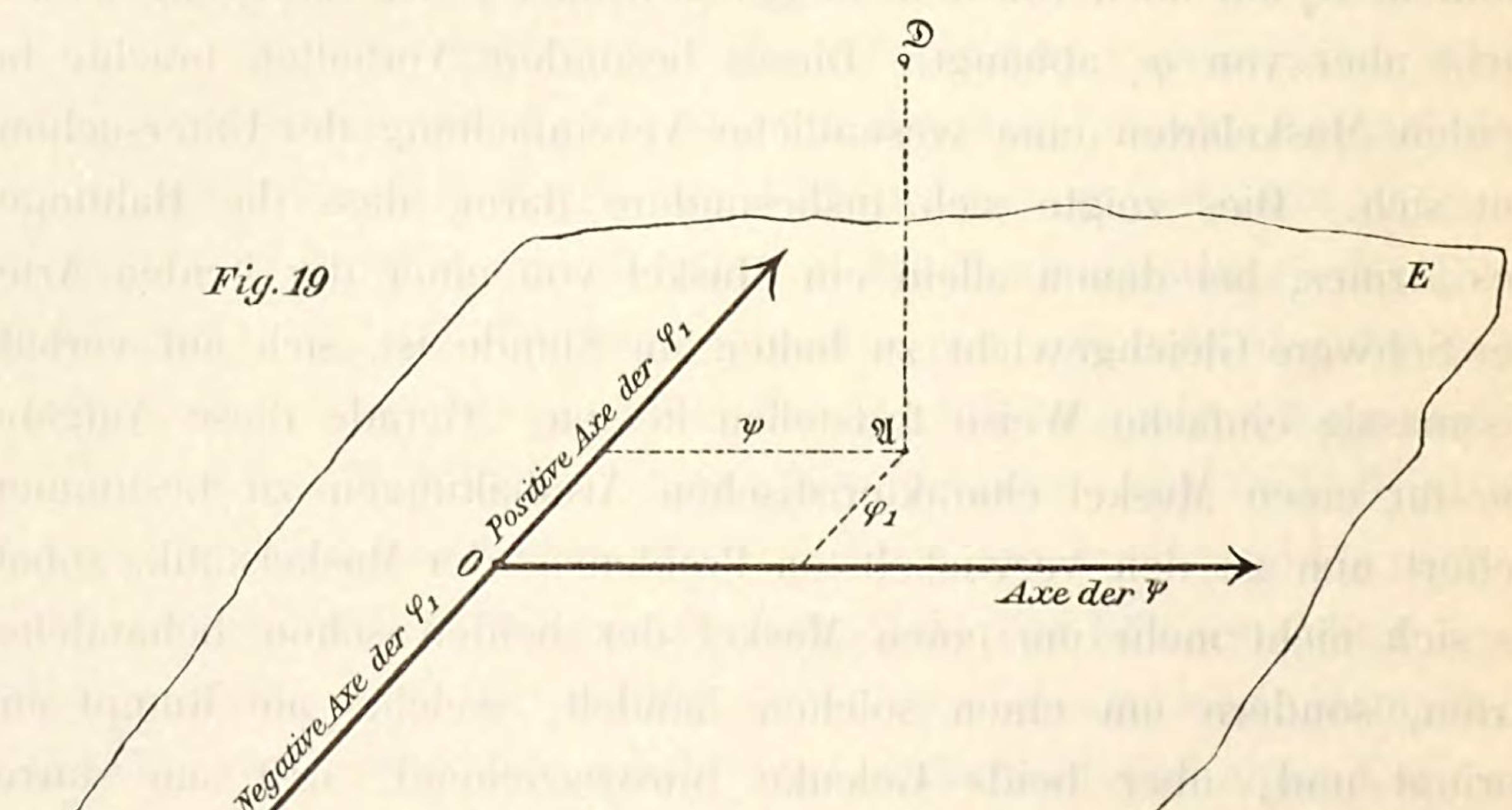
$$-m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) + D_2 = 0 .$$

Hierbei ist, um es nochmals kurz zusammenzufassen, $m_0$ das Gesammtgewicht des Armes, $r_0$ der Abstand der durch den Gesammtschwerpunkt $S_0$ des Armes gehenden Verticalen (Schwerlinie) vom Schultergelenkmittelpunkt, $c_2$ der Abstand des Hauptpunktes des starren Systems: Unterarm plus Hand vom Ellbogengelenkmittelpunkt, $\varphi_1$ der Drehungswinkel des Schultergelenkes, $\psi$ der Beugungswinkel des Ellbogengelenkes, $D_0$ das Drehungsmoment, mit welchem der Muskel auf den ganzen Arm einwirkt, nachdem das Ellbogengelenk festgestellt und allein das Schultergelenk beweglich gelassen ist, und $D_2$ das Drehungsmoment, mit welchem der Muskel auf den Arm einwirkt, nachdem das Schultergelenk festgestellt und allein das Ellbogengelenk beweglich gelassen ist. Die beiden Drehungsmomente sind Momente von Kräftepaaren; denn nur solche können drehend auf einen Körper einwirken. Dabei wird $D_0$ gemessen durch das Drehungsmoment, welches der Muskel in der durch den Drehungswinkel $\varphi_1$ bestimmten Stellung des Schultergelenkes in Bezug auf den Schultergelenkmittelpunkt besitzt, nachdem das Ellbogengelenk in der durch den Beugungswinkel $\psi$ bestimmten Stellung fixirt worden ist; dagegen wird $D_2$ gemessen durch das Drehungsmoment, welches der Muskel in der durch den Beugungswinkel $\psi$ bestimmten Stellung des Ellbogengelenkes in Bezug auf den Ellbogengelenkmittelpunkt besitzt, nachdem das Schulter-

gelenk (und damit der ganze Oberarm) in der durch den Drehungswinkel $\varphi_1$ bestimmten Stellung fixirt worden ist. Da bei Aenderung der Gelenkstellungen im Allgemeinen auch die Werthe der beiden Drehungsmomente $D_0$ und $D_2$ eine Aenderung erleiden, so hängen dieselben von zwei veränderlichen Grössen ab; sie sind Functionen der beiden Variabelen $\varphi_1$ und $\psi$. Die bisher in Betracht gezogenen Muskelarten zeichnen sich nun insofern vor allen anderen Muskeln aus, als bei ihnen das eine der beiden Drehungsmomente von den Winkeln $\varphi_1$ und $\psi$ ganz unabhängig ist, indem es für alle Stellungen des Armes den Werth Null annimmt, und das andere nur von einem der beiden Winkel abhängt. So sind die am Oberarm ansetzenden Muskeln, deren Ursprung also ausserhalb des Armes zu suchen ist, dadurch charakterisirt, dass für sie $D_2 = 0$ ist, und dass das Drehungsmoment $D_0$ nur noch von dem Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenkes, nicht aber von $\psi$ abhängt. Die zwischen Oberarm und Unterarm sich erstreckenden Muskeln (eingelenkigen Muskeln) sind umgekehrt dadurch charakterisirt, dass für sie $D_0 = 0$ ist, und dass das Drehungsmoment $D_2$ nur noch von dem Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenkes, nicht aber von $\varphi_1$ abhängt. Dieses besondere Verhalten brachte bei beiden Muskelarten eine wesentliche Vereinfachung der Untersuchung mit sich. Dies zeigte sich insbesondere darin, dass die Haltungen des Armes, bei denen allein ein Muskel von einer der beiden Arten der Schwere Gleichgewicht zu halten im Stande ist, sich auf verhältnissmässig einfache Weise feststellen liessen. Gerade diese Aufgabe, die für einen Muskel charakteristischen Armhaltungen zu bestimmen, gehört nun zu den verwickeltsten Problemen der Muskelstatik, sobald es sich nicht mehr um einen Muskel der beiden schon behandelten Arten, sondern um einen solchen handelt, welcher am Rumpf entspringt und, über beide Gelenke hinwegziehend, erst am starren System: Unterarm plus Hand seinen Ansatz nimmt. Und doch gehört gerade diese Aufgabe andererseits unter die wichtigsten Probleme der Muskelstatik. Was hätte es für Sinn, die Spannung zu bestimmen, mit der ein solcher mehrgelenkiger Muskel bei einer bestimmten Haltung des Armes sich contrahiren muss, um der Schwere das Gleichgewicht zu halten, wenn man noch nicht einmal weiss, ob der Muskel auch wirklich im Stande ist, bei dieser Haltung die geforderte Leistung zu vollbringen?

Der Grund, weshalb die Lösung dieser Aufgabe besonders schwierig ist, liegt darin, dass bei einem mehrgelenkigen Muskel im Allgemeinen keins der beiden Drehungsmomente einen constanten Werth besitzt und auch keines von einem der beiden Winkel allein abhängt. Die Drehungsmomente ändern sich fortwährend, wenn man successive von einer Haltung des Armes in andere und andere übergeht. Zu einem bestimmten Werth des Drehungswinkels $\varphi_1$ werden gewöhnlich unzählig viele Werthe der beiden Drehungsmomente gehören, je nach der gleichzeitigen Grösse des Beugungswinkels $\psi$. Desgleichen werden im Allgemeinen auch zu einem bestimmten Werth von $\psi$ unzählig viele Werthe der Drehungsmomente gehören, je nach der gleichzeitigen Grösse von $\varphi_1$. Wollte man für einen bestimmten Muskel die Abhängigkeit eines der beiden Drehungsmomente von den Gelenkwinkeln durch ein Diagramm darstellen, so würde dieses Diagramm nicht eine Curve sein können, sondern es müsste eine Fläche sein. Diese Fläche wäre etwa so zu construiren, dass man zunächst die Punkte einer horizontalen Ebene $E$ (Figur 19) auf ein in dieser Ebene gelegenes

Fig. 19




rechtwinkliges Coordinatensystem in der Weise bezieht, dass man die Abscissen dem Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenkes und die Ordinaten dem Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenkes proportional annimmt. Dann ist jedem Werthepaar dieser beiden Gelenkwinkel ein bestimmter Punkt der Ebene $E$ zugeordnet. Da durch jedes Werthepaar der Winkel $\varphi_1$, $\psi$ eine ganz bestimmte Haltung des Armes

angegeben wird, so kann man auch sagen, dass jeder Armhaltung ein bestimmter Punkt der Ebene $E$ zugeordnet ist. Nebenbei sei bemerkt, dass bei dieser Art der Bestimmung der Haltung des Armes durch Punkte einer Ebene nicht alle Punkte der letzteren zur Verwendung kommen. Da der Beugungswinkel des Ellbogengelenkes $\psi$ in Folge des besonderen Baues des Gelenkes nicht negativ sein kann, so fallen z. B. alle Punkte, welche links von der Axe der Drehungswinkel $\varphi_1$ liegen, ausser Betracht. Es kommen überhaupt nur solche Punkte der Ebene $E$ in Frage, welche innerhalb eines Rechteckes liegen, dessen eine Seite die Axe der $\varphi_1$ ist, während die zu dieser parallele Seite im Abstand von 150 Millimeter weiter nach rechts liegt, wenn man einen Winkelgrad durch eine Länge von 1 Millimeter repräsentirt. Die beiden anderen, der Axe der $\psi$ parallelen Seiten des Rechteckes verlaufen zu beiden Seiten dieser Axe in einem Abstand von je 180 Millimeter. Dies entspricht dem Umstande, dass einerseits der Winkel $\psi$ in der alleräussersten Beugestellung höchstens 150° beträgt, und dass andererseits allein durch Winkel bis zu 180° jede Stellung des Oberarmes bestimmt werden kann, wenn man für $\varphi_1$ sowohl positive als negative Werthe zulässt.

Trägt man nun von jedem Punkte 𝔄 innerhalb dieses Rechteckes aus senkrecht zu der Ebene $E$ je nach dem Vorzeichen des Drehungsmomentes eine Strecke nach oben oder unten ab, die proportional dem Werthe des Drehungsmomentes ist, welcher zu der durch die Lage des Punktes 𝔄 im Coordinatensystem bestimmten Armhaltung gehört, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken auf einer continuirlichen Fläche. Diese Fläche giebt eine deutliche Veranschaulichung der Abhängigkeit des Drehungsmomentes von den Winkeln $\psi$ und $\varphi_1$. Man erhält auf diese Weise für jedes der beiden Drehungsmomente $D_0$ und $D_2$ eine besondere Fläche; beide Flächen zusammen geben erst ein deutliches Bild der Drehungsbestreben, welche der Muskel auf den im Ellbogengelenk gegliederten Arm ausübt.

Die Construction der beiden Flächen setzt natürlich die experimentelle Bestimmung der Drehungsmomente für eine genügend grosse Anzahl von Armhaltungen am Präparat voraus. Gemäss der Bedeutung der beiden Drehungsmomente wird man zur Messung von $D_0$ etwa folgendermaassen verfahren können. Man fixirt zunächst das Ellbogengelenk in der äussersten Streckstellung und misst nun die Werthe

des Drehungsmomentes $D_0$ für $\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 = +10^\circ$, $\varphi_1 = +20^\circ$, $\cdots\cdots$ $\varphi_1 = +180^\circ$; $\varphi_1 = -10^\circ$, $\varphi_1 = -20^\circ$, $\varphi_1 = -30^\circ$, $\cdots\cdots$ $\varphi_1 = -180^\circ$ in der bekannten Weise[1]) durch Bestimmung der Verkürzungscurve. Um sich das mühsame Messen der Verkürzungswerthe während des Versuches zu ersparen, kann man diese sich selbst auf die Trommel eines Kymographions aufschreiben lassen, eine Methode, die bisher noch nicht angewendet worden ist, die sich aber schon in Anbetracht der damit zu erreichenden grösseren Genauigkeit sehr empfiehlt. Um die Curven direct verwerthen zu können, muss man dabei nur die Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel in ganz bestimmte Beziehung zu der Aenderung des Drehungswinkels $\varphi_1$ setzen. Auf diese Weise erhält man zunächst die Werthe von $D_0$, welche den Werthepaaren 0°, 0°; 0°, + 10°; 0°, + 20°; $\cdots\cdot$ 0°, — 10°; 0°, — 20° u. s. w. der Winkel $\psi$, $\varphi_1$ entsprechen. Darauf löst man die Befestigung des Ellenbogengelenkes, beugt um 10° und fixirt das Gelenk von Neuem. Die abermalige Bestimmung der Drehungsmomente ergiebt jetzt die zu den Werthepaaren 10°, 0°; 10°, + 10°; 10°, + 20°; $\cdots\cdots$ 10°, — 10°; 10° — 20° u. s. w. der Winkel $\psi$, $\varphi_1$ gehörenden Werthe von $D_0$. Dann löst man von Neuem die Befestigung des Ellbogengelenkes, beugt um weitere 10° und fixirt wieder. Dies setzt man fort, bis schliesslich die äusserste Beugestellung im Ellbogengelenk erreicht ist. Man erhält auf diese Weise eine genügende Anzahl von Werthen, um die ganze zu $D_0$ gehörende Fläche zeichnen oder ein Modell derselben aus Thon, Gyps oder irgend einem plastischen Material mit vollständig genügender Genauigkeit anfertigen zu können.

Zur Bestimmung der Werthe von $D_2$ hat man umgekehrt das Schultergelenk successive in bestimmten um 10° von einander abweichenden Stellungen zu fixiren und dann jedesmal die Werthe des

---

1) Man vergl.: A. Fick, Specielle Bewegungslehre im Handbuch der Physiologie von Hermann. Bd. I, Theil II. — E. Fick und E. Weber, Anatomisch-mechanische Studie über die Schultermuskeln. Würzburger Verhandlungen. N. F. Bd. XI. — E. Fick, Ueber zweigelenkige Muskeln, Archiv f. Anatomie 1879. S. 201. — W. Braune und O. Fischer, Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XV. — O. Fischer, Ueber die Drehungsmomente ein- und mehrgelenkiger Muskeln. Archiv f. Anatomie 1894. S. 119.

Drehungsmomentes für $\psi = 0^\circ$, $\psi = 10^\circ$, $\psi = 20^\circ$, $\cdots$ $\psi = 150^\circ$ durch Ueberführen des Unterarmes aus der Streckstellung in die äusserste Beugestellung und gleichzeitige Messung oder graphische Verzeichnung der Verkürzungscurve zu ermitteln.

Solche Messungen sind bisher in ihrem vollem Umfange überhaupt noch nicht ausgeführt worden; sie bilden aber eine absolut nothwendige Unterlage für die Untersuchung nicht nur der statischen, sondern auch der dynamischen Wirksamkeit der einzelnen mehrgelenkigen Muskeln. Es ist daher noch eine ungeheure Anzahl von Messungen am Präparat auszuführen, bevor man die statische Bedeutung und Wirkungsweise der einzelnen Extremitätenmuskeln genügend aufzuklären im Stande sein wird: denn von den Werthen von $D_0$ und $D_2$ hängen nicht allein die Muskelspannungen ab, sondern dieselben sind auch bestimmend für die Stellungen des Armes, bei denen allein ein mehrgelenkiger Muskel der Schwere das Gleichgewicht halten kann. Auch hierin zeigt sich ein enormer Unterschied zwischen der Untersuchung der statischen Wirkungsweise von mehrgelenkigen und der von eingelenkigen oder am Oberarm ansetzenden Muskeln. Bei diesen beiden letzten Arten waren die Haltungen des Armes von den Drehungsmomenten vollständig unabhängig, so dass die für einen Muskel charakteristischen Armhaltungen auch allen anderen Muskeln derselben Art zukamen. Bei den mehrgelenkigen Muskeln stellt sich dagegen heraus, dass ein jeder Muskel seine ganz besonderen für ihn charakteristischen Haltungen des Armes hat, bei denen allein er der Schwere Gleichgewicht halten kann; und diese Armhaltungen sind eben in erster Linie von den Werthen der Drehungsmomente $D_0$, $D_2$ abhängig, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird.

Die beiden Bedingungsgleichungen

$$- m_0 r_0 + D_0 = 0$$
$$- m_0 c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) + D_2 = 0$$

zwischen den Grössen $r_0$, $c_2$, $\varphi_1 + \psi$, $D_0$ und $D_2$ können nur dann befriedigt werden, wenn die Relation besteht:

$$\frac{D_2}{c_2 \sin(\varphi_1 + \varphi)} = \frac{D_0}{r_0}.$$

Dies bestätigt man leicht, wenn man aus beiden Gleichungen die Grösse $m_0$ durch die anderen ausdrückt. Diese Beziehung ist gleichbedeutend mit der Proportion:

$$r_0 : c_2 \sin(\varphi_1 + \psi) = D_0 : D_2 .$$

Erinnert man sich, dass (vergl. Figur 13 auf Seite 313) $r_0$ den Abstand der beiden durch $\mathfrak{S}$ und $S_0$ gezogenen Verticalen und $c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)$ den Abstand der beiden durch $H_1$ und $S_0$ gezogenen Verticalen darstellt, so bestätigt man unter Zuhülfenahme der folgenden Figur 20 leicht, dass das Verhältniss $r_0 : c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)$ auch durch das Verhältniss der beiden Strecken $\overline{S_0 B}$ und $\overline{S_0 H_1}$ ersetzt werden kann. Dabei ist $B$ der Schnittpunkt der Verlängerung von $S_0 H_1$ mit der Verticalen durch $\mathfrak{S}$ für irgend eine der Armhaltungen, bei welcher der Muskel der Schwere Gleichgewicht halten kann. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Verlängerung der Unterarmlängsaxe mit der Verticalen durch $\mathfrak{S}$ mit $G$, so folgt aus dem Umstande, dass $S_0 H_1 B$ parallel $R\mathfrak{S}G$ läuft und dass die Verlängerungen von $RS_0$, $\mathfrak{S}H_1$ und $GB$ durch denselben Punkt $\mathfrak{S}$ hindurchgehen, andererseits

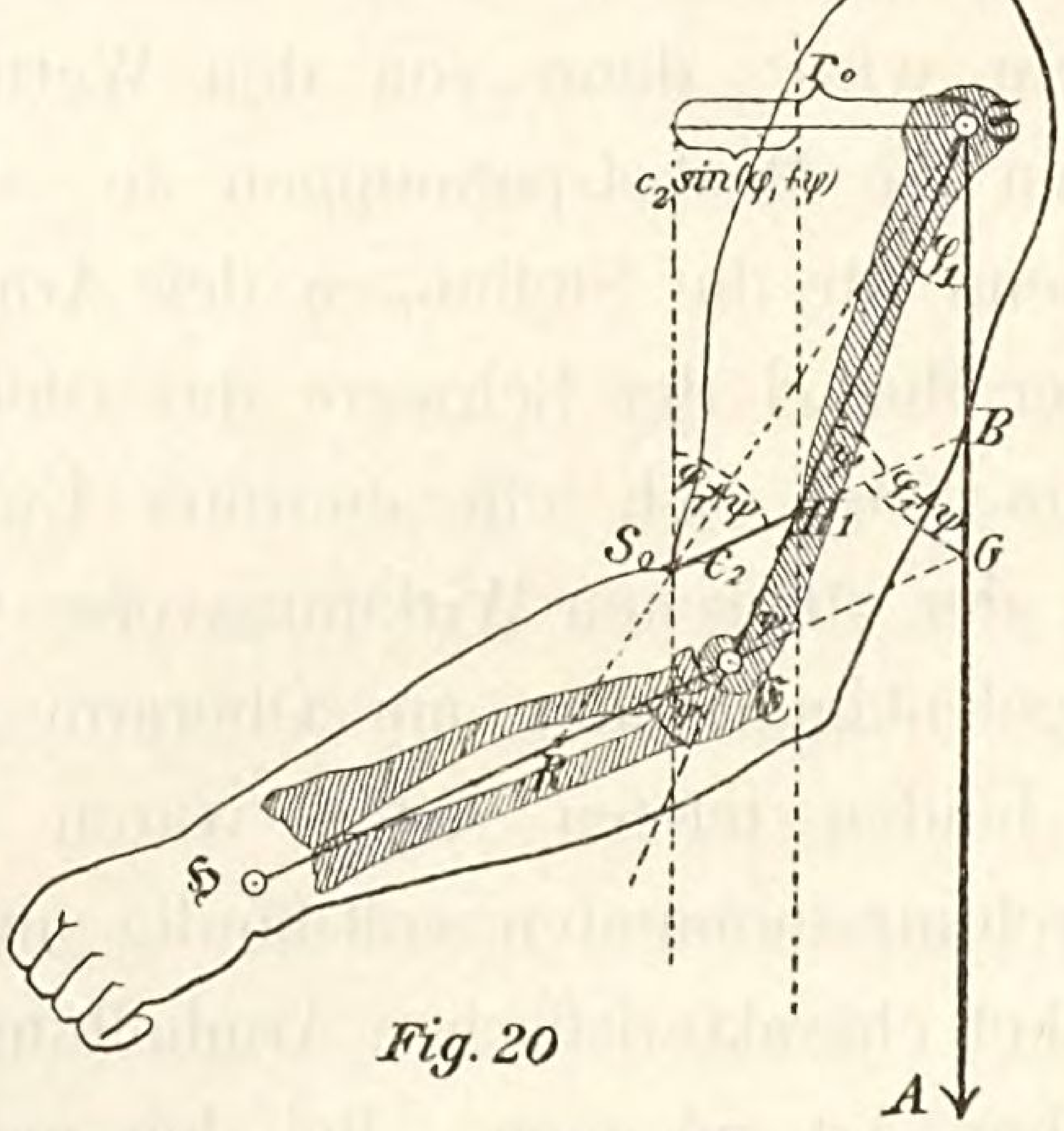



Fig. 20

$$\overline{S_0 B} : \overline{S_0 H_1} = \overline{RG} : \overline{R\mathfrak{S}} .$$

Man kann daher die Bedingung, welche die beiden Drehungsmomente im Falle des Gleichgewichts zwischen einem mehrgelenkigen Muskel und der Schwere erfüllen müssen, auch in der Form schreiben:

$$\overline{RG} : \overline{R\mathfrak{S}} = D_0 : D_2 .$$

Beachtet man, dass $R$ den Richtpunkt und $G$ denjenigen Punkt der Unterarmlängsaxe darstellt, welcher im Falle des Gleichgewichtes mit dem Schultergelenkmittelpunkt in einer Verticalen liegt, so hat man den ganz allgemein gültigen, wichtigen

Satz: Ein jeder Muskel kann nur in denjenigen Stellungen des Armes der Schwere das Gleichgewicht halten, bei denen

ein Punkt der Unterarmlängsaxe mit dem Schultergelenkmittelpunkte in einer Verticalen liegt, dessen Abstand vom Richtpunkt des Unterarmes sich zu dem Abstand des Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkt verhält wie das Drehungsmoment, mit welchem der Muskel auf den Arm einwirken würde, wenn das Ellbogengelenk fixirt und allein das Schultergelenk beweglich wäre, zu dem Drehungsmoment, mit welchem der Muskel auf den Arm einwirken würde, wenn das Schultergelenk fixirt und allein das Ellbogengelenk beweglich wäre.

Der Punkt $G$ der Unterarmlängsaxe, welcher im Falle des Gleichgewichtes mit dem Schultergelenkmittelpunkt in einer Verticalen liegt, soll den Namen »Gleichgewichtspunkt des Unterarmes« führen.

Man erkennt leicht, dass dieser Satz die für die beiden bisher behandelten Muskelarten gefundenen Sätze auf Seite 316 und Seite 319 resp. 323 in sich begreift.

Im Falle eines beliebigen am Oberarm ansetzenden Muskels hatte $D_2$ den speciellen Werth Null. Das Verhältniss der beiden Drehungsmomente ist daher unendlich gross. In Folge dessen muss in diesem Falle auch das Verhältniss der Abstände $\overline{RG}$ und $\overline{R\mathfrak{E}}$ unendlich gross sein. Da $\overline{R\mathfrak{E}}$ eine bestimmte endliche Grösse hat, so ist dies nur möglich, wenn $\overline{RG}$ selbst unendlich gross ist; dies heisst aber: der Gleichgewichtspunkt muss mit dem unendlich fernen Punkte der Unterarmlängsaxe zusammenfallen. Wenn nun trotzdem derselbe mit dem Schultergelenkmittelpunkte in eine Verticale fallen soll, so muss nothwendiger Weise die Längsaxe des Unterarmes selbst vertical gerichtet sein, eine Bedingung, welche sich für den Fall eines am Oberarm ansetzenden Muskels auch thatsächlich schon früher ergeben hatte.

Im Falle eines zwischen Oberarm und dem starren System: Unterarm plus Hand ausgespannten Muskels besass $D_0$ den Werth Null; hieraus folgt aber auch für das Verhältniss der beiden Drehungsmomente der Werth Null. Wenn nun auch das Verhältniss der Abstände $\overline{RG}$ und $\overline{R\mathfrak{E}}$ Null sein soll, wie es der allgemeine Satz verlangt, so muss nothwendiger Weise $\overline{RG}$ selbst gleich Null sein, d. h. es muss der Gleichgewichtspunkt mit dem Richtpunkt zusammenfallen. In der That hatte sich ja für die »eingelenkigen« Muskeln

ergeben, dass im Falle des Gleichgewichtes der Richtpunkt selbst mit dem Schultergelenkmittelpunkt in einer Verticalen liegt.

Würde nun auch im Falle eines mehrgelenkigen Muskels der Gleichgewichtspunkt eine feste Lage auf der Unterarmlängsaxe einnehmen, so würde die Bestimmung der Stellungen des Armes, bei denen allein der Muskel der Schwere Gleichgewicht halten kann, sich ebenso einfach gestalten wie bei den bisher behandelten Muskelarten. Dies trifft aber leider nicht zu. Es ändern sich nicht nur die Werthe der beiden Drehungsmomente $D_0$ und $D_2$, wenn man in andere und andere Stellungen des Armes übergeht, sondern es nimmt auch das Verhältniss derselben fortwährend andere Werthe an. Damit der Gleichgewichtspunkt für alle dem Muskel zukommenden Armhaltungen dieselbe Lage auf der Unterarmlängsaxe einnähme, wäre aber erforderlich, dass wenigstens das Verhältniss der beiden Drehungsmomente für jeden Muskel einen von der Stellung des Armes unabhängigen Werth besässe.

Versteht man ganz allgemein unter dem Gleichgewichtspunkt denjenigen Punkt der Unterarmlängsaxe, welcher bei einer beliebigen Stellung des Armes jeweils vertical unter oder vertical über dem Schultergelenkmittelpunkt liegt — ganz abgesehen davon, ob ein Muskel auch wirklich in der betreffenden Armhaltung der Schwere Gleichgewicht halten kann —, so kommt jeder Haltung des Armes eine ganz bestimmte Lage des Gleichgewichtspunktes auf der Unterarmlängsaxe zu. Bringt man den Arm in andere und andere Stellungen, so wandert der Gleichgewichtspunkt auf der Unterarmlängsaxe; dabei kann es ebenso vorkommen, dass er ins Unendliche flieht, nämlich bei verticaler Richtung der Unterarmlängsaxe, als dass er mit dem Ellbogengelenkmittelpunkt zusammenfällt, nämlich bei verticaler Richtung der Oberarmlängsaxe. Derselbe kann ferner auch in distaler Richtung über den Richtpunkt $R$ des Unterarmes hinausgehen; tritt dieser Fall ein, so ist das Verhältniss seines Abstandes vom Richtpunkt zu dem Abstand des Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkt negativ zu rechnen, weil jetzt diese beiden Abstände von $R$ aus in entgegengesetzter Richtung verlaufen.

Während zu jeder Haltung des Armes eine ganz bestimmte Lage des Gleichgewichtspunktes gehört, giebt es umgekehrt unzählig viele Armhaltungen, welche in der Lage dieses Punktes übereinstimmen. Man braucht sich ja nur an die Haltungen des Armes zu erinnern,

bei denen ein eingelenkiger Muskel der Schwere Gleichgewicht halten kann; für alle diese hatte der Gleichgewichtspunkt eine feste Lage auf der Unterarmlängsaxe, indem er mit dem Richtpunkt zusammenfiel. Ermittelt man nun alle Haltungen des Armes, welche zu einer bestimmten Lage des Gleichgewichtspunktes gehören und bestimmt für jede derselben das Verhältniss der beiden Drehungsmomente $D_0$, $D_2$ eines bestimmten Muskels, so wird im Allgemeinen der Werth dieses Verhältnisses von dem Werthe des Verhältnisses der beiden Abstände $\overline{RG}$, $\overline{R\mathfrak{G}}$ verschieden sein. Es kommt dabei vielleicht nur ein Mal oder höchstens zwei Mal vor, dass der Werth von $\frac{D_0}{D_2}$ mit dem Werthe von $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ übereinstimmt. Hat man eine derartige Haltung des Armes ermittelt, so hat man damit eine solche gewonnen, bei der der betreffende Muskel der Schwere das Gleichgewicht halten kann. Man sieht, wie mühsam sich die Untersuchung gestalten muss, wenn man auf diese Weise eine Anzahl von Gleichgewichtshaltungen des Armes für einen bestimmten Muskel ermitteln will, welche gross genug ist, um einen Ueberblick über die ganze für den Muskel charakteristische Gruppe von Haltungen des Armes zu gewinnen.

Geometrisch gesprochen handelt es sich bei dieser Untersuchung um Folgendes:

Da das Verhältniss $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ und auch das Verhältniss $\frac{D_0}{D_2}$ sowohl vom Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenkes als auch vom Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenkes abhängen, so kann man sich in der früher (Seite 340 ff.) beschriebenen Weise zwei Flächen construiren, von denen die eine die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ von den Gelenkwinkeln $\psi$ und $\varphi_1$ und die andere die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{D_0}{D_2}$ von denselben beiden Winkeln veranschaulicht. Bei jeder dieser Flächen sind als horizontale Coordinaten den Werthen von $\psi$ und $\varphi_1$ proportionale Strecken und als verticale Coordinaten Strecken zu verwenden, deren Grösse durch die Verhältnisszahl $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$

bei der einen, und durch $\frac{D_0}{D_2}$ bei der anderen Fläche gemessen wird. Wenn man bei den beiden horizontalen Coordinaten 1 Winkelgrad durch 1 Millimeter dargestellt findet, so empfiehlt es sich, als Maasseinheit für die dritte Coordinate 1 Decimeter zu verwenden, so dass also die Verhältnisszahl 1 durch 1 Decimeter, die Verhältnisszahl 0,5 durch 5 Centimeter, die Verhältnisszahl 0,03 durch 3 Millimeter u. s. w. dargestellt ist.

Denkt man sich nun beide Flächen in dasselbe Coordinatensystem eingezeichnet, so werden dieselben sich im Allgemeinen durchaus nicht decken, weil ja für die gleiche Haltung des Armes, d. h. also für die gleichen Werthe von $\psi$ und $\varphi_1$, die beiden Verhältnisse $\frac{\overline{RG}}{R\mathfrak{S}}$ und $\frac{D_0}{D_2}$ im Allgemeinen verschieden gross ausfallen. Die Flächen würden nur dann in eine einzige zusammenfallen, wenn diese Verhältnisse für alle Armhaltungen gleich gross wären. Zwei Flächen, welche nicht zusammenfallen, werden nun aber im Allgemeinen sich in einer Curve durchschneiden, so dass sie wenigstens die Punkte dieser Curve gemeinsam haben. Ist dies der Fall, so hat man durch die horizontalen Coordinaten $\psi$, $\varphi_1$ der Punkte dieser Schnittcurve diejenigen Armhaltungen gekennzeichnet, bei denen die beiden Verhältnisse gleich gross sind, denn die verticalen Coordinaten beider Flächen stimmen ja an diesen Stellen überein. Würden sich die beiden Flächen überhaupt nicht durchschneiden, so wäre das ein Zeichen, dass der betreffende Muskel der Schwere des Armes in keiner Stellung Gleichgewicht halten kann. Man sieht also, es läuft die Aufgabe, alle Stellungen des Armes aufzusuchen, bei denen ein Muskel der Schwere das Gleichgewicht halten kann, auf die geometrische Aufgabe hinaus, die Coordinaten der Schnittcurve zweier Flächen zu bestimmen.

Während die Fläche, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{D_0}{D_2}$ von den Gelenkwinkeln $\psi$ und $\varphi_1$ veranschaulicht, im Allgemeinen für jeden Muskel eine besondere Form aufweist, ist die andere Fläche, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{\overline{RG}}{R\mathfrak{S}}$ von diesen Gelenkwinkeln veranschaulicht, von der Lage und Ansatzweise der Muskeln vollständig unabhängig; sie kommt also bei jeder derartigen Aufgabe

in Frage. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, diese Fläche ein für allemal zu construiren, um damit eine nothwendige, allen Untersuchungen über die einem Muskel zukommenden Gleichgewichtshaltungen des Armes gemeinsame Unterlage zu schaffen.

Bezeichnet man den Werth des Verhältnisses $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ mit $v$, und beachtet, dass nach Seite 344 und Figur 20

$$\overline{RG} : \overline{R\mathfrak{G}} = r_0 : c_2 \sin(\varphi_1 + \psi),$$

so hat man zunächst

$$v = \frac{r_0}{c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}.$$

Hierin ist $r_0$ noch eine von $\varphi_1$ und $\psi$ abhängige Grösse; es ist nämlich nach Seite 313

$$r_0 = c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \sin(\varphi_1 + \psi).$$

Setzt man diesen Werth ein, so erhält man nach einer leicht zu übersehenden Vereinfachung das Verhältniss $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ oder $v$ in folgender Weise durch die Winkel $\varphi_1$ und $\psi$ ausgedrückt:

$$v = \frac{c_1 \sin \varphi_1}{c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)} + 1.$$

Dies stellt die Gleichung der einen Fläche dar. Da nach Seite 320 $c_1 = 21{,}65$ und $c_2 = 9{,}16$ ist, so nimmt dieselbe für das Armsystem die bestimmte Form an:

$$v = \frac{21{,}65 \sin \varphi_1}{9{,}16 \sin(\varphi_1 + \psi)} + 1.$$

Die Werthe von $v$ sind für alle in Betracht kommenden Winkelwerthe von 5° zu 5° berechnet und in folgender Tabelle niedergelegt worden.

Werthe des Verhältnisses $v$ der Abstände des Gleichgewichtspunkt

berechnet nach der Form

Beugungswinkel

Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenks (Drehung nach vorn oder Beugung).

| | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +180° | unbestimmt | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 |
| +175° | + 3,364 | ∞ | − 1,364 | − 0,186 | + 0,204 | + 0,398 | + 0,513 | + 0,588 | + 0,641 | + 0,680 | + 0,709 | + 0,731 | + 0,749 | + 0,762 | + 0, |
| +170° | + 3,364 | + 5,709 | ∞ | − 3,709 | − 1,364 | − 0,586 | − 0,200 | + 0,029 | + 0,179 | + 0,284 | + 0,362 | + 0,420 | + 0,464 | + 0,499 | + 0, |
| +165° | + 3,364 | + 4,523 | + 8,019 | ∞ | − 6,019 | − 2,523 | − 1,364 | − 0,789 | − 0,447 | − 0,223 | − 0,067 | + 0,048 | + 0,135 | + 0,201 | + 0, |
| +160° | + 3,364 | + 4,123 | + 5,655 | + 10,275 | ∞ | − 8,275 | − 3,655 | − 2,123 | − 1,364 | − 0,913 | − 0,617 | − 0,409 | − 0,258 | − 0,143 | − 0,0 |
| +155° | + 3,364 | + 3,921 | + 4,859 | + 6,752 | + 12,461 | ∞ | − 10,461 | − 4,752 | − 2,859 | − 1,921 | − 1,364 | − 0,998 | − 0,741 | − 0,554 | − 0, |
| +150° | + 3,364 | + 3,796 | + 4,455 | + 5,566 | + 7,805 | + 14,559 | ∞ | − 12,559 | − 5,805 | − 3,566 | − 2,455 | − 1,796 | − 1,364 | − 1,060 | − 0,9 |
| +145° | + 3,364 | + 3,711 | + 4,208 | + 4,964 | + 6,238 | + 8,807 | + 16,554 | ∞ | − 14,554 | − 6,807 | − 4,238 | − 2,964 | − 2,208 | − 1,711 | − 1,3 |
| +140° | + 3,364 | + 3,649 | + 4,039 | + 4,595 | + 5,442 | + 6,870 | + 9,749 | + 18,431 | ∞ | − 16,431 | − 7,749 | − 4,870 | − 3,442 | − 2,595 | − 2,0 |
| +135° | + 3,364 | + 3,600 | + 3,914 | + 4,343 | + 4,955 | + 5,887 | + 7,457 | + 10,625 | + 20,176 | ∞ | − 18,176 | − 8,625 | − 5,457 | − 3,887 | − 2,9 |
| +130° | + 3,364 | + 3,560 | + 3,817 | + 4,157 | + 4,621 | + 5,284 | + 6,294 | + 7,995 | + 11,427 | + 21,773 | ∞ | − 19,773 | − 9,427 | − 5,995 | − 4, |
| +125° | + 3,364 | + 3,527 | + 3,738 | + 4,012 | + 4,376 | + 4,782 | + 5,581 | + 6,661 | + 8,480 | + 12,149 | + 23,214 | ∞ | − 21,214 | − 10,149 | − 6, |
| +120° | + 3,364 | + 3,499 | + 3,672 | + 3,895 | + 4,184 | + 4,569 | + 5,094 | + 5,843 | + 6,985 | + 8,908 | + 12,787 | + 24,485 | ∞ | − 22,485 | − 10, |
| +115° | + 3,364 | + 3,474 | + 3,615 | + 3,796 | + 4,029 | + 4,330 | + 4,735 | + 5,284 | + 6,069 | + 7,263 | + 9,276 | + 13,336 | + 25,578 | ∞ | − 23, |
| +110° | + 3,364 | + 3,451 | + 3,565 | + 3,711 | + 3,899 | + 4,141 | + 4,455 | + 4,872 | + 5,442 | + 6,255 | + 7,494 | + 9,581 | + 13,790 | + 26,483 | ∞ |
| +105° | + 3,364 | + 3,429 | + 3,519 | + 3,636 | + 3,787 | + 3,980 | + 4,229 | + 4,552 | + 4,980 | + 5,566 | + 6,402 | + 7,675 | + 9,821 | + 14,147 | + 27, |
| +100° | + 3,364 | + 3,410 | + 3,477 | + 3,568 | + 3,688 | + 3,842 | + 4,039 | + 4,292 | + 4,621 | + 5,058 | + 5,655 | + 6,508 | + 7,806 | + 9,993 | + 14, |
| + 95° | + 3,364 | + 3,391 | + 3,438 | + 3,506 | + 3,598 | + 3,719 | + 3,874 | + 4,073 | + 4,330 | + 4,663 | + 5,105 | + 5,709 | + 6,571 | + 7,884 | + 10, |
| + 90° | + 3,364 | + 3,373 | + 3,400 | + 3,447 | + 3,515 | + 3,608 | + 3,729 | + 3,885 | + 4,085 | + 4,342 | + 4,677 | + 5,121 | + 5,727 | + 6,593 | + 7, |
| + 85° | + 3,364 | + 3,355 | + 3,364 | + 3,391 | + 3,438 | + 3,506 | + 3,598 | + 3,719 | + 3,874 | + 4,073 | + 4,330 | + 4,663 | + 5,105 | + 5,709 | + 6 |
| + 80° | + 3,364 | + 3,337 | + 3,328 | + 3,337 | + 3,364 | + 3,410 | + 3,477 | + 3,568 | + 3,688 | + 3,842 | + 4,039 | + 4,292 | + 4,621 | + 5,058 | + 5 |
| + 75° | + 3,364 | + 3,318 | + 3,292 | + 3,283 | + 3,292 | + 3,318 | + 3,364 | + 3,429 | + 3,519 | + 3,636 | + 3,787 | + 3,980 | + 4,229 | + 4,552 | + 4 |
| + 70° | + 3,364 | + 3,299 | + 3,255 | + 3,230 | + 3,221 | + 3,230 | + 3,255 | + 3,299 | + 3,364 | + 3,451 | + 3,565 | + 3,711 | + 3,899 | + 4,141 | + 4 |
| + 65° | + 3,364 | + 3,280 | + 3,218 | + 3,175 | + 3,150 | + 3,142 | + 3,150 | + 3,175 | + 3,218 | + 3,280 | + 3,364 | + 3,474 | + 3,615 | + 3,796 | + 4 |
| + 60° | + 3,364 | + 3,258 | + 3,178 | + 3,119 | + 3,078 | + 3,055 | + 3,047 | + 3,055 | + 3,078 | + 3,119 | + 3,178 | + 3,258 | + 3,364 | + 3,499 | + 3 |
| + 55° | + 3,364 | + 3,236 | + 3,136 | + 3,060 | + 3,004 | + 2,966 | + 2,943 | + 2,936 | + 2,943 | + 2,966 | + 3,004 | + 3,060 | + 3,136 | + 3,236 | + 3 |
| + 50° | + 3,364 | + 3,210 | + 3,091 | + 2,998 | + 2,927 | + 2,874 | + 2,838 | + 2,818 | + 2,811 | + 2,818 | + 2,838 | + 2,874 | + 2,927 | + 2,998 | + 3 |
| + 45° | + 3,364 | + 3,182 | + 3,040 | + 2,930 | + 2,844 | + 2,779 | + 2,730 | + 2,697 | + 2,678 | + 2,671 | + 2,678 | + 2,697 | + 2,730 | + 2,779 | + 2 |
| + 40° | + 3,364 | + 3,149 | + 2,983 | + 2,855 | + 2,754 | + 2,676 | + 2,617 | + 2,573 | + 2,543 | + 2,525 | + 2,519 | + 2,525 | + 2,543 | + 2,573 | + 2 |
| + 35° | + 3,364 | + 3,109 | + 2,917 | + 2,770 | + 2,655 | + 2,565 | + 2,496 | + 2,443 | + 2,403 | + 2,377 | + 2,361 | + 2,356 | + 2,361 | + 2,377 | + 2 |
| + 30° | + 3,364 | + 3,060 | + 2,838 | + 2,671 | + 2,543 | + 2,443 | + 2,365 | + 2,304 | + 2,258 | + 2,223 | + 2,200 | + 2,186 | + 2,181 | + 2,186 | + 2 |
| + 25° | + 3,364 | + 2,998 | + 2,741 | + 2,554 | + 2,413 | + 2,304 | + 2,219 | + 2,153 | + 2,102 | + 2,063 | + 2,034 | + 2,014 | + 2,003 | + 1,999 | + 2 |
| + 20° | + 3,364 | + 2,913 | + 2,617 | + 2,409 | + 2,258 | + 2,143 | + 2,055 | + 1,987 | + 1,933 | + 1,892 | + 1,860 | + 1,837 | + 1,821 | + 1,811 | + 1 |
| + 15° | + 3,364 | + 2,789 | + 2,447 | + 2,223 | + 2,067 | + 1,952 | + 1,865 | + 1,799 | + 1,747 | + 1,706 | + 1,675 | + 1,651 | + 1,633 | + 1,621 | + 1 |
| + 10° | + 3,364 | + 2,586 | + 2,200 | + 1,971 | + 1,821 | + 1,716 | + 1,638 | + 1,580 | + 1,536 | + 1,501 | + 1,474 | + 1,453 | + 1,437 | + 1,426 | + 1 |
| + 5° | + 3,364 | + 2,186 | + 1,796 | + 1,602 | + 1,487 | + 1,412 | + 1,359 | + 1,320 | + 1,291 | + 1,269 | + 1,251 | + 1,238 | + 1,227 | + 1,219 | + 1 |
| 0° | unbestimmt | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + |
| | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° |

Beugungswinke

Aus der Tabelle ist nun zunächst ersichtlich, dass der grösste Theil der Verhältnisswerthe über $+1$ oder $-1$ hinausgeht, und dass für eine ganze Reihe von Werthepaaren $\psi$, $\varphi_1$ das Verhältniss sogar unendlich gross ausfällt. Ins Anschauliche übertragen heisst dies: die Fläche dehnt sich auf beiden Seiten der horizontalen Coordinatenebene sehr weit aus und erstreckt sich sogar an manchen Stellen ins Unendliche. Dies ist sehr unbequem, wenn man die Fläche dazu verwenden will, die Armhaltungen aufzusuchen, in denen

und des Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkt des Unterarmes.

$$v = \frac{21,65 \sin \varphi_1}{9,16 \sin(\varphi_1 + \psi)} + 1 .$$

des Ellbogengelenks.

| 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° | 135° | 140° | 145° | 150° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 0° |
| + 0,781 | + 0,787 | + 0,791 | + 0,793 | + 0,794 | + 0,793 | + 0,791 | + 0,787 | + 0,781 | + 0,773 | + 0,762 | + 0,749 | + 0,731 | + 0,709 | + 0,680 | + 0,641 | − 5° |
| + 0,547 | + 0,563 | + 0,574 | + 0,583 | + 0,588 | + 0,590 | + 0,588 | + 0,583 | + 0,574 | + 0,563 | + 0,547 | + 0,526 | + 0,499 | + 0,464 | + 0,420 | + 0,362 | − 10° |
| + 0,294 | + 0,325 | + 0,349 | + 0,367 | + 0,379 | + 0,386 | + 0,388 | + 0,386 | + 0,379 | + 0,367 | + 0,349 | + 0,325 | + 0,294 | + 0,253 | + 0,201 | + 0,135 | − 15° |
| + 0,013 | + 0,067 | + 0,108 | + 0,140 | + 0,163 | + 0,179 | + 0,189 | + 0,192 | + 0,189 | + 0,179 | + 0,163 | + 0,140 | + 0,108 | + 0,067 | + 0,013 | − 0,055 | − 20° |
| − 0,304 | − 0,219 | − 0,153 | − 0,102 | − 0,063 | − 0,034 | − 0,014 | − 0,003 | + 0,001 | − 0,003 | − 0,014 | − 0,034 | − 0,063 | − 0,102 | − 0,153 | − 0,219 | − 25° |
| − 0,671 | − 0,543 | − 0,443 | − 0,365 | − 0,304 | − 0,258 | − 0,223 | − 0,200 | − 0,186 | − 0,181 | − 0,186 | − 0,200 | − 0,223 | − 0,258 | − 0,304 | − 0,365 | − 30° |
| − 1,109 | − 0,917 | − 0,770 | − 0,655 | − 0,565 | − 0,496 | − 0,443 | − 0,403 | − 0,377 | − 0,361 | − 0,356 | − 0,361 | − 0,377 | − 0,403 | − 0,443 | − 0,496 | − 35° |
| − 1,649 | − 1,364 | − 1,149 | − 0,983 | − 0,855 | − 0,754 | − 0,676 | − 0,617 | − 0,573 | − 0,543 | − 0,525 | − 0,519 | − 0,525 | − 0,543 | − 0,573 | − 0,617 | − 40° |
| − 2,343 | − 1,914 | − 1,600 | − 1,364 | − 1,182 | − 1,040 | − 0,930 | − 0,844 | − 0,779 | − 0,730 | − 0,697 | − 0,678 | − 0,671 | − 0,678 | − 0,697 | − 0,730 | − 45° |
| − 3,284 | − 2,621 | − 2,157 | − 1,817 | − 1,560 | − 1,364 | − 1,210 | − 1,091 | − 0,998 | − 0,927 | − 0,874 | − 0,838 | − 0,818 | − 0,811 | − 0,818 | − 0,838 | − 50° |
| − 4,661 | − 3,581 | − 2,782 | − 2,376 | − 2,012 | − 1,738 | − 1,527 | − 1 364 | − 1,236 | − 1,136 | − 1,060 | − 1,004 | − 0,966 | − 0,943 | − 0,936 | − 0,943 | − 55° |
| − 6,908 | − 4,985 | − 3,843 | − 3,094 | − 2,569 | − 2,184 | − 1,895 | − 1,672 | − 1,499 | − 1,364 | − 1,258 | − 1,178 | − 1,119 | − 1,078 | − 1,055 | − 1,047 | − 60° |
| − 11,336 | − 7,276 | − 5,263 | − 4,069 | − 3,284 | − 2,735 | − 2,330 | − 2,029 | − 1,796 | − 1,615 | − 1,474 | − 1,364 | − 1,280 | − 1,218 | − 1,175 | − 1,150 | − 65° |
| − 24,483 | − 11,790 | − 7,581 | − 5,494 | − 4,255 | − 3,142 | − 2,872 | − 2,455 | − 2,141 | − 1,899 | − 1,711 | − 1,565 | − 1,451 | − 1,364 | − 1,299 | − 1,255 | − 70° |
| ∞ | − 25,194 | − 12,147 | − 7,821 | − 5,675 | − 4,402 | − 3,566 | − 2,980 | − 2,552 | − 2,229 | − 1,980 | − 1,787 | − 1,636 | − 1,519 | − 1,429 | − 1,364 | − 75° |
| + 27,706 | ∞ | − 25,706 | − 12,404 | − 7,993 | − 5,806 | − 4,508 | − 3,655 | − 3,058 | − 2,621 | − 2,292 | − 2,039 | − 1,842 | − 1,688 | − 1,568 | − 1,477 | − 80° |
| + 14,559 | + 28,015 | ∞ | − 26,015 | − 12,559 | − 8,097 | − 7,884 | − 4,571 | − 3,709 | − 3,105 | − 2,663 | − 2,330 | − 2,073 | − 1,874 | − 1,719 | − 1,598 | − 85° |
| + 10,132 | + 14,611 | + 28,118 | ∞ | − 26,118 | − 12,611 | − 8,132 | − 5,911 | − 4,593 | − 3,727 | − 3,121 | − 2,677 | − 2,342 | − 2,085 | − 1,885 | − 1,729 | − 90° |
| + 7,844 | + 10,097 | + 14,559 | + 28,015 | ∞ | − 26,015 | − 12,559 | − 8,097 | − 5,844 | − 4,571 | − 3,709 | − 3,105 | − 2,663 | − 2,330 | − 2,073 | − 1,874 | − 95° |
| + 6,508 | + 7,806 | + 9,993 | + 14,404 | + 27,706 | ∞ | − 25,706 | − 12,404 | − 7,993 | − 5,806 | − 4,508 | − 3,655 | − 3,058 | − 2,621 | − 2,292 | − 2,039 | −100° |
| + 5,566 | + 6,402 | + 7,675 | + 9,821 | + 14,147 | + 27,194 | ∞ | − 25,194 | − 12,147 | − 7,821 | − 5,675 | − 4,402 | − 3,566 | − 2,980 | − 2,552 | − 2,229 | −105° |
| + 4,872 | + 5,442 | + 6,255 | + 7,494 | + 9,581 | + 13,790 | + 26,483 | ∞ | − 24,483 | − 11,790 | − 7,581 | − 5,494 | − 4,255 | − 3,442 | − 2,872 | − 2,455 | −110° |
| + 4,330 | + 4,735 | + 5,284 | + 6,069 | + 7,263 | + 9,276 | + 13,336 | + 25,578 | ∞ | − 23,578 | − 11,336 | − 7,276 | − 5,263 | − 4,069 | − 3,284 | − 2,735 | −115° |
| + 3,895 | + 4,184 | + 4,569 | + 5,094 | + 5,843 | + 6,985 | + 8,908 | + 12,787 | + 24,485 | ∞ | − 22,485 | − 10,787 | − 6,908 | − 4,985 | − 3,843 | − 3,094 | −120° |
| + 3,527 | + 3,738 | + 4,012 | + 4,376 | + 4,782 | + 5,581 | + 6,661 | + 8,480 | + 12,149 | + 23,214 | ∞ | − 21,214 | − 10,149 | − 6,480 | − 4,661 | − 3,581 | −125° |
| + 3,210 | + 3,364 | + 3,560 | + 3,817 | + 4,157 | + 4,621 | + 5,284 | + 6,294 | + 7,995 | + 11,427 | + 21,773 | ∞ | − 19,773 | − 9,427 | − 5,995 | − 4,294 | −130° |
| + 2,930 | + 3,040 | + 3,182 | + 3,364 | + 3,600 | + 3,914 | + 4,343 | + 4,955 | + 5,887 | + 7,457 | + 10,625 | + 20,176 | ∞ | − 18,176 | − 8,625 | − 5,457 | −135° |
| + 2,676 | + 2,754 | + 2,855 | + 2,983 | + 3,149 | + 3,364 | + 3,649 | + 4,039 | + 4,595 | + 5,442 | + 6,870 | + 9,749 | + 18,431 | ∞ | − 16,431 | − 7,749 | −140° |
| + 2,443 | + 2,496 | + 2,565 | + 2,655 | + 2,770 | + 2,917 | + 3,109 | + 3,364 | + 3,711 | + 4,208 | + 4,964 | + 6,238 | + 8,807 | + 16,554 | ∞ | − 14,554 | −145° |
| + 2,223 | + 2,258 | + 2,304 | + 2,365 | + 2,443 | + 2,543 | + 2,671 | + 2,838 | + 3,060 | + 3,364 | + 3,796 | + 4,455 | + 5,566 | + 7,805 | + 14,559 | ∞ | −150° |
| + 2,014 | + 2,034 | + 2,063 | + 2,102 | + 2,153 | + 2,219 | + 2,304 | + 2,413 | + 2,554 | + 2,741 | + 2,998 | + 3,364 | + 3,921 | + 4,859 | + 6,752 | + 12,461 | −155° |
| + 1,811 | + 1,821 | + 1,837 | + 1,860 | + 1,892 | + 1,933 | + 1,987 | + 2,055 | + 2,143 | + 2,258 | + 2,409 | + 2,617 | + 2,913 | + 3,364 | + 4,123 | + 5,655 | −160° |
| + 1,612 | + 1,614 | + 1,621 | + 1,633 | + 1,651 | + 1,675 | + 1,706 | + 1,747 | + 1,799 | + 1,865 | + 1,952 | + 2,067 | + 2,223 | + 2,447 | + 2,789 | + 3,364 | −165° |
| + 1,412 | + 1,410 | + 1,412 | + 1,417 | + 1,426 | + 1,437 | + 1,453 | + 1,474 | + 1,501 | + 1,536 | + 1,580 | + 1,638 | + 1,716 | + 1,821 | + 1,971 | + 2,200 | −170° |
| + 1,209 | + 1,207 | + 1,206 | + 1,207 | + 1,209 | + 1,213 | + 1,219 | + 1,227 | + 1,238 | + 1,251 | + 1,269 | + 1,291 | + 1,320 | + 1,359 | + 1,412 | + 1,487 | −175° |
| +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | −180° |
| 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° | 135° | 140° | 145° | 150° | |

Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenks (Drehung nach hinten oder Streckung).

es Ellbogengelenks.

ein Muskel der Schwere Gleichgewicht zu halten vermag. Es empfiehlt sich daher, den Theil der Fläche, welcher Werthen von $v$ entspricht, die grösser als + 1 oder kleiner als − 1 sind, durch eine andere mit der Fläche sehr nahe verwandte Fläche zu ersetzen. Wenn $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$, abgesehen vom Vorzeichen, grösser wie 1 ist, so ist der reciproke Werth $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}}$ natürlich kleiner wie 1. Denkt man sich

daher eine Fläche construirt, welche die Abhängigkeit des reciproken Verhältnisses $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}}$ oder $v'$ von $\psi$ und $\varphi_1$ veranschaulicht, und die in Folge dessen durch die Formel $v' = \frac{1}{v}$ oder

$$v' = \frac{c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}{c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \sin(\varphi_1 + \psi)}$$

dargestellt ist, so wird diese Fläche an allen den Stellen in der Nähe der horizontalen Coordinatenebene bleiben, an welchen jene weit von derselben abliegt. Beide Flächen werden sich in zwei Curven durchschneiden; für die eine Curve ist die verticale Coordinate durchweg gleich $+1$, für die andere hat dieselbe den Werth $-1$; denn wenn $v = +1$, so ist auch $\frac{1}{v}$ oder $v' = +1$, und wenn $v = -1$ ist, so besitzt auch $\frac{1}{v}$ oder $v'$ den Werth $-1$. Hat man den Verhältnisswerth 1 durch eine Länge von 1 Decimeter dargestellt, so werden demnach beide Schnittcurven in Ebenen liegen, welche zur horizontalen Coordinatenebene parallel laufen; die eine wird in der positiven Richtung der verticalen Axe (Axe der $v$ oder $v'$), die andere dagegen in der entgegengesetzten Richtung um 1 Decimeter von der horizontalen Coordinatenebene abstehen, so dass die beiden Ebenen selbst eine Entfernung von 2 Decimetern besitzen.

Verwendet man von beiden Flächen nur die Stücke, welche in den zwischen diesen beiden Ebenen liegenden Raum hineinfallen, so erhält man ebenfalls eine zusammenhängende Fläche, welche dazu dienen kann, die Abhängigkeit des aus $\overline{RG}$ und $\overline{R\mathfrak{G}}$ gebildeten Verhältnisses von den Gelenkwinkeln $\psi$ und $\varphi_1$ zu veranschaulichen. Dieselbe giebt direct entweder den Werth von $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ oder den Werth von $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}}$ durch ihre verticale Coordinate an, je nachdem $\overline{RG} < \overline{R\mathfrak{G}}$ oder $\overline{RG} > \overline{R\mathfrak{G}}$ ist. Wenn auch die aus Stücken verschiedener Flächen zusammengesetzte Fläche vollständig zusammenhängend ist, so kann man an derselben doch deutlich die Grenzen der einzelnen Stücke unterscheiden; dieselben stellen scharfe Kanten dar, welche entweder in der einen oder in der anderen der beiden zur horizontalen Coordinatenebene im Abstand von 1 Decimeter parallelen Ebene liegen.

Es ist leicht zu ersehen, dass die Fläche aus zwei congruenten Theilen bestehen muss; denn die Werthe von $v$ und $v'$ ändern sich nicht, wenn man den Winkel $\varphi_1$ um $180°$ vermehrt oder vermindert. Es nehmen dann zwar $\sin\varphi_1$ und $\sin(\varphi_1 + \psi)$ entgegengesetzt gleiche Werthe an, aber der Werth des Quotienten wird hierdurch nicht geändert, weil Zähler und Nenner gleichzeitig entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Es werden daher beispielsweise $v$ und $v'$ für $\psi = 35°$; $\varphi_1 = +65°$ dieselben Werthe annehmen als für $\psi = 35°$; $\varphi_1 = = -115°$; denn es ist bei

$$\psi = 35°, \quad \varphi_1 = 65°$$

$$v = \frac{c_1 \sin 65°}{c_2 \sin 100°} + 1 = \frac{c_1 \sin 65°}{c_2 \sin 80°} + 1,$$

und gleichzeitig ist für

$$\psi = 35°, \quad \varphi_1 = -115°$$

$$v = \frac{c_1 \sin(-115°)}{c_2 \sin(-80°)} + 1 = \frac{-c_1 \sin 65°}{-c_2 \sin 80°} + 1 = \frac{c_1 \sin 65°}{c_2 \sin 80°} + 1$$

also ebenso gross. Das Gleiche gilt natürlich für das reciproke Verhältniss $v'$.

In Anbetracht dieser Thatsache kann man sich die Construction der Hälfte der Fläche ersparen. Wenn man die Werthe von $v$ und $v'$ für alle möglichen Combinationen von

$$\psi = 0°, \ \psi = 5°, \ \psi = 10° \ \ldots \ \psi = 150° \quad \text{und}$$
$$\varphi_1 = 0°, \ \varphi_1 = +5°, \ \varphi_1 = +10° \ \ldots \ \varphi_1 = +180°$$

berechnet hat, so hat man damit zugleich die Werthe von $v$ und $v'$ für alle möglichen Combinationen von

$$\psi = 0°, \ \psi = 5°, \ \psi = 10° \ \ldots \ \psi = 150° \quad \text{und}$$
$$\varphi_1 = -180°, \ \varphi_1 = -175°, \ \varphi_1 = -170° \ \ldots \ \varphi_1 = 0°$$

gewonnen. Von dieser Thatsache ist sowohl in der Tabelle für die Werthe von $v$ auf den Seiten 350 und 351 als auch in der folgenden gemischten Tabelle auf den Seiten 354 und 355 Gebrauch gemacht, wie man aus den Winkelwerthen der vordersten und hintersten verticalen Spalte erkennt.

Um die gemischte Fläche zeichnen zu können, ist es nöthig, die Werthe von $v'$ für alle die Fälle zu berechnen, in denen sich $v > +1$ oder $< -1$ herausgestellt hat. Für diese Berechnung kann man

nun ohne Weiteres von der Tabelle auf den Seiten 350 und 351 ausgehen; man braucht nur für alle Zahlen dieser Tabelle, deren absoluter Werth grösser als 1 ist, den reciproken Werth auszurechnen. Die Resultate dieser Rechnung finden sich in der folgenden Tabelle

Werthe des Verhältnisses $v = \frac{\overline{RG}}{R\mathfrak{G}}$ oder des reciproken Verhä

(Die über dem dicken Strich stehenden Zahlen si

Beugungswinkel

| Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenks (Drehung nach vorn oder Beugung). | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +180° | unbestimmt | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| +175° | + 0,297 | 0 | − 0,733 | − 0,186 | + 0,204 | + 0,398 | + 0,513 | + 0,588 | + 0,641 | + 0,680 | + 0,709 | + 0,731 | + 0,749 | + 0,762 | + 0,7 |
| +170° | + 0,297 | + 0,175 | 0 | − 0,270 | − 0,733 | − 0,586 | − 0,200 | + 0,029 | + 0,179 | + 0,284 | + 0,362 | + 0,420 | + 0,464 | + 0,499 | + 0,5 |
| +165° | + 0,297 | + 0,221 | + 0,125 | 0 | − 0,166 | − 0,396 | − 0,733 | − 0,789 | − 0,447 | − 0,223 | − 0,067 | + 0,048 | + 0,135 | + 0,201 | + 0,2 |
| +160° | + 0,297 | + 0,243 | + 0,177 | + 0,097 | 0 | − 0,121 | − 0,274 | − 0,471 | − 0,733 | − 0,913 | − 0,617 | − 0,409 | − 0,258 | − 0,143 | − 0,0 |
| +155° | + 0,297 | + 0,255 | + 0,206 | + 0,148 | + 0,080 | 0 | − 0,096 | − 0,210 | − 0,350 | − 0,521 | − 0,733 | − 0,998 | − 0,741 | − 0,554 | − 0,1 |
| +150° | + 0,297 | + 0,263 | + 0,224 | + 0,180 | + 0,128 | + 0,069 | 0 | − 0,080 | − 0,172 | − 0,280 | − 0,407 | − 0,557 | − 0,733 | − 0,943 | − 0,8 |
| +145° | + 0,297 | + 0,269 | + 0,238 | + 0,201 | + 0,160 | + 0,114 | + 0,060 | 0 | − 0,069 | − 0,147 | − 0,236 | − 0,337 | − 0,453 | − 0,584 | − 0,7 |
| +140° | + 0,297 | + 0,274 | + 0,248 | + 0,218 | + 0,184 | + 0,146 | + 0,103 | + 0,054 | 0 | − 0,061 | − 0,129 | − 0,205 | − 0,291 | − 0,385 | − 0,4 |
| +135° | + 0,297 | + 0,277 | + 0,255 | + 0,230 | + 0,202 | + 0,170 | + 0,134 | + 0,094 | + 0,050 | 0 | − 0,055 | − 0,116 | − 0,183 | − 0,257 | − 0,3 |
| +130° | + 0,297 | + 0,281 | + 0,262 | + 0,241 | + 0,216 | + 0,189 | + 0,159 | + 0,125 | + 0,088 | + 0,046 | 0 | − 0,051 | − 0,106 | − 0,167 | − 0,2 |
| +125° | + 0,297 | + 0,284 | + 0,268 | + 0,249 | + 0,229 | + 0,209 | + 0,179 | + 0,150 | + 0,118 | + 0,082 | + 0,043 | 0 | − 0,047 | − 0,099 | − 0,1 |
| +120° | + 0,297 | + 0,286 | + 0,272 | + 0,257 | + 0,239 | + 0,219 | + 0,196 | + 0,171 | + 0,143 | + 0,112 | + 0,078 | + 0,041 | 0 | − 0,044 | − 0,0 |
| +115° | + 0,297 | + 0,288 | + 0,277 | + 0,263 | + 0,248 | + 0,231 | + 0,211 | + 0,189 | + 0,165 | + 0,138 | + 0,108 | + 0,075 | + 0,039 | 0 | − 0,0 |
| +110° | + 0,297 | + 0,290 | + 0,280 | + 0,269 | + 0,256 | + 0,241 | + 0,224 | + 0,205 | + 0,184 | + 0,160 | + 0,133 | + 0,104 | + 0,073 | + 0,038 | 0 |
| +105° | + 0,297 | + 0,292 | + 0,284 | + 0,275 | + 0,264 | + 0,251 | + 0,236 | + 0,220 | + 0,201 | + 0,180 | + 0,156 | + 0,130 | + 0,102 | + 0,071 | + 0,0 |
| +100° | + 0,297 | + 0,293 | + 0,288 | + 0,280 | + 0,271 | + 0,260 | + 0,248 | + 0,233 | + 0,216 | + 0,198 | + 0,177 | + 0,154 | + 0,128 | + 0,100 | + 0,0 |
| + 95° | + 0,297 | + 0,295 | + 0,291 | + 0,285 | + 0,278 | + 0,269 | + 0,258 | + 0,246 | + 0,231 | + 0,215 | + 0,196 | + 0,175 | + 0,152 | + 0,127 | + 0,0 |
| + 90° | + 0,297 | + 0,296 | + 0,294 | + 0,290 | + 0,284 | + 0,277 | + 0,268 | + 0,257 | + 0,245 | + 0,230 | + 0,214 | + 0,195 | + 0,175 | + 0,152 | + 0,1 |
| + 85° | + 0,297 | + 0,298 | + 0,297 | + 0,295 | + 0,291 | + 0,285 | + 0,278 | + 0,269 | + 0,258 | + 0,246 | + 0,231 | + 0,214 | + 0,196 | + 0,175 | + 0,1 |
| + 80° | + 0,297 | + 0,300 | + 0,300 | + 0,300 | + 0,297 | + 0,293 | + 0,288 | + 0,280 | + 0,271 | + 0,260 | + 0,248 | + 0,233 | + 0,216 | + 0,198 | + 0,1 |
| + 75° | + 0,297 | + 0,301 | + 0,304 | + 0,305 | + 0,304 | + 0,301 | + 0,297 | + 0,292 | + 0,284 | + 0,275 | + 0,264 | + 0,251 | + 0,236 | + 0,220 | + 0,2 |
| + 70° | + 0,297 | + 0,303 | + 0,307 | + 0,310 | + 0,310 | + 0,310 | + 0,307 | + 0,303 | + 0,297 | + 0,290 | + 0,281 | + 0,269 | + 0,256 | + 0,241 | + 0,2 |
| + 65° | + 0,297 | + 0,305 | + 0,311 | + 0,315 | + 0,317 | + 0,318 | + 0,317 | + 0,315 | + 0,311 | + 0,305 | + 0,297 | + 0,288 | + 0,277 | + 0,263 | + 0,2 |
| + 60° | + 0,297 | + 0,307 | + 0,315 | + 0,321 | + 0,325 | + 0,327 | + 0,328 | + 0,327 | + 0,325 | + 0,321 | + 0,315 | + 0,307 | + 0,297 | + 0,286 | + 0,2 |
| + 55° | + 0,297 | + 0,309 | + 0,319 | + 0,327 | + 0,333 | + 0,337 | + 0,340 | + 0,341 | + 0,340 | + 0,337 | + 0,333 | + 0,327 | + 0,319 | + 0,309 | + 0,2 |
| + 50° | + 0,297 | + 0,312 | + 0,324 | + 0,334 | + 0,342 | + 0,348 | + 0,352 | + 0,355 | + 0,356 | + 0,355 | + 0,352 | + 0,348 | + 0,342 | + 0,334 | + 0,3 |
| + 45° | + 0,297 | + 0,314 | + 0,329 | + 0,341 | + 0,352 | + 0,360 | + 0,366 | + 0,371 | + 0,373 | + 0,374 | + 0,373 | + 0,371 | + 0,366 | + 0,360 | + 0,3 |
| + 40° | + 0,297 | + 0,318 | + 0,335 | + 0,350 | + 0,363 | + 0,374 | + 0,382 | + 0,389 | + 0,393 | + 0,396 | + 0,397 | + 0,396 | + 0,393 | + 0,389 | + 0,3 |
| + 35° | + 0,297 | + 0,322 | + 0,343 | + 0,361 | + 0,377 | + 0,390 | + 0,401 | + 0,409 | + 0,416 | + 0,421 | + 0,424 | + 0,424 | + 0,424 | + 0,421 | + 0,4 |
| + 30° | + 0,297 | + 0,327 | + 0,352 | + 0,374 | + 0,393 | + 0,409 | + 0,423 | + 0,434 | + 0,443 | + 0,450 | + 0,455 | + 0,457 | + 0,459 | + 0,457 | + 0,4 |
| + 25° | + 0,297 | + 0,334 | + 0,365 | + 0,392 | + 0,414 | + 0,434 | + 0,451 | + 0,464 | + 0,476 | + 0,485 | + 0,492 | + 0,497 | + 0,499 | + 0,500 | + 0,4 |
| + 20° | + 0,297 | + 0,343 | + 0,382 | + 0,415 | + 0,443 | + 0,467 | + 0,487 | + 0,503 | + 0,517 | + 0,529 | + 0,538 | + 0,544 | + 0,549 | + 0,552 | + 0,5 |
| + 15° | + 0,297 | + 0,359 | + 0,409 | + 0,450 | + 0,484 | + 0,512 | + 0,536 | + 0,556 | + 0,572 | + 0,586 | + 0,597 | + 0,606 | + 0,612 | + 0,617 | + 0,6 |
| + 10° | + 0,297 | + 0,387 | + 0,455 | + 0,507 | + 0,549 | + 0,583 | + 0,610 | + 0,633 | + 0,651 | + 0,666 | + 0,678 | + 0,688 | + 0,696 | + 0,701 | + 0,7 |
| + 5° | + 0,297 | + 0,457 | + 0,557 | + 0,624 | + 0,672 | + 0,708 | + 0,736 | + 0,758 | + 0,775 | + 0,788 | + 0,799 | + 0,808 | + 0,815 | + 0,820 | + 0,8 |
| 0° | unbestimmt | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | 1 | + 1 | + 1 |
| | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° |

Beugungswinkel

niedergelegt. Dieselbe ist aus allen Werthen von $v$ und $v'$ gemischt, welche zwischen $+1$ und $-1$ liegen. Die oberhalb des dicken gezackten Striches stehenden Zahlen sind Werthe von $v$, die unterhalb desselben stehenden Werthe von $v'$.

…isses $v' = \frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}}$, je nachdem $\overline{RG} < \overline{R\mathfrak{G}}$ oder $\overline{RG} > \overline{R\mathfrak{G}}$ ist.

…Werthe von $v$, die unter demselben Werthe von $v'$.)

…es Ellbogengelenks.

| 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° | 135° | 140° | 145° | 150° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 0° |
| +0,781 | +0,787 | +0,791 | +0,793 | +0,794 | +0,793 | +0,791 | +0,787 | +0,781 | +0,773 | +0,762 | +0,749 | +0,731 | +0,709 | +0,680 | +0,641 | − 5° |
| +0,547 | +0,563 | +0,574 | +0,583 | +0,588 | +0,590 | +0,588 | +0,583 | +0,574 | +0,563 | +0,547 | +0,526 | +0,499 | +0,464 | +0,420 | +0,362 | − 10° |
| +0,294 | +0,325 | +0,349 | +0,367 | +0,379 | +0,386 | +0,388 | +0,386 | +0,379 | +0,367 | +0,349 | +0,325 | +0,294 | +0,253 | +0,201 | +0,135 | − 15° |
| +0,013 | +0,067 | +0,108 | +0,140 | +0,163 | +0,179 | +0,189 | +0,192 | +0,189 | +0,179 | +0,163 | +0,140 | +0,108 | +0,067 | +0,013 | −0,055 | − 20° |
| −0,304 | −0,219 | −0,153 | −0,102 | −0,063 | −0,034 | −0,014 | −0,003 | +0,001 | −0,003 | −0,014 | −0,034 | −0,063 | −0,102 | −0,153 | −0,219 | − 25° |
| −0,671 | −0,543 | −0,443 | −0,365 | −0,304 | −0,258 | −0,223 | −0,200 | −0,186 | −0,181 | −0,186 | −0,200 | −0,223 | −0,258 | −0,304 | −0,365 | − 30° |
| −0,902 | −0,917 | −0,770 | −0,655 | −0,565 | −0,496 | −0,143 | −0,403 | −0,377 | −0,361 | −0,356 | −0,361 | −0,377 | −0,403 | −0,443 | −0,496 | − 35° |
| −0,606 | −0,733 | −0,870 | −0,983 | −0,855 | −0,754 | −0,676 | −0,617 | −0,573 | −0,543 | −0,525 | −0,519 | −0,525 | −0,543 | −0,573 | −0,617 | − 40° |
| −0,427 | −0,522 | −0,625 | −0,733 | −0,846 | −0,962 | −0,930 | −0,844 | −0,779 | −0,730 | −0,697 | −0,678 | −0,671 | −0,678 | −0,697 | −0,730 | − 45° |
| −0,305 | −0,382 | −0,464 | −0,550 | −0,641 | −0,733 | −0,826 | −0,917 | −0,998 | −0,927 | −0,874 | −0,838 | −0,818 | −0,811 | −0,818 | −0,838 | − 50° |
| −0,215 | −0,279 | −0,350 | −0,421 | −0,497 | −0,575 | −0,655 | −0,733 | −0,809 | −0,880 | −0,943 | −0,996 | −0,966 | −0,943 | −0,936 | −0,943 | − 55° |
| −0,145 | −0,201 | −0,260 | −0,323 | −0,390 | −0,458 | −0,528 | −0,598 | −0,667 | −0,733 | −0,795 | −0,849 | −0,893 | −0,928 | −0,948 | −0,955 | − 60° |
| −0,088 | −0,137 | −0,190 | −0,246 | −0,305 | −0,366 | −0,429 | −0,493 | −0,557 | −0,619 | −0,678 | −0,733 | −0,781 | −0,821 | −0,851 | −0,869 | − 65° |
| −0,041 | −0,085 | −0,132 | −0,182 | −0,235 | −0,291 | −0,348 | −0,407 | −0,467 | −0,526 | −0,584 | −0,639 | −0,689 | −0,733 | −0,770 | −0,797 | − 70° |
| 0 | −0,040 | −0,082 | −0,128 | −0,176 | −0,227 | −0,280 | −0,336 | −0,392 | −0,449 | −0,505 | −0,560 | −0,611 | −0,658 | −0,700 | −0,733 | − 75° |
| +0,036 | 0 | −0,039 | −0,081 | −0,125 | −0,172 | −0,222 | −0,274 | −0,327 | −0,382 | −0,436 | −0,491 | −0,543 | −0,592 | −0,638 | −0,677 | − 80° |
| +0,069 | +0,036 | 0 | −0,038 | −0,080 | −0,124 | −0,171 | −0,219 | −0,270 | −0,322 | −0,376 | −0,429 | −0,482 | −0,534 | −0,582 | −0,626 | − 85° |
| +0,099 | +0,068 | +0,036 | 0 | −0,038 | −0,079 | −0,123 | −0,169 | −0,218 | −0,268 | −0,320 | −0,374 | −0,427 | −0,480 | −0,530 | −0,578 | − 90° |
| +0,127 | +0,099 | +0,069 | +0,036 | 0 | −0,038 | −0,080 | −0,124 | −0,171 | −0,219 | −0,270 | −0,322 | −0,376 | −0,429 | −0,482 | −0,534 | − 95° |
| +0,154 | +0,128 | +0,100 | +0,069 | +0,036 | 0 | −0,039 | −0,081 | −0,125 | −0,172 | −0,222 | −0,274 | −0,327 | −0,382 | −0,436 | −0,491 | −100° |
| +0,180 | +0,156 | +0,130 | +0,102 | +0,071 | +0,037 | 0 | −0,040 | −0,082 | −0,128 | −0,176 | −0,227 | −0,280 | −0,336 | −0,392 | −0,449 | −105° |
| +0,205 | +0,184 | +0,160 | +0,133 | +0,104 | +0,073 | +0,038 | 0 | −0,041 | −0,085 | −0,132 | −0,182 | −0,235 | −0,291 | −0,348 | −0,407 | −110° |
| +0,231 | +0,211 | +0,189 | +0,165 | +0,138 | +0,108 | +0,075 | +0,039 | 0 | −0,042 | −0,088 | −0,137 | −0,190 | −0,246 | −0,305 | −0,366 | −115° |
| +0,257 | +0,239 | +0,219 | +0,196 | +0,171 | +0,143 | +0,112 | +0,078 | +0,041 | 0 | −0,044 | −0,093 | −0,145 | −0,201 | −0,260 | −0,323 | −120° |
| +0,284 | +0,268 | +0,249 | +0,229 | +0,209 | +0,179 | +0,150 | +0,118 | +0,082 | +0,043 | 0 | −0,047 | −0,099 | −0,154 | −0,215 | −0,279 | −125° |
| +0,312 | +0,297 | +0,281 | +0,262 | +0,241 | +0,216 | +0,189 | +0,159 | +0,125 | +0,088 | +0,046 | 0 | −0,051 | −0,106 | −0,167 | −0,233 | −130° |
| +0,341 | +0,329 | +0,314 | +0,297 | +0,277 | +0,255 | +0,230 | +0,202 | +0,170 | +0,134 | +0,094 | +0,050 | 0 | −0,055 | −0,116 | −0,183 | −135° |
| +0,374 | +0,363 | +0,350 | +0,335 | +0,318 | +0,297 | +0,274 | +0,248 | +0,218 | +0,184 | +0,146 | +0,103 | +0,054 | 0 | −0,061 | −0,129 | −140° |
| +0,409 | +0,401 | +0,390 | +0,377 | +0,361 | +0,343 | +0,322 | +0,297 | +0,269 | +0,238 | +0,201 | +0,160 | +0,114 | +0,060 | 0 | −0,069 | −145° |
| +0,450 | +0,443 | +0,434 | +0,423 | +0,409 | +0,393 | +0,374 | +0,352 | +0,327 | +0,297 | +0,263 | +0,224 | +0,180 | +0,128 | +0,069 | 0 | −150° |
| +0,497 | +0,492 | +0,485 | +0,476 | +0,464 | +0,451 | +0,434 | +0,414 | +0,392 | +0,365 | +0,334 | +0,297 | +0,255 | +0,206 | +0,148 | +0,080 | −155° |
| +0,552 | +0,549 | +0,544 | +0,538 | +0,529 | +0,517 | +0,503 | +0,487 | +0,467 | +0,443 | +0,415 | +0,382 | +0,343 | +0,297 | +0,243 | +0,177 | −160° |
| +0,620 | +0,620 | +0,617 | +0,612 | +0,606 | +0,597 | +0,586 | +0,572 | +0,556 | +0,536 | +0,512 | +0,484 | +0,450 | +0,409 | +0,359 | +0,297 | −165° |
| +0,708 | +0,709 | +0,708 | +0,706 | +0,701 | +0,696 | +0,688 | +0,678 | +0,666 | +0,651 | +0,633 | +0,610 | +0,583 | +0,549 | +0,507 | +0,455 | −170° |
| +0,827 | +0,829 | +0,829 | +0,829 | +0,827 | +0,824 | +0,820 | +0,815 | +0,808 | +0,799 | +0,788 | +0,775 | +0,758 | +0,736 | +0,708 | +0,672 | −175° |
| +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | −180° |
| 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° | 135° | 140° | 145° | 150° | |

Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenks (Drehung nach hinten oder Streckung).

…s Ellbogengelenks.

Diese Tabelle giebt nun direct die Unterlagen zur Construction der gemischten Fläche. Man erkennt sofort, dass dieselbe aus zwei ungleich grossen Stücken zusammengesetzt ist, und dass das grössere Stück zu dem reciproken Verhältniss $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}}$ oder $v'$ gehört.

Um eine Anschauung von dieser Fläche zu vermitteln, ist dieselbe auf Tafel III in axonometrischer Projection aufgezeichnet worden. Damit man an der Zeichnung direct die Werthe des Verhältnisses $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ bezüglich des Verhältnisses $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}}$ abmessen kann, sind die verticalen Coordinaten, welche bei dieser Art der Projection ebenso wie die anderen beiden Coordinaten etwas verkürzt erscheinen müssten, in unverkürzter Länge aufgezeichnet worden. Die ganze Fläche liegt in einem geraden Prisma eingeschlossen, dessen rechteckige Grundfläche 150 Millimeter breit und 180 Millimeter lang ist (entsprechend dem Spielraum der Winkel $\psi$ und $\varphi_1$ von 0° bis 150° und 0° bis 180°), und dessen Höhe 2 Decimeter beträgt. Die beiden Stücke, aus denen die Fläche zusammengesetzt ist, und welche in der Grundfläche dieses Prismas in einer scharfen Kante aneinandergrenzen, sind deutlich zu erkennen. Der hintere, schmälere und gleichmässigere Theil gehört zu dem Verhältniss $v$ oder $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$, der vordere, ausgedehntere und unregelmässiger gestaltete Theil zu dem Verhältniss $v'$ oder $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}}$.

In halber Höhe des die Fläche einschliessenden Prismas befindet sich die horizontale Coordinatenebene, in welche ein Coordinatennetz von 5 Millimeter (5°) Maschenweite eingezeichnet ist, um alle die Armhaltungen durch die Knotenpunkte des Netzes festzulegen, für welche sich in der Tabelle auf den Seiten 354 und 355 die Werthe von $v$ bezüglich $v'$ berechnet finden. Um die Fläche überhaupt sichtbar zu machen, ist auch auf diese ein ganz entsprechendes Coordinatennetz aufgezeichnet, von dem das ebene Coordinatennetz die Horizontalprojection darstellt. Dieses auf der Fläche liegende Coordinatennetz kann auf folgende Weise construirt werden: Man denke sich durch alle Geraden des ebenen Coordinatennetzes Verticalebenen gelegt, dann wird eine jede dieser Verticalebenen

die Fläche in einer Curve schneiden. Alle diese Schnittcurven bilden zusammen das Coordinatennetz auf der Fläche. Dabei gehört zu jedem Knotenpunkte des Flächennetzes ein ganz bestimmter Knotenpunkt des ebenen Coordinatennetzes. Die Maasszahl für die Entfernung zweier entsprechender Knotenpunkte der Fläche und Coordinatenebene giebt dann direct den Werth des Verhältnisses $v$ bezüglich $v'$ an, welcher zu der durch die Lage der Knotenpunkte in den beiden Coordinatennetzen bestimmten Armhaltung gehört, vorausgesetzt, dass man diese Knotenpunktsentfernung in Decimetern misst. In der Figur auf Tafel III finden sich für drei Beispiele diese Strecken besonders eingezeichnet.

So ergiebt sich als Entfernung der beiden zum Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenkes von 10° und dem Drehungswinkel $\varphi_1$ im Schultergelenk von $+ 90°$ oder $- 90°$ gehörenden Knotenpunkte der Fläche und der horizontalen Coordinatenebene durch Messung am Original 0,294 Decimeter. Beachtet man, dass der Knotenpunkt des Flächennetzes auf dem zu $v'$ gehörenden Theile der Fläche und zugleich über der horizontalen Coordinatenebene liegt, so ergiebt sich durch diese Messung

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } \psi = 10°;\ \varphi_1 = +\,90° \\ \text{oder } \psi = 10°;\ \varphi_1 = -\,90°\end{array}\right\}\ \text{der Werth } v' = \frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}} = +\,0{,}294,$$

was mit dem Werth in der Tabelle auf den Seiten 354 und 355 vollständig übereinstimmt.

Weiterhin findet man in der Zeichnung der Fläche besonders hervorgehoben, dass

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } \psi = 50°;\ \varphi_1 = +\,20° \\ \text{oder } \psi = 50°;\ \varphi_1 = -\,160°\end{array}\right\}\ v' = \frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}} = +\,0{,}538$$

und

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } \psi = 130°;\ \varphi_1 = +\,145° \\ \text{oder } \psi = 130°;\ \varphi_1 = -\,35°\end{array}\right\}\ v = \frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}} = -\,0{,}361,$$

wobei besonders zu beachten ist, dass es sich in dem dritten Beispiel um den Werth von $v$ selbst handelt.

Diese wenigen Beispiele werden deutlich erkennen lassen, dass die Projection der Fläche auf Tafel III nicht blos einen Ueberblick

über die Abhängigkeit der Verhältnisse $v$, $v'$ von den Gelenkwinkeln $\psi$, $\varphi_1$ gewährt, sondern dass dieselbe auch gewissermaassen die Tabelle auf den Seiten 354 und 355 zu ersetzen im Stande ist, indem man direct an der Zeichnung, so weit sie durchsichtig genug ist, die Werthe der Verhältnisse $\frac{\overline{RG}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ oder $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{RG}}$, je nachdem $\overline{RG} < \overline{R\mathfrak{G}}$ oder $\overline{RG} > \overline{R\mathfrak{G}}$ ist, abmessen kann.

Da der Verlauf der Fläche bei einer einzigen Projection nicht an allen Stellen gleich gut zu erkennen ist, so ist es nothwendig, sich noch andere Projectionen derselben, oder richtiger gesagt des Coordinatennetzes auf derselben zu verschaffen.

Die Orthogonalprojection des Flächennetzes auf die horizontale Coordinatenebene ($\varphi_1\,\psi$-Ebene) ergiebt, wie schon hervorgehoben ist, das horizontale, aus geraden Linien zusammengesetzte, gleichmässige Coordinatennetz. Dagegen geben die Orthogonalprojectionen auf die beiden anderen Coordinatenebenen Netze, bei denen nur die Linien der einen Art Gerade sind, während die der anderen Art Curven darstellen. Bezeichnet man die eine horizontale Coordinatenaxe kurz als $\varphi_1$-Axe, die andere als $\psi$-Axe und die verticale Coordinatenaxe als $v$-Axe, so kann man die eine der beiden verticalen Coordinatenebenen kurz $\varphi_1 v$-Ebene und die andere $\psi v$-Ebene nennen. Auf Tafel IV sind die Projectionen des Flächennetzes auf diese beiden verticalen Coordinatenebenen aufgezeichnet worden. In der ersten Projection erscheinen die zur $\psi v$-Ebene parallelen Curven, in der zweiten die zur $\varphi_1 v$-Ebene parallelen Curven des Flächennetzes als gerade (verticale) Linien.

Mit Hülfe dieser beiden Projectionen kommt man leicht zu einer noch deutlicheren Vorstellung von der Gestalt der Fläche, als dies durch eine einzige axonometrische Projection ermöglicht werden kann. Man hat dabei nur im Auge zu behalten, dass die Projection auf die $\varphi_1 v$-Ebene eine Ansicht der Fläche in der Richtung der $\psi$-Axe und die Projection eine Ansicht derselben in der Richtung der $\varphi_1$-Axe, beide mal aus unendlicher Ferne, darstellt.

Endlich kann man sich noch durch eine dritte Art der Darstellung eine Anschauung von der Fläche verschaffen, welche sich für manche Verwendungen der Fläche als besonders zweckmässig erweist. Dies

ist die in der Topographie in ausgedehntestem Maasse angewendete Darstellung einer Fläche durch Niveaulinien.

Man denke sich die Fläche durch eine Anzahl horizontaler Ebenen durchschnitten, welche alle gleichweit, etwa 0,1 dm von einander entfernt sind. Dann erhält man ein System von Linien auf der Fläche, welche durchweg Punkte mit einander verbinden, die sich in gleichem Abstand über oder unter der horizontalen Corordinatenebene befinden. Diese Linien sollen kurz den Namen »Niveaulinien« der Fläche führen. Genau genommen sind diese Linien der Art nach nicht verschieden von der einen oder anderen Schaar von Curven, welche das schon in Betracht gezogene Coordinatennetz auf der Fläche bildeten; jene waren nur durch Schnitte mit gleich weit von einander abstehenden Verticalebenen entstanden.

Die Projection der Niveaulinien auf die horizontale Coordinatenebene, welche auf Tafel V dargestellt worden ist, giebt eine deutliche Anschauung davon, bei welchen Armhaltungen das Verhältniss $\overline{RG} : \overline{R\mathfrak{G}}$ bezüglich $\overline{R\mathfrak{G}} : \overline{RG}$ einen constanten Werth besitzt. Unter diesen Niveaulinien befindet sich auch diejenige Curve, welche die den eingelenkigen Muskeln zukommenden Gleichgewichtshaltungen des Armes anzeigt. Da für die eingelenkigen Muskeln das Verhältniss $\overline{RG} : \overline{R\mathfrak{G}}$ den constanten Werth 0 besitzt, so ist es die obere der beiden mit 0 bezeichneten Niveaulinien. Man bestätigt aus dieser Curve ohne Weiteres z. B., dass zu $\psi = 70^\circ$ die Werthe $\varphi_1 = -19^\circ$ oder $+161^\circ$ gehören, oder dass $\varphi_1 = -25^\circ$ oder $+155^\circ$ sein muss, wenn $\psi$ den Werth $110^\circ$ oder $120^\circ$ besitzt, genau so wie es in den Tabellen auf Seite 321 angegeben wurde. Ja noch mehr, die Niveaulinie mit dem Index 0 bestätigt nicht nur die schon früher angeführten Resultate, sondern sie gestattet auch, noch andere, frühere nicht angegebene Armhaltungen, in denen ein eingelenkiger Muskel der Schwere Gleichgewicht halten kann, zu erkennen, so z. B. die durch $\psi = 53^\circ$ und $\varphi_1 = -15^\circ$ oder $+165^\circ$ bestimmten Haltungen.

Auch für die am Oberarm ansetzenden Muskeln hat das Verhältniss $\overline{RG} : \overline{R\mathfrak{G}}$ einen constanten Werth, da das Verhältniss der Drehungsmomente constant war; der Werth derselben war unendlich gross. Wenn nun $\overline{RG} : \overline{R\mathfrak{G}}$ unendlich gross ist, so ist das umgekehrte Verhältniss $\overline{R\mathfrak{G}} : \overline{RG}$ gleich Null. Es müssen also die diesen Muskeln zukommenden Armhaltungen durch die im Bereich des vorderen

Flächenstücks liegende Niveaulinie mit dem Index 0, das ist die untere in Tafel V, bestimmt sein. Man erkennt ohne Weiteres, dass diese Linie, welche eine Gerade darstellt, genau den Tabellen auf Seite 318 entspricht.

Die beiden Niveaulinien mit dem Index 0 stellen nun natürlich nichts anderes dar als die Durchschnittslinien der beiden Flächenstücke mit der horizontalen Coordinatenebene. Man findet dieselben auch in dem Bild auf Tafel III verzeichnet und zwar durch eine Reihe dicht aneinander liegender Punkte.

Endlich kann man die Resultate der drei auf Seite 357 herangezogenen Beispiele, welche zunächst aus der axonometrischen Projection der Fläche auf Tafel III gewonnen wurden, aus allen anderen auf den Tafeln IV und V verzeichneten Projectionen wieder bestätigt finden. Die Projectionen der drei herausgegriffenen Knotenpunkte des Flächennetzes finden sich zu diesem Zwecke auf den Tafeln IV und V mit angegeben. —

Mit der Fläche, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses der beiden Abstände $\overline{RG}$ und $\overline{R\mathfrak{G}}$ von den Gelenkwinkeln zur Anschauung bringt, ist nun erst ein Theil der Aufgabe gelöst, für einen beliebigen mehrgelenkigen Muskel die Armhaltungen aufzufinden, bei denen allein er im Stande ist, der Schwere das Gleichgewicht zu halten. Ein zweiter Theil dieser Aufgabe besteht darin, eine zweite Fläche zu construiren, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente $D_0$ und $D_2$ von den Gelenkwinkeln $\varphi_1$ und $\psi$ veranschaulicht. Hierbei wird man wieder die zu dem Verhältniss $D_0 : D_2$ oder zu dem umgekehrten Verhältniss $D_2 : D_0$ gehörende Fläche in Betracht ziehen, je nachdem $D_0 < D_2$ oder $D_0 > D_2$ ist, und wird in Folge dessen im Allgemeinen wieder eine aus zwei Stücken zusammengesetzte Fläche zu construiren haben.

Ist dies geschehen, so hat man endlich diese Fläche mit der durch die Tafeln III bis V dargestellten Fläche zum Schnitt zu bringen. Die Raumcurve, welche den beiden Flächen gemeinsam ist, giebt dann nicht nur (durch ihre Horizontalprojection) die Armhaltungen an, bei welchen der Muskel der Schwere Gleichgewicht halten kann, sondern sie lässt auch (durch die Grösse ihrer verticalen Coordinaten) erkennen, wie gross bei jeder dieser Armhaltungen das Verhältniss der beiden

Drehungsmomente ist. Da diese Raumcurve als Schnitt der beiden Flächen auf der durch die Tafeln III bis V abgebildeten Fläche liegt, so kann man alle Curven, welche die den verschiedensten Muskeln zukommenden Gleichgewichtshaltungen des Armes bestimmen, auf dieser Fläche aufzeichnen. Hierdurch gewinnt aber diese Fläche noch eine ganz besondere Bedeutung für das Problem des Gleichgewichts zwischen Schwere und Muskeln. Sie soll daher in Zukunft den Namen »Gleichgewichtsfläche« führen.

Die eben angedeutete Untersuchung kann so lange nicht weiter geführt werden, bis nicht durch Messungen am Präparat die Werthe der von den verschiedenen mehrgelenkigen Muskeln verursachten Drehungsmomente $D_0$ und $D_2$ für alle möglichen Haltungen des Armes in der auf Seite 341 ff. angegebenen Weise bestimmt worden sind. Nur für einen einzigen mehrgelenkigen Muskel des Armes sind die nothwendigen Daten zur Zeit bekannt; nämlich für den langen Kopf des M. biceps brachii. Dies ist ausschliesslich dem Umstand zu verdanken, dass die Sehne des Muskels über den Humeruskopf hinweggeht. Dadurch ist nämlich, wie man leicht bestätigt, bedingt, dass das Drehungsmoment $D_0$, mit welchem der Muskel auf den ganzen Arm einwirken würde, wenn das Ellbogengelenk fixirt wäre, einen constanten Werth besitzt, weil ja der ideale Hebelarm (der Arm des entstehenden Kräftepaares) für alle Haltungen des Armes durch den Radius des Humeruskopfes dargestellt wird.

Bezeichnet man den Radius des Humeruskopfes mit $\varrho$ und den veränderlichen Abstand des dem Ansatz zunächst liegenden Theiles des Muskelzuges vom Ellbogengelenkmittelpunkt mit $k$ (vergl. Figur 8), so ist $D_0 = K\varrho$ und $D_2 = Kk$, unter $K$ die Spannung des Muskels verstanden. Die letztere kommt nun für das Verhältniss der beiden Hebelarme gar nicht in Betracht, denn es ist, wie man leicht sieht:

$$\frac{D_0}{D_2} = \frac{\varrho}{k} \quad \text{und} \quad \frac{D_2}{D_0} = \frac{k}{\varrho}.$$

Nach früheren Messungen[1]) hatte sich für die Grösse $k$ herausgestellt

---

1) Vergl. Abhandl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Classe. Bd. XV. Nr. III. S. 275.

| $\psi$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ in cm | 1,15 | 1,24 | 1,37 | 1,52 | 1,68 | 1,90 | 2,14 | 2,40 | 2,69 | 2,97 | 3,24 | 3,54 | 3,74 | 3,93 | 4,08 |

| $\psi$ | 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ in cm | 4,23 | 4,35 | 4,44 | 4,54 | 4,58 | 4,55 | 4,45 | 4,27 | 4,08 | 3,92 | 3,75 | 3,58 |

Nun hat sich durch Messung an verschiedenen Präparaten das bemerkenswerthe Resultat ergeben, dass der Durchmesser des Humeruskopfes mit grosser Annäherung gleich der Entfernung des Muskelansatzes von der Ellbogenaxe ist. Dieser Abstand betrug an dem Präparat, zu welchem die angeführten Werthe von $k$ gehören, 4,58 cm. Folglich ist in diesem Falle der Radius des Humeruskopfes gleich 2,29 cm anzunehmen, wobei natürlich die zweite Decimalstelle gar keine Bedeutung hat, sondern nur angeführt ist, um die gefundene Gleichheit von Ansatzstrecke des Muskels und Durchmesser des Humeruskopfes zu wahren.

Berechnet man nun die Werthe der Verhältnisse $\frac{D_0}{D_2}$ oder $\frac{D_2}{D_0}$, je nachdem $D_0 < D_2$ oder $D_0 > D_2$ ist, so erhält man folgende Tabelle, in welcher die Verhältnisswerthe eingeklammert sind, wenn es sich um das Verhältniss $\frac{D_2}{D_0}$ handelt.

| $\psi$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Verhältniss der Drehungsmomente | [+0,50] | [+0,54] | [+0,60] | [+0,66] | [+0,74] | [+0,83] | [+0,93] | +0,95 | +0,85 | +0,77 | +0,71 | +0,65 | +0,61 |

| $\psi$ | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Verhältniss der Drehungsmomente | +0,58 | +0,56 | +0,54 | +0,53 | +0,52 | +0,50 | +0,50 | +0,50 | +0,51 | +0,54 | +0.56 | +0,58 | +0,61 | +0,64 |

Es hängt also das Verhältniss der Drehungsmomente beim langen Kopf des M. biceps brachii gar nicht vom Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenks ab, sondern nur vom Beugungswinkel des Ellbogengelenks $\psi$.

Diese Abhängigkeit findet sich durch das Diagramm auf Tafel VII dargestellt. Man kann aber auch die Abhängigkeit des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente von den Haltungen des Armes durch eine Fläche darstellen. Nur nimmt diese Fläche dann eine besondere Form an; sie wird nämlich eine Cylinderfläche, deren Axe parallel der $\varphi_1$-Coordinatenaxe ist und deren Profil durch das Diagramm auf Tafel VII dargestellt wird. Die eine Schaar des auf der Fläche gelegenen Coordinatennetzes besteht aus lauter der Cylinderaxe parallelen Geraden, die andere Schaar aus lauter unter sich und dem Diagramm auf Tafel VII kongruenten Curven. Endlich ist auch leicht ersichtlich, dass die Niveaulinien Gerade darstellen, welche der $\varphi_1$-Axe parallel laufen. Um zu bestimmen, zu welchen Werthen von $\psi$ die einzelnen Niveaulinien gehören, hat man nur an dem Diagramm auf Tafel VII festzustellen, an welchen Stellen dasselbe die horizontalen Geraden, die den Ordinaten 0,1, 0,2 u. s. w. bis 1 entsprechen, durchschneidet.

Man findet dann die folgenden zusammengehörenden Werthe von dem Verhältniss der Drehungsmomente und dem Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks:

| Verhältniss der Drehungsmomente | [+0,5] | [+0,6] | [+0,7] | [+0,8] | [+0,9] | +1 | +0,9 | +0,8 | +0,7 | +0,6 | +0,5 | +0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Beugungswinkel $\psi$ | 0° | 10° | 18° | $23\frac{1}{2}$° | $28\frac{1}{2}$° | 33° | 37° | 43° | 51° | 61° | 95° | 123° |

Auf Tafel VI, welche gleichzeitig die Niveaulinien der Gleichgewichtsfläche enthält, sind die hieraus sich ergebenden Niveaulinien aufgezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass die zwischen $\psi = 0°$ und $\psi = 33°$ liegenden Linien zu dem Stück der wiederum aus zwei Theilen bestehenden Fläche gehört, welches dem Verhältniss $\frac{D_2}{D_0}$ entspricht. Eine jede Niveaulinie der Cylinderfläche des Muskels liegt nun mit derjenigen Niveaulinie der Gleichgewichtsfläche in einer Ebene, welche den gleichen Index besitzt; denn dieser Index drückt ja die Höhe der Niveaulinie über der horizontalen Coordinatenebene aus. Zwei solche Niveaulinien der beiden Flächen werden sich daher im Allgemeinen in einem oder mehreren Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte liegen, da sie beiden Flächen gemeinsam

sind, auf der Curve, in welchem sich die beiden Flächen durchschneiden. Sucht man demnach in der Projection der Niveaulinien beider Flächen auf die Horizontalebene, welche Tafel VI darstellt, die Schnittpunkte der Projectionen entsprechender Niveaulinien beider Flächen auf, so erhält man in denselben Punkte der Projection der Schnittcurve beider Flächen. Hat man auf diese Weise genügend viel Punkte der Schnittcurvenprojection construirt, so kann man mit Hülfe derselben die ganze Projection der Schnittcurve aufzeichnen und hat damit sämmliche Haltungen des Armes bestimmt, in denen der Muskel der Schwere Gleichgewicht halten kann.

In Tafel VI findet sich diese Curve im Anschluss an die Niveaulinien durchbrochen und in der folgenden Figur 21 noch einmal gesondert aufgezeichnet. Aus dieser Curve, die zugleich das Diagramm

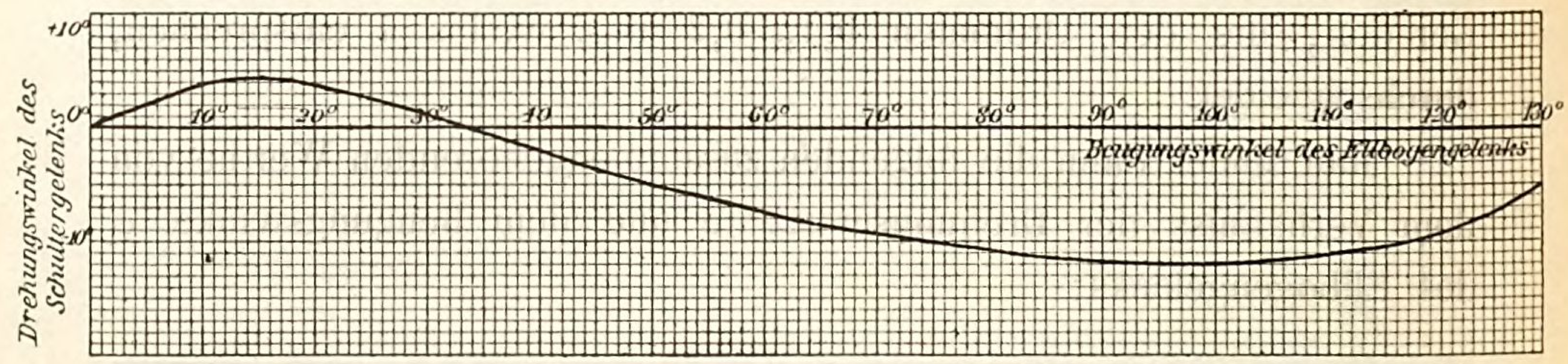



*Fig. 21.*

für die zusammengehörenden Werthe von $\psi$ und $\varphi_1$ darstellt, welche die dem langen Kopf des M. biceps brachii zukommenden Gleichgewichtshaltungen des Armes bestimmen, gewinnt man nun rückwärts folgende Tabelle, welche den Tabellen auf den Seiten 318 und 321 für die bisher betrachteten Muskelarten entspricht.

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1$ | 0° | + 4° | $+ 3\frac{1}{2}$° | + 1° | − 2° | − 5° | $- 7\frac{1}{2}$° | $- 9\frac{1}{2}$° | − 11° | − 12° | − 12° | − 11° | $- 9\frac{1}{2}$° | − 5° |

Zu beachten ist hierbei, dass zu jedem Werthe von $\psi$ nur ein einziger Werth von $\varphi_1$ gehört. Auf Tafel VII finden sich in derselben Weise wie für die am Oberarm ansetzenden Muskeln auf Tafel I und für die eingelenkigen Muskeln auf Tafel II einige der hierdurch bestimmten Haltungen des Armes aufgezeichnet.

Die Bestimmung der Armhaltungen, in denen die noch nicht in Betracht gezogenen mehrgelenkigen Muskeln der Schwere Gleichgewicht zu halten vermögen, soll den Gegenstand späterer Untersuchungen bilden. —

Zum Schluss sei noch hervorgehoben, dass man mit Hülfe der Gleichgewichtsfläche stets ohne Weiteres angeben kann, in welchem Verhältniss die resultirenden Drehungsmomente $D_0$, $D_2$ beliebig vieler Muskeln stehen müssen, wenn dieselben in irgend einer Haltung des Armes der Schwere das Gleichgewicht halten sollen.

---

# Rückblick.

In der vorliegenden Arbeit sind die Bedingungen aufgestellt worden, unter denen sich Schwere und Muskeln an einem aus zwei Gliedern bestehenden, um eine fixirte Gelenkaxe drehbaren Körpersystem das Gleichgewicht halten können. Es haben sich dabei unter anderen sehr wesentliche Unterschiede gegenüber dem Falle des Gleichgewichts an einem einzigen, um eine feste Axe drehbaren Gliede herausgestellt. Während im letzteren Falle ein auf das Glied einwirkender Muskel bei jeder beliebigen Gelenkstellung der Schwere das Gleichgewicht halten kann, sofern er nur überhaupt das Glied in entgegengesetztem Sinne wie die Schwere zu drehen strebt, vermag ein am zweigliedrigen System angreifender Muskel dies nur bei ganz bestimmten Stellungen des Systems zu leisten. Diese Stellungen sind für alle zwischen den beiden Abschnitten des Systems sich erstreckenden Muskeln (eingelenkigen Muskeln) die gleichen; sie stimmen ferner für alle Muskeln unter einander überein, welche den einen Insertionspunkt ausserhalb des Systems und den anderen an dem der festen Drehaxe näheren Gliede besitzen; sie sind dagegen für alle die Muskeln verschieden, deren einer Insertionspunkt sich ausserhalb des Systems und deren anderer sich an dem von der fixirten Axe entfernteren Gliede befindet. Für den grössten Theil der möglichen Stellungen des zweigliedrigen Systems giebt es aber überhaupt keinen Muskel, welcher allein der Schwere Gleichgewicht zu halten im Stande wäre. Es müssen sich zu diesem Zwecke dann mehrere Muskeln vereinigen.

Als specielles Beispiel ist der im Ellbogengelenk gegliederte Arm bei fixirtem Schultergürtel eingehend untersucht worden, wobei zunächst nur solche Muskeln ins Auge gefasst sind, welche im Schultergelenk Drehung um eine der Ellbogenaxe parallele Axe zu bewirken streben.

Es hat sich dabei ergeben, dass alle zwischen Oberarm und Unterarm ausgespannten Muskeln nur bei solchen Stellungen des Armes der Schwere Gleichgewicht halten können, bei denen ein fester Punkt der Unterarmlängsaxe, welcher als Richtpunkt des Unterarmes bezeichnet worden ist, mit dem Schultergelenkmittelpunkt in einer Verticalen liegt. Die den Beugemuskeln des Ellbogengelenks zukommenden Armhaltungen unterscheiden sich hierbei insofern von den zu den Streckmuskeln gehörenden, als bei jenen der Richtpunkt des Unterarmes vertical unter, bei diesen vertical über dem Schultergelenkmittelpunkt liegen muss. Der Richtpunkt befindet sich zwischen dem Hauptpunkt und Schwerpunkt des als starr aufgefassten Systems: Unterarm plus Hand; für das in Betracht gezogene Präparat besass er eine Entfernung von ca. 13 Centimeter von der Ellbogenaxe.

Die am Oberarm ansetzenden Muskeln vermögen nur dann der Schwere das Gleichgewicht zu halten, wenn die Unterarmlängsaxe vertical steht, vorausgesetzt, dass das Ellbogengelenk nicht etwa in der äussersten Beuge- oder Streckstellung arretirt ist. Bei diesen Stellungen liegt also der unendlich ferne Punkt der Unterarmlängsaxe mit dem Schultergelenkmittelpunkte in einer Verticalen.

Die allen anderen (mehrgelenkigen) Muskeln zukommenden Gleichgewichtshaltungen sind nicht auch dadurch charakterisirt, dass ein fester Punkt der Unterarmlängsaxe sich mit dem Schultergelenkmittelpunkt in einer Verticalen befindet. Der jeweils vertical unter oder über dem Schultergelenkmittelpunkt befindliche veränderliche Punkt der Unterarmlängsaxe, welcher allgemein als Gleichgewichtspunkt bezeichnet worden ist, hängt aber in seiner Lage auf das Engste mit den Drehungsmomenten zusammen, die der Muskel auf den Arm ausübt. Es verhalten sich nämlich in jedem Falle die Entfernungen des Gleichgewichtspunktes einerseits und Ellbogengelenkmittelpunktes andererseits vom Richtpunkte des Unterarmes wie die Drehungsmomente, mit denen der Muskel auf den Arm einwirken würde, wenn einmal das Ellbogengelenk fixirt und nur das Schultergelenk beweglich gelassen wäre, und das andere Mal umgekehrt das Schultergelenk fixirt worden wäre und nur dem Ellbogengelenk freie Beweglichkeit zukäme.

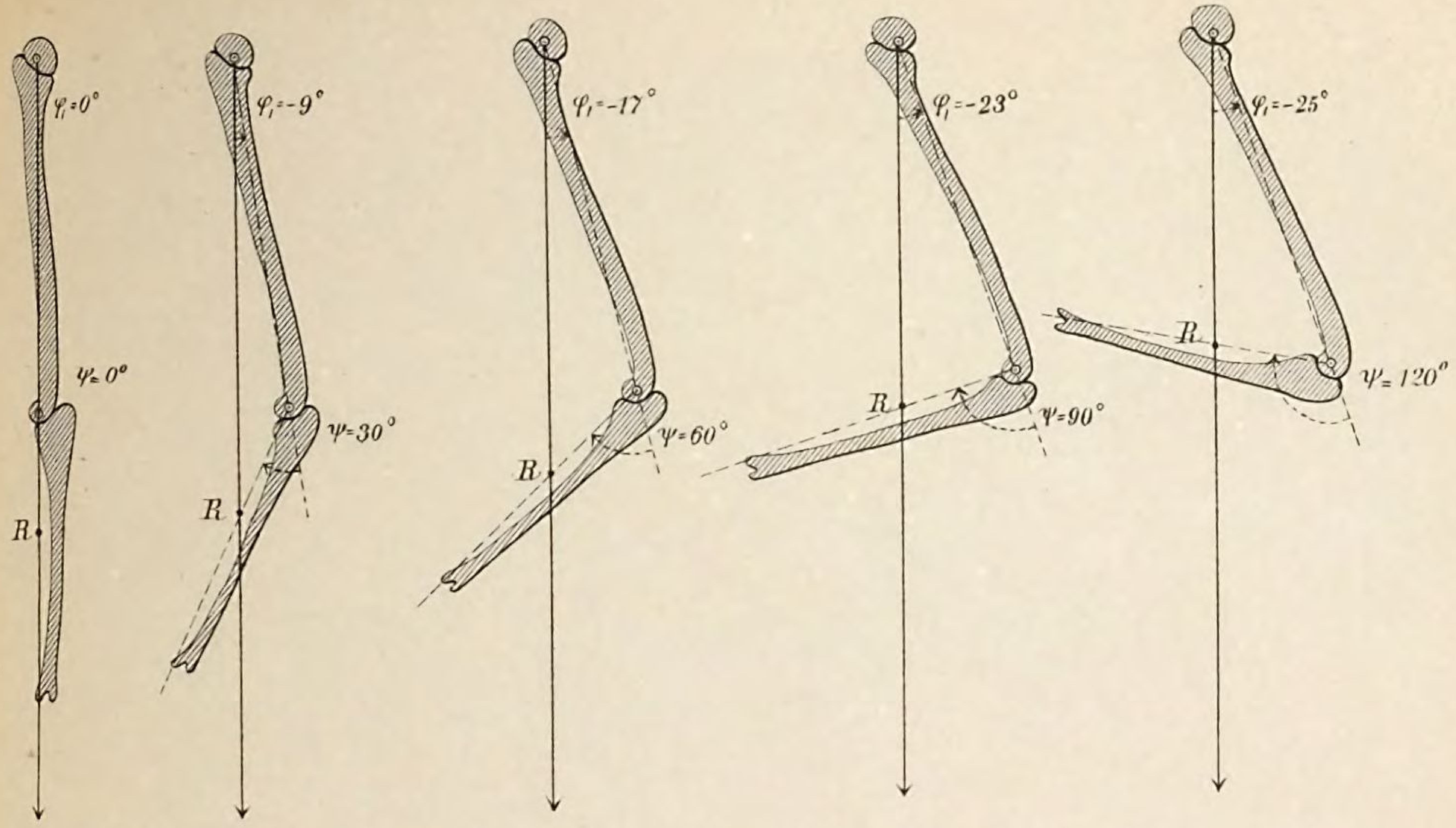
Dieser allgemeine Satz begreift die zuerst angeführten speciellen

Fälle unter sich; in dem einen Falle ist der Gleichgewichtspunkt mit dem Richtpunkt, in dem anderen mit dem unendlich fernen Punkt der Unterarmlängsaxe identisch, weil das eine Mal das erstere, das andere Mal das letztere der beiden Drehungsmomente den Werth Null besitzt.

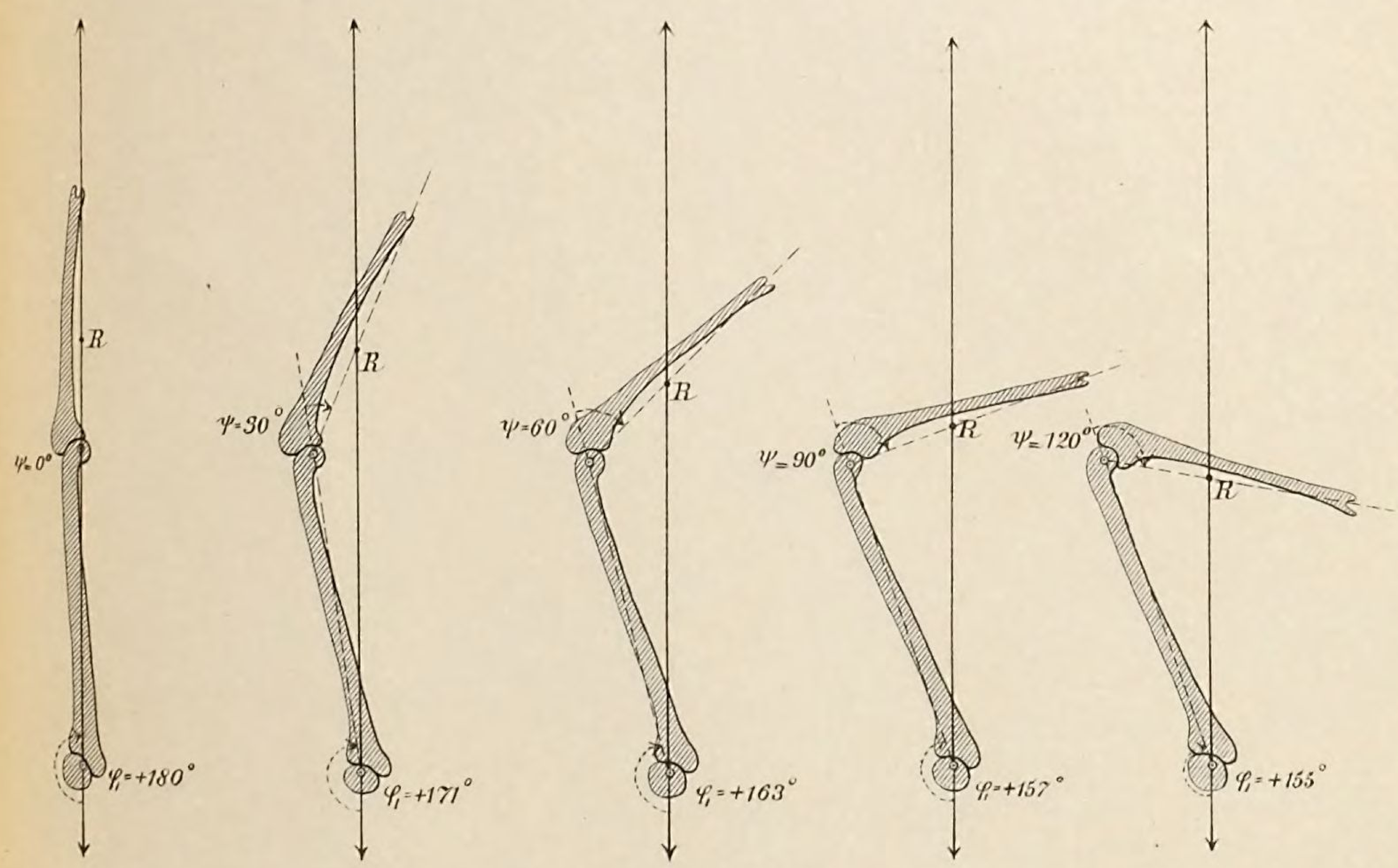
Alle für den Arm gefundenen Resultate gelten nun mutatis mutandis für jedes beliebige den getroffenen Voraussetzungen entsprechende zweigliedrige System des menschlichen oder thierischen Körpers.

Die Bestimmung der Haltungen des Armes oder allgemein zweigliedrigen Systems, bei denen ein bestimmter mehrgelenkiger Muskel allein der Schwere Gleichgewicht halten kann, gehört zu den verwickeltsten Problemen der Muskelstatik. Dieselbe ist in der vorliegenden Arbeit nur für einen mehrgelenkigen Muskel des Armes durchgeführt worden, dessen Drehungsmomente in Folge des eigenthümlichen Verlaufs des Muskels in besonders einfacher Weise von den Drehungswinkeln des Schulter- und Ellbogengelenks abhängen, nämlich für den langen Kopf des M. biceps brachii. Um die Aufgabe beispielsweise auch für den langen Kopf des M. triceps brachii oder für die über Hüft- und Kniegelenk hinwegziehenden Muskeln der unteren Extremität lösen zu können, ist es erst noch nöthig, durch Versuche am Präparat die Drehungsmomente zu bestimmen, mit denen diese Muskeln in allen möglichen Gelenkstellungen auf das zweigliedrige System einwirken.

Die für einen bestimmten Muskel charakteristischen Stellungen des zweigliedrigen Systems muss man kennen, bevor man an die weitere Aufgabe herantreten kann, die zum Gleichgewicht nöthige Spannung des Muskels zu bestimmen. Diese Aufgabe lässt sich dann leicht in jedem Falle mit Hülfe der in der Arbeit abgeleiteten Formeln lösen.


*Stellungen des Arms, in denen ein eingelenkiger Beugemuskel des Ellbogengelenks der Schwere Gleichgewicht halten kann.*




*Stellungen des Arms, in denen ein eingelenkiger Streckmuskel des Ellbogengelenks der Schwere Gleichgewicht halten kann.*

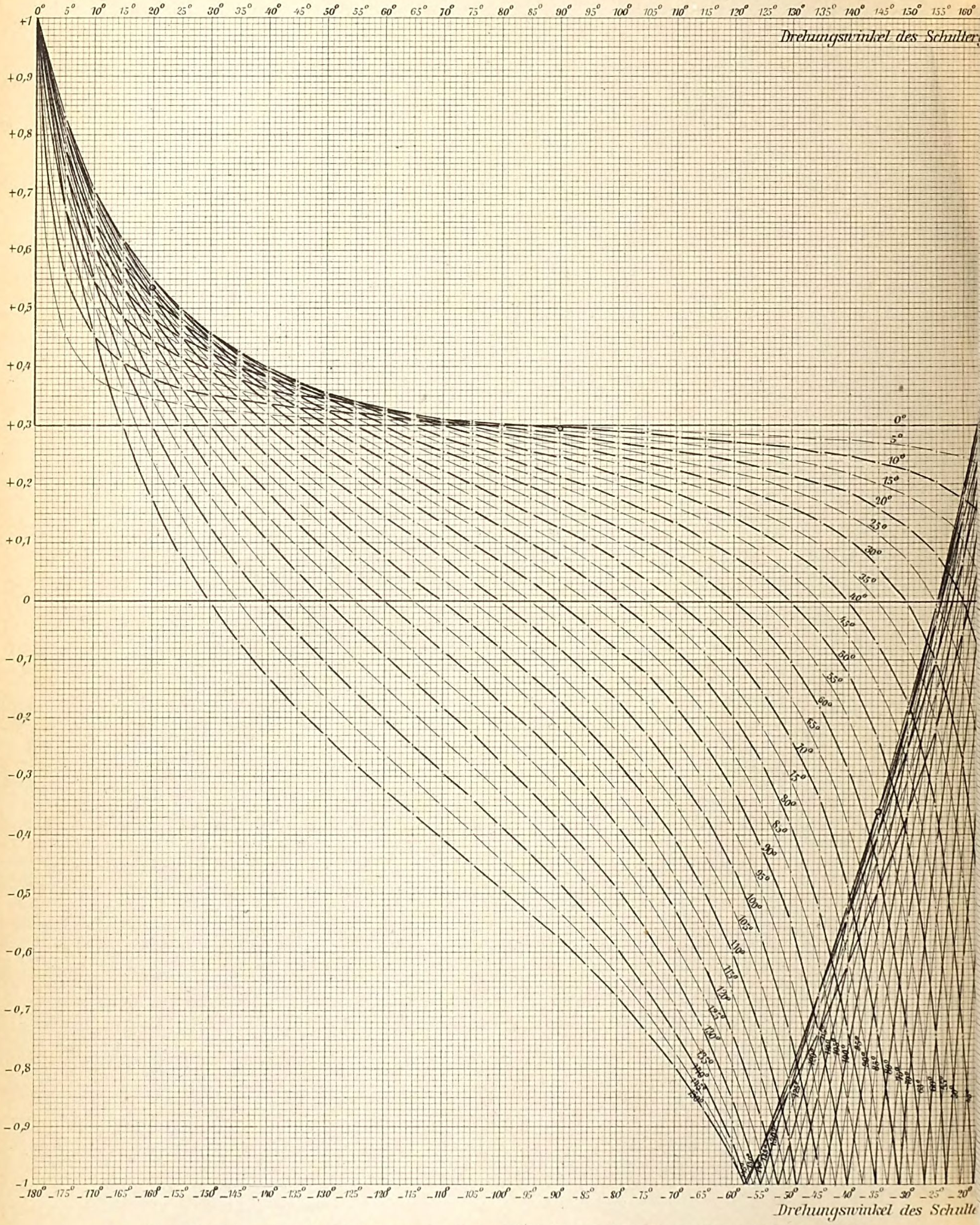
Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.


Beugungswinkel des Ellbogengelenks.
0° (180°) Drehungswinkel des Schultergelenks.
5° (175°) Drehungswinkel des Schultergelenks.
Fläche für das Verhältniss RG/RK, wo RG < RK
180° (0°) Drehungswinkel des Schultergelenks.
Curve für den M. biceps brachii cap. long.
Projection der Curve für den M. biceps brachii cap. long.
Curve für die eingelenkigen Muskeln.
Beugungswinkel des Ellbogengelenks.
Fläche für das Verhältniss RK/RG, wo RG > RK

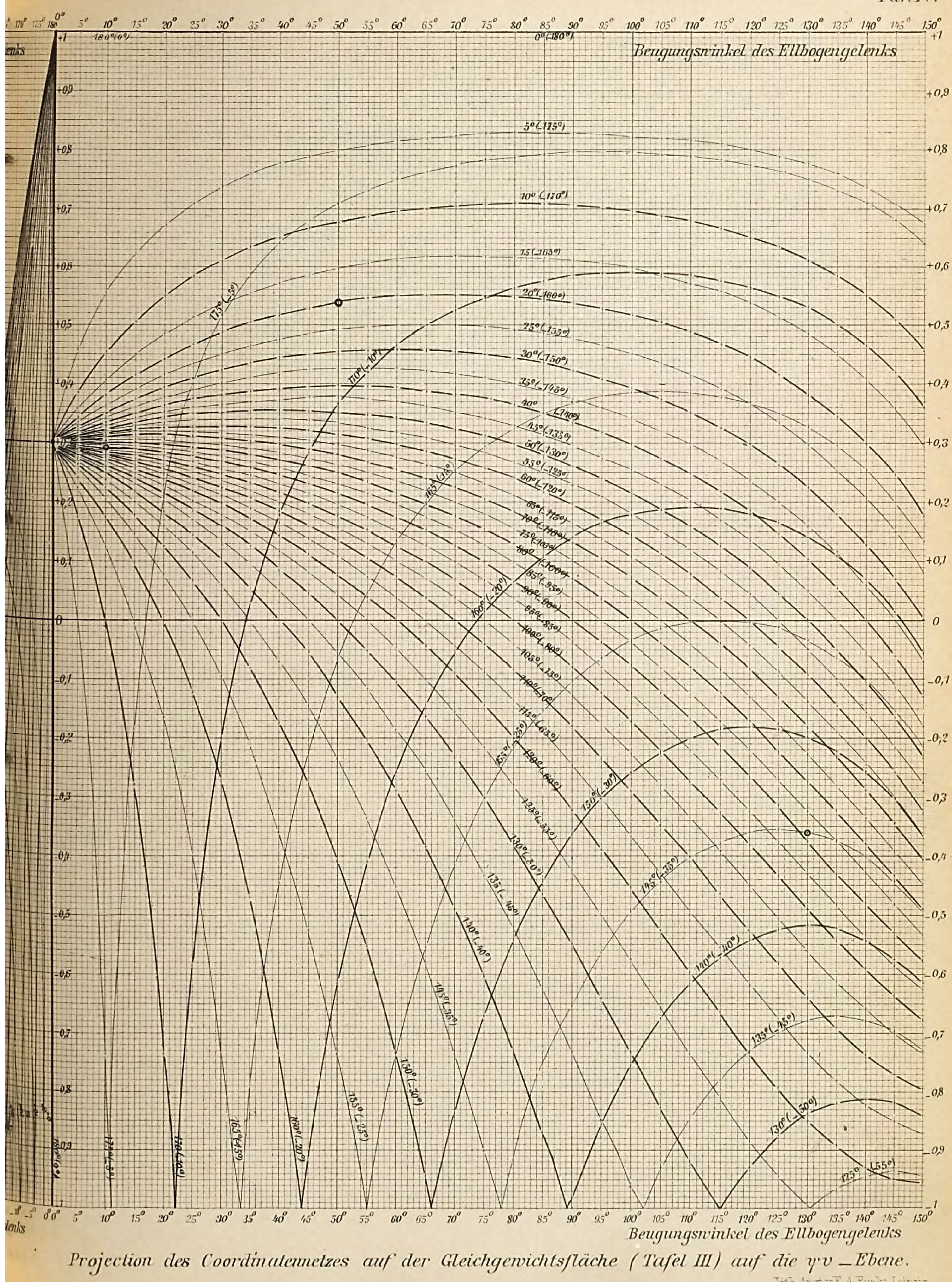



*Fläche, welche das Verhältniss der Abstände des Gleichgewichtpunktes G und des Ellbogengelenkmittelpunktes $\mathcal{C}$ vom Richtpunkt R in seiner Abhängigkeit von den beiden Gelenkwinkeln darstellt. Dieselbe besteht aus zwei Stücken, welche unten in einer ebenen Curve zusammenstossen. Der hintere Theil veranschaulicht die Grösse des Verhältnisses $\overline{RG}:\overline{R\mathcal{C}}$ so lange $\overline{RG} < \overline{R\mathcal{C}}$ ist; der vordere, grössere Theil veranschaulicht die Grösse des umgekehrten Verhältnisses $\overline{R\mathcal{C}}:\overline{RG}$ so lange $\overline{RG} > \overline{R\mathcal{C}}$ ist. Die Grösse 1 der beiden Verhältnisse ist durch die Länge von 1 Decimeter dargestellt. (Gleichgewichtsfläche).*

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

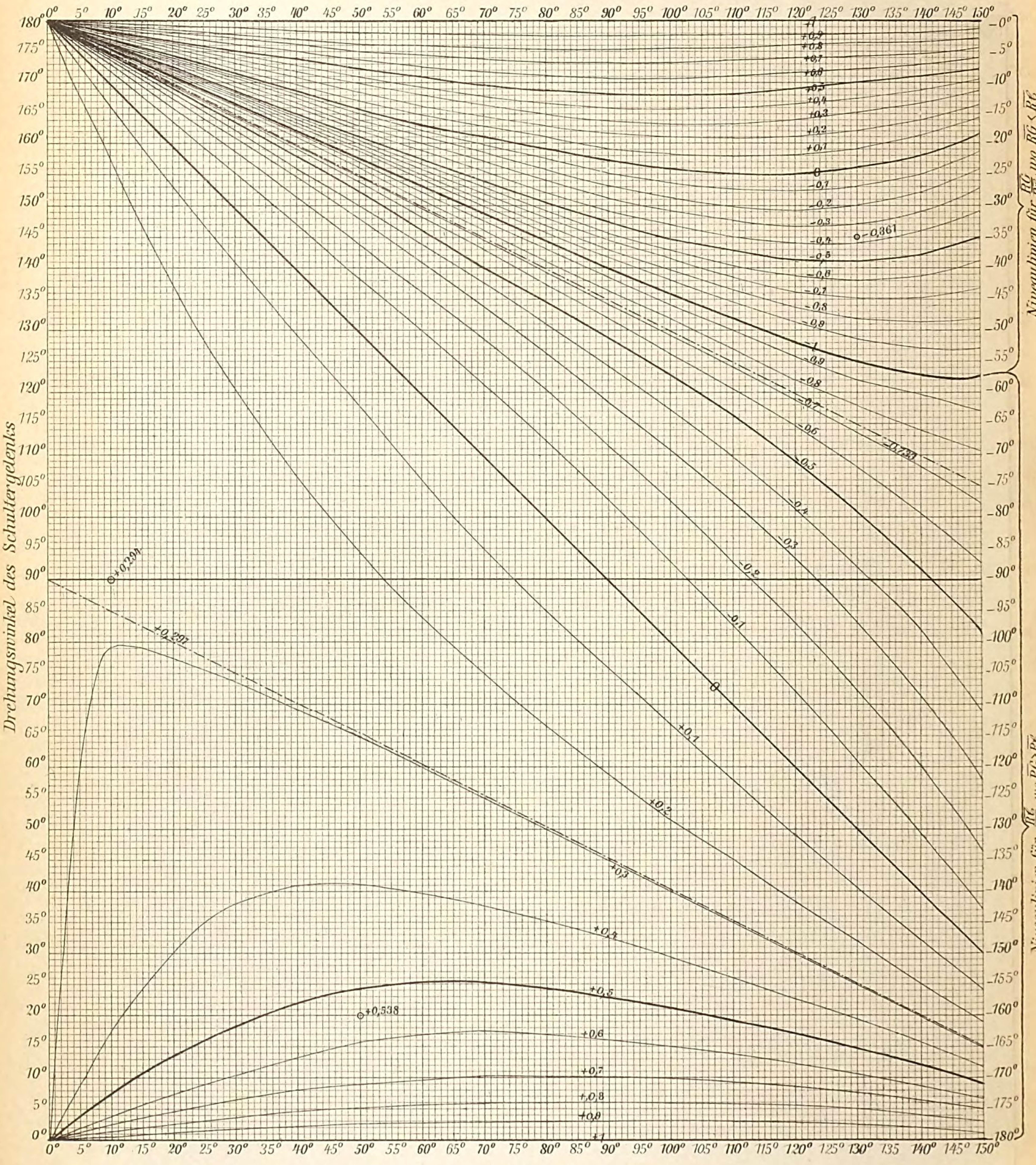



Projection des Coordinatennetzes auf der Gleichgewichtsfläche (Tafel III) auf die $\varphi_1 v$ – Eben



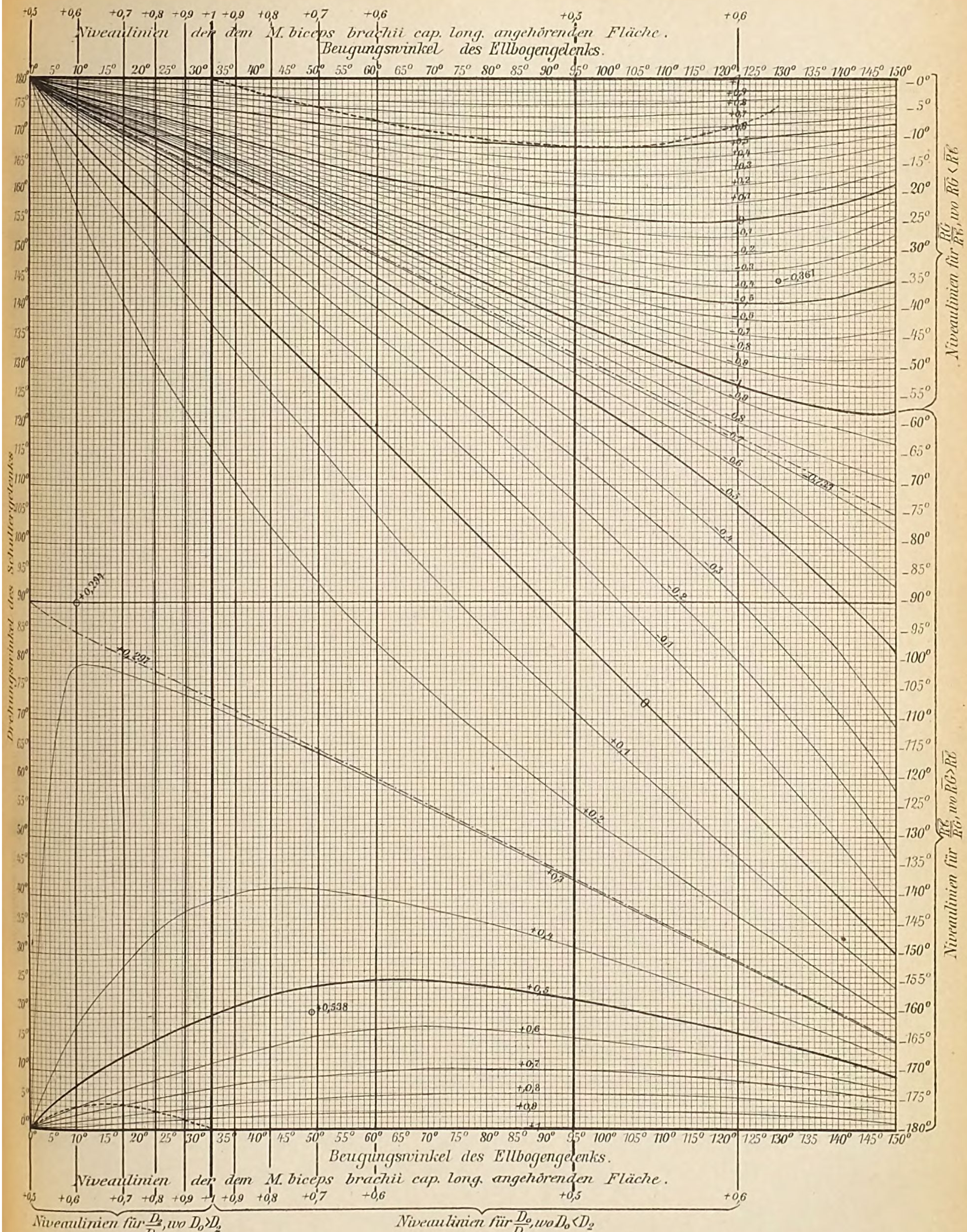

Projection des Coordinatennetzes auf der Gleichgewichtsfläche (Tafel III) auf die $\gamma v$ – Ebene.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.




Darstellung der Fläche auf Tafel III durch Niveaulinien.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.




Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

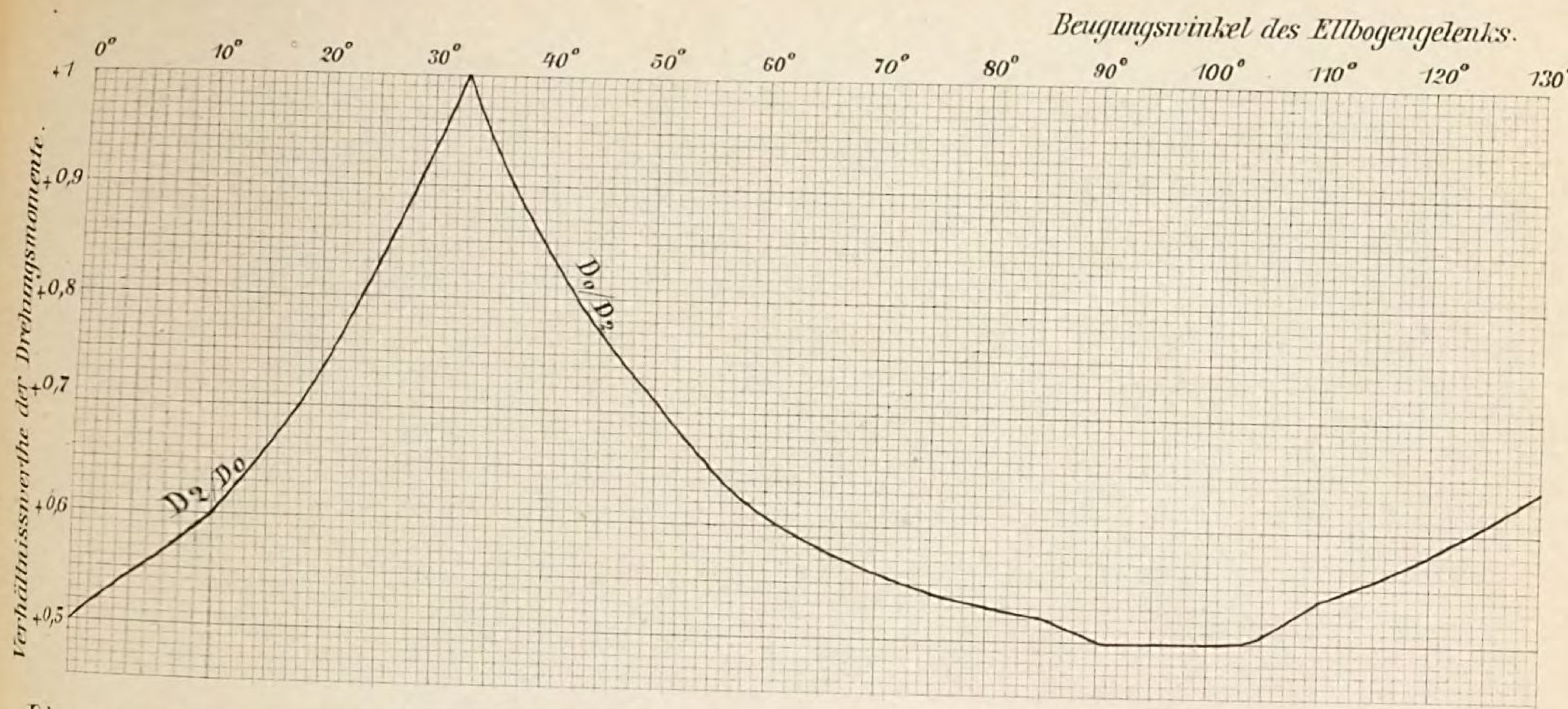
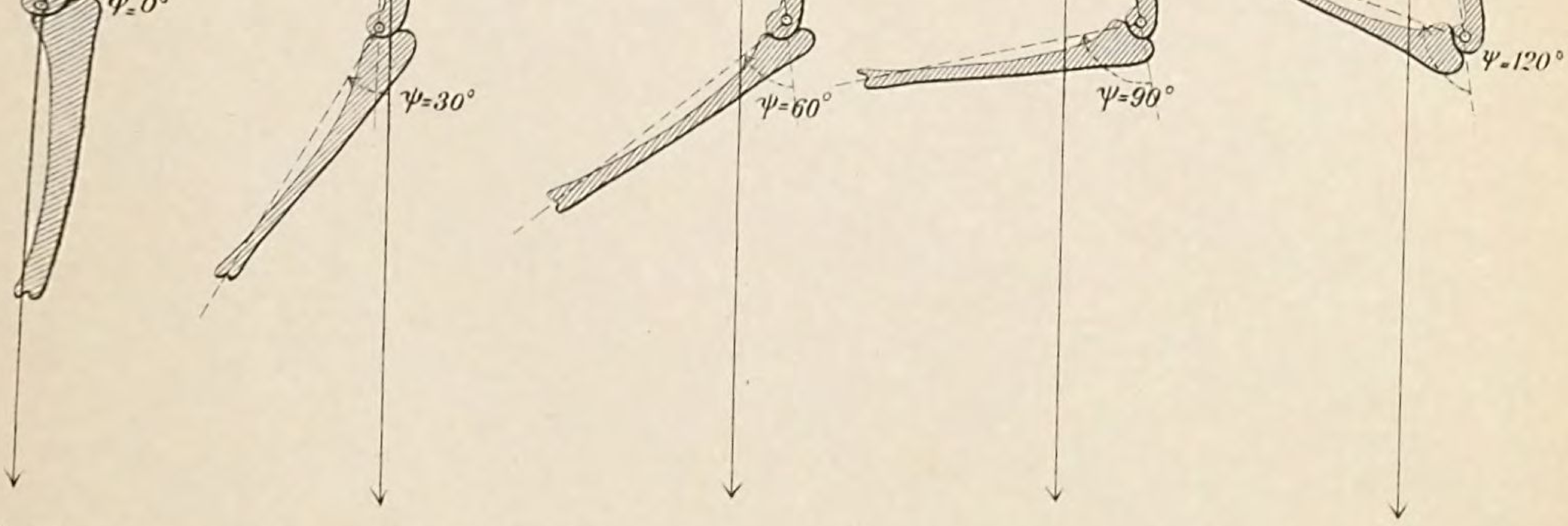



Diagramm für das Verhältniss der beiden Drehungsmomente $D_0$ und $D_2$ des langen Kopfes vom M. biceps brachii.




Stellungen des Arms, in denen der lange Kopf des M. biceps brachii der Schwere Gleichgewicht halten kann.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

# DIE
# BEOBACHTUNG DER MONDFINSTERNISSE

VON

JOHANNES HARTMANN.

Des XXIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ V.

MIT 4 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL
1896.

Das Manuscript eingeliefert am 1. August 1896.
Der Abdruck vollendet am 8. October 1896.

# Inhalt.


Seite

1. Einleitung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 371

## I. Übersicht der Beobachtungsmethoden.

2. Vollständige Ortsbestimmung von Schattenpunkten . . . . . . . . . . 375
3. Messungen zur Bestimmung der Schattenabplattung . . . . . . . . . . 378
4. Photographische Aufnahmen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 381
5. Photometrische Messungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 383

## II. Ableitung der Formeln.

6. Allgemeine Formeln für die parallaktische Libration . . . . . . . . . . 386
7. Sehnen- und Projectionsmethode . . . . . . . . . . . . . . . . . 391
8. Tangentenmethode, Sichelbreiten . . . . . . . . . . . . . . . . . 394
9. Positionswinkel der Sehne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 400
10. Photographische Aufnahmen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 403

## III. Berechnung der vorhandenen Messungen.

11. Genauigkeit der Contactbeobachtungen . . . . . . . . . . . . . . 407
12. Sichelbreiten, gemessen am Fadenmikrometer . . . . . . . . . . . . 415
13. Heliometer-Sichelbreiten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 420
14. Heliometer-Sehnen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 430
15. Positionswinkel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 436
16. Photographische Aufnahmen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 441
17. Schluss . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 462

# Inhalt.

1. Einleitung . . . . . . . . . . [illegible]

## I. Übersicht der Beobachtungsmethoden.

2. Unmittelbare Beobachtung von [illegible] . . . [illegible]
3. Messungen zur Bestimmung der [illegible] . . . [illegible]
4. Photographische Aufnahmen . . . . . [illegible]
5. Photometrische Messungen . . . . . [illegible]

## II. Ableitung der Formeln.

6. Allgemeine Formeln für die [illegible] . . . [illegible]
7. [illegible] . . . . . . . [illegible]
8. [illegible] . . . . . . . [illegible]
9. [illegible] der Erde . . . . . [illegible]
10. Photographische Aufnahmen . . . . . [illegible]

## III. Berechnung der verschiedenen Beobachtungen.

11. [illegible] . . . . . . . [illegible]
12. [illegible] . . . . . . . [illegible]
13. [illegible] . . . . . . . [illegible]
14. [illegible] . . . . . . . [illegible]
15. [illegible] . . . . . . . [illegible]
16. Photographische Aufnahmen . . . . . [illegible]
17. Resultate . . . . . . . . [illegible]

# DIE

# BEOBACHTUNG DER MONDFINSTERNISSE

VON

JOHANNES HARTMANN.

MIT VIER TEXTFIGUREN.

## I.

In einer früheren Arbeit[1]) hatte sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, für die Vorausberechnung der Mondfinsternisse einen möglichst plausibelen Werth der sogenannten Vergrösserung des Erdschattens, d. h. des Unterschiedes zwischen dem beobachteten und dem berechneten Halbmesser des Kernschattens zu ermitteln. Zu diesem Zwecke wurden etwa 3400 Contactbeobachtungen berechnet, also Beobachtungen, welche sich auf die Zeit der Berührung von Punkten des Mondrandes resp. der Mondoberfläche mit dem Schattenrande bezogen. Der Verfasser darf hoffen, durch diese Arbeit das bisherige Beobachtungsmaterial in der Hauptsache erledigt zu haben, und es tritt nunmehr die Frage auf, ob es sich lohnt, die seit Alters her übliche Beobachtung der Kraterbedeckungen in der gleichen Weise fortzusetzen, oder ob vielleicht durch schärfere Messmethoden dieser Erscheinung neue Gesichtspunkte abzugewinnen sind. Es sollen daher auf den folgenden Seiten einige neue und inzwischen praktisch erprobte Arten der Beobachtung von Mondfinsternissen besprochen werden. Zuvor jedoch sei es mir noch gestattet auf einige Bemerkungen näher einzugehen, welche von angesehener Seite[2])

1) Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen, Abhandl. der K. S. Gesellsch. der Wissensch., math.-phys. Classe Bd. XVII pag. 365, soll im Folgenden kurz mit I citirt werden.

2) H. Seeliger, Recension in der Vierteljahrsschr. d. A. G. XXVII pag. 186, und H. Seeliger, Die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen (Abh. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. II. Cl. XIX. Bd. II. Abth.). Die letztgenannte Abhandlung, die mit $S_2$ citirt werden soll, gelangte erst in die Hände des Verfassers, als die vorliegende Arbeit bereits der K. S. Gesellsch. der Wissensch. zum Druck vorgelegt war. Die interessanten Ergebnisse derselben konnten daher nur noch in einigen kurzen Fussnoten Berücksichtigung finden.

gegen die Art der Ableitung des Endresultates (I, pag. 538) $V = 48''.62 \frac{\pi}{\pi_0}$ gemacht wurden.

Die als Schlusswerth angenommene Zahl $V = 48''.62$ war direct das arithmetische Mittel aus 2920 einzelnen Beobachtungen, welche seit 1841 von einer grossen Anzahl von Beobachtern erhalten wurden. Da die einzelnen Beobachtungen je nach der Auffassung des Beobachters nicht selten um mehr als 20″ von obigem Durchschnittswerthe abweichen, so konnte durch verschiedenartige Gewichtsvertheilung das Endresultat um erhebliche Beträge verschoben werden. Um die Grenzen dieser bleibenden Unsicherheit zu ermitteln, wurden damals noch andere Mittelwerthe von $V$ berechnet und es konnte allerdings befremdlich erscheinen, dass gerade der kleinste aller dieser Werthe als definitives Resultat angenommen wurde. Da der Gedankengang, welcher zu dieser Annahme führte, damals nicht genügend gekennzeichnet wurde, so soll dieses Versäumniss hier nachgeholt werden.

Zur Bildung des obigen, früher mit $V_4$ bezeichneten Werthes $V = 48''.62$ erhielt wie gesagt jede Beobachtung das gleiche Gewicht, in $V_5$ dagegen wurde jedem Beobachter das Gewicht 1 gegeben. Es liegt nun in der Natur dieser Beobachtungen, dass die geübteren Beobachter auch grössere Reihen von Beobachtungen lieferten. Diese Reihen von 50 und mehr guten Beobachtungen erhielten nun in $V_5$ dasselbe Gewicht, wie etwa eine einzelne Beobachtung, die vielleicht von einem ganz ungeübten Beobachter beigebracht wurde. Wenn nun auch diese Gewichtsvertheilung in $V_5$ offenbar zu verwerfen ist, so hätte immerhin $V_5$ bei einem umfangreichen Beobachtungsmaterial noch zufällig mit dem gesuchten richtigen Mittelwerthe übereinstimmen können — aber es trat aus einem anderen Grunde eine systematische Vergrösserung von $V_5$ auf. Seit der Einführung ausreichender Beobachtungshülfsmittel zeigte es sich nämlich deutlich, dass geübtere Beobachter den Schatten stets kleiner messen, als ungeübte. Hiernach wird der Mittelwerth um so grösser werden, je grösseres Gewicht man den ungeübten Beobachtern giebt. Da es nun für die Vorausberechnung der Finsternisse erwünscht sein musste, einen Mittelwerth aus möglichst vielen Beobachtern zu haben, so wurden die minderwerthigen Reihen neben den besseren nicht ausgeschlossen, andererseits durften sie aber auch nicht vor

diesen bevorzugt werden. Aus diesem Grunde schien es dem Verfasser am richtigsten zu sein, einer jeden Beobachtung das gleiche Gewicht beizulegen. Dass ein aus den ersten zwei Decennien dieses Jahrhunderts berechneter Werth, welcher aus gleichem Grunde zu gross ausfallen musste, für die Vorausberechnung künftiger Finsternisse keine Bedeutung haben konnte, dürfte nach dem Gesagten ebenfalls einleuchten.

Da es mir wichtig erscheint, alle Bedenken zu beseitigen, so soll noch auf zwei Punkte hingewiesen werden, welche für die Richtigkeit eines zwischen 48″ und 49″ liegenden Werthes von $V$ sprechen. An der oben erwähnten Stelle leitet Herr SEELIGER durch vollkommen andere Ueberlegungen aus dem ganzen Beobachtungsmaterial einen Mittelwerth 50″.6 ab, während er für die Ein- und Austritte des Mondrandes allein 46″.1 findet. Wenn auch diese beiden Zahlen nicht unabhängig von einander sind und sehr verschiedenes Gewicht haben, so kann man doch sagen, dass beide durch den von uns angenommenen Werth von $V$ gleich gut dargestellt werden. Und in der That ist auch das besagte $V_4$ durchaus nicht der kleinste Mittelwerth, der aus den vorliegenden Beobachtungen abgeleitet werden kann. Denn wollte man, wie in $V_5$ die weniger guten Beobachter, so einmal umgekehrt die besten einseitig bevorzugen, so käme man auf weit kleinere Zahlen. Der bei weitem beste Beobachter ist SCHMIDT, der allein ziemlich den dritten Theil aller Beobachtungen geliefert hat (948 von 2920) und dessen Beobachtungen immer ausserordentlich gut übereinstimmen. Nächst diesem dürfte MÄDLER die grösste Uebung besessen haben, obwohl er zu den hier benutzten Finsternissen nur 130 Beobachtungen beisteuert. Wie schon (I pag. 541) angegeben wurde, ist nun das Mittel

aus SCHMIDT's 948 Beobachtungen $V = 46''.44$
und ebenso aus MÄDLER's 130 Beobachtungen $V = 45.79$
und das Mittel aus beiden $V_6 = 46.36$.

Reducirt man dagegen die Zahlen auf mittlere Mondparallaxe $\pi_0$, so ergeben

SCHMIDT $V^0 = 45''.59$
MÄDLER $V^0 = 46.16$
beide im Mittel $V_6^0 = 45.66$.

Man sieht an diesen Zahlen, wie ausgezeichnet die Resultate von geübten Beobachtern übereinstimmen, ein Punkt, auf den wir später noch zurückzukommen haben. Für den allgemeinen Gebrauch dürften jedoch diese Werthe eben so wenig, wie die das andere Extrem darstellenden $V_5$ zu empfehlen sein, denn $V_5$ und $V_6$ werden etwa die äussersten Werthe sein, die man selbst bei gewaltsamer Behandlung der Beobachtungen nur erreichen kann. Innerhalb dieses Bereiches liegen aber die Werthe von $V_4$ an sehr passender Stelle, wie aus dieser Zusammenstellung folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $V_6$ | 46″.36 | $V_6^0$ | 45″.66 |
| $V_4$ | 49.50 | $V_4^0$ | 48.62 |
| $V_5$ | 50.53 | $V_5^0$ | 49.67. |

Hiernach dürfte gegen die Werthe von $V_4$ nichts mehr einzuwenden sein; man hätte also zu setzen entweder

$$V = 49''.50 = \text{const.} \quad \text{oder} \quad V = 48''.62\,\frac{\pi}{\pi_0}.$$

Wenn der Verfasser in der früheren Arbeit die letztere Form auch für zuverlässiger hielt, so hat er doch diese Frage, wie ja schon aus der Berechnung beider Mittelwerthe folgt, offen lassen wollen, da $V$ jedenfalls in viel complicirterer Weise von Sonnen- und Mondparallaxe und wohl auch von der Sonnendeclination abhängig ist, sodass man einstweilen $V =$ const. für ebenso richtig ansehen darf. Das bisherige Beobachtungsmaterial liefert keinerlei Anhaltspunkte zur Entscheidung dieser Frage, deren spätere theoretische Lösung jedoch nicht ausgeschlossen ist[1]). Für die praktische Rechnung hat man durch Verwendung des »Vergrösserungsfactors« endlich einen dritten Weg eingeschlagen, für dessen Berechtigung sich jedoch noch weniger sagen lässt.

1) In $S_2$ sind alle Mittel zur Beantwortung dieser Frage vorbereitet. Es wird hauptsächlich noch nöthig sein, für die Abhängigkeit der physiologischen Schattengrenze von der Lichtvertheilung in abschattirten Flächen durch das von Herrn Seeliger angewandte sinnreiche Verfahren entweder bestimmte Gesetze, oder doch wenigstens empirische Zahlen zu ermitteln. Herr Seeliger konnte leider auch nur den Schluss ziehen (pag. 58): »Es unterliegt aber kaum einem Zweifel, dass dieser Einfluss (der Mondparallaxe) nicht sehr bemerkbar sein wird und es wird jedenfalls gerechtfertigt sein, auf die Einwirkung der Veränderung der Mondparallaxe zunächst keine Rücksicht zu nehmen.«

# I. Uebersicht der Beobachtungsmethoden.

## 2.

Im Folgenden soll nun zunächst eine Uebersicht gegeben werden über die wichtigsten Methoden, die bei der Beobachtung der Mondfinsternisse in Anwendung kommen können. Wir unterscheiden:

1) die schon früher erledigten Contactbeobachtungen,
2) directe Messungen zur Bestimmung der Dimensionen des Schattens,
3) photographische Aufnahmen und
4) photometrische Messungen.

Die Messungen unter 2) lassen sich in zwei Gruppen theilen, die eine durchaus verschiedene Behandlung erfordern, nämlich

a) vollständige Ortsbestimmungen von Punkten des Schattenrandes und
b) Bestimmungen einer Beziehung zwischen zwei solchen Punkten.

Die zunächst zur Gruppe a) gehörigen absoluten Ortsbestimmungen am Altazimuth oder Aequatorial werden praktisch wohl nie angewendet werden, da dieselben gegenüber der Erschwerung der Berechnung kaum irgend welche Vortheile bieten. Der einzige Vorzug dieser Messungen wäre die theilweise Elimination des Mondortes, die jedoch bei dem gegenwärtigen Stande der Mondephemeriden wenig zu bedeuten hat. Bei der Reduction derartiger Messungen hätte man mittelst des Mondortes erst die Entfernung des beobachteten Punktes vom Beobachter zu bestimmen und erhielte dann direct die räumlichen Coordinaten des betreffenden Punktes der Schattenfläche. Die Menge der zu erzielenden Einstellungen würde, namentlich wenn zur Ablesung der Kreise Hülfskräfte zur Verfügung stehen, bei diesen Methoden eine ziemlich grosse sein, ein Umstand, der dieselben immerhin nicht ganz ohne Bedeutung erscheinen lässt.

Den wichtigeren Theil der Gruppe a) bilden die Messungen relativer Coordinaten gegen den Mittelpunkt (resp. bei der praktischen Ausführung den Rand) der Mondscheibe. Die Bestimmung der Rectascensions- und Declinationsdifferenzen am Refractor besitzt den grossen Vorzug, dass sie den Ort beliebiger Punkte der Schattengrenze

festzulegen gestattet, während sich mehrere andere Methoden nur auf die Hörnerspitzen oder den mitten zwischen ihnen liegenden Punkt anwenden lassen. Die Ausführung dieser Messungen würde so erfolgen, dass man die zu beobachtende Gegend auf den Declinationsfaden bringt und dann das Fernrohr festklemmt. Der Schnittpunkt der Schattengrenze mit dem Declinationsfaden bewegt sich nun längs der letzteren hin, wobei allerdings auch langsam andere Punkte des Schattens auf den Faden kommen, was jedoch ohne Bedeutung ist. Sobald der Schnittpunkt den Rectascensionsfaden passirt, giebt man das Signal. Ausserdem muss man noch mindestens zwei Mondränder zu beobachten suchen, was bei manchen Phasen allerdings auf Schwierigkeiten stossen kann.

Ist der beobachtete Punkt eine Hörnerspitze, so genügt es, nur eine Coordinate zu beobachten, wodurch das Verfahren wesentlich einfacher wird. So könnte man z. B., während das Fernrohr durch das Uhrwerk bewegt wird, abwechselnd mit der Mikrometerschraube eine Hörnerspitze und den Mondrand (tangential) einstellen, sei es in der Richtung des Stundenkreises oder in irgend einem anderen abgelesenen Positionswinkel. Unterscheidet sich die Einstellung auf die Spitze von der (durch Interpolation erhaltenen) gleichzeitigen Einstellung des Mondrandes um den Bogen $D$, so ist $h - D$ die Projection des Mondhalbmessers $h$ auf die am Positionskreis abgelesene Richtung. Man findet also durch diese Messungen direct den Positionswinkel des nach der Hörnerspitze gehenden Mondhalbmessers. Auch dieses Verfahren erlaubt bei seiner grossen Einfachheit ein sehr rasches Arbeiten und ausserdem ist die Reduction die denkbar einfachste, wie wir weiter unten noch sehen werden. Voraussetzung dieser Messungen in beliebigem Positionswinkel ist ein während weniger Minuten gleichmässig gehendes Uhrwerk. Kann man sich auf letzteres nicht verlassen, so kann man mit der Schraube nur Declinationsdifferenzen messen oder bei feststehendem Instrumente die Rectascensionen registriren.

Die eben besprochene Methode bildet, wie man sieht, schon den Uebergang zu Anschlüssen in Positionswinkel und Distanz. Verweilen wir zunächst noch bei dem speciellen Falle der Hörnerspitzen, so würde, da die Distanz immer gleich dem Mondradius ist, nur der Positionswinkel zu messen sein. Direct diese Messung auszuführen

ist nicht möglich, man müsste denn versuchen, etwa die Richtung der Tangente an den Mondrand bei der Schattenspitze zu bestimmen, doch dürfte das wohl sehr ungenau sein. Indessen lässt sich, wie wir soeben sahen, der Positionswinkel der Hörnerspitze sehr gut indirect messen. Ein dieses Ziel verfolgendes und speciell für den Gebrauch des Heliometers berechnetes Verfahren wurde schon im Jahre 1888 (A. N. 2831) von Herrn BRUNS in Vorschlag gebracht. Dasselbe besteht in der Messung der Länge einer in beliebiger, aber bekannter Richtung von der Spitze aus nach dem hellen Mondrande gezogenen Sehne. Während bei der obigen Projectionsmethode der Cosinus des Winkels gemessen wurde, den man zum abgelesenen Positionswinkel hinzuzulegen hat, wird bei der letztgenannten Sehnenmethode der Sinus des gleichen Winkels gemessen. Am Fadenmikrometer würde die Messung der Sehnen auf Schwierigkeiten stossen, da sich beide Endpunkte in rascher Bewegung befinden, am Heliometer hat man jedoch nur nöthig, die Hörnerspitze mit dem hellen Mondrande in Berührung zu bringen. Zur Erprobung dieses Verfahrens, welches gleichfalls eine reiche Ausbeute liefert, wurden am Leipziger Heliometer zahlreiche Messungen ausgeführt, deren Berechnung weiter unten folgt.

Die Polarcoordinaten beliebiger Punkte des Schattenrandes gegen den Mondmittelpunkt zu messen ist wieder nicht möglich, da der letztere nicht ohne Weiteres einstellbar ist. Wollte man an seiner Stelle etwa die Coordinaten gegen einen kleinen nahe der Mitte liegenden Krater messen, so müsste man die Librationsrechnung in Kauf nehmen, ohne dabei einen wesentlichen Vortheil zu haben. Dagegen ist die folgende Form der Polarcoordinatenmessung sehr brauchbar. Bei bewegtem Fernrohr stellt man den Mikrometerfaden tangential an einen beliebigen Punkt der Schattencurve, dann ebenso an den Mondrand und wiederholt diese Einstellung abwechselnd einige Mal. Sodann dreht man im Positionswinkel um ein beliebiges Stück und verfährt mit dem alsdann an den Faden kommenden Schattenpunkte ebenso. Man kann auf diese Art alle Punkte der Schattengrenze mit gleicher Schärfe einmessen, wobei die stets tangentiale Richtung des Fadens die grösste Gleichmässigkeit und Genauigkeit der Beobachtungen verbürgt. Ausserdem gehen diese Messungen so rasch vor sich, dass diese Methode, sobald die Grösse

des Gesichtsfeldes und des Mikrometers ihre Anwendung erlaubt, allen anderen bei Weitem vorzuziehen ist. Wurde die Messung im Positionswinkel $p$ ausgeführt und ist $p_c$ der Positionswinkel und $c$ die Länge der Centralen Mondmittelpunkt-Schattenmittelpunkt, so ist, abgesehen von kleinen Correctionen, die Länge des Schattenhalbmessers $\omega'$ an der beobachteten Stelle

$$\omega' = c \cos (p_c - p) + h - D .$$

Bisher wurde diese Tangentenmethode nur in dem speciellen Falle angewendet, wo der Winkel $p_c - p$ sehr klein ist, sodass dann die grösste Breite der hellen Mondsichel gemessen wird. Es ist dies die einzige Methode, die schon seit langer Zeit bekannt ist, sodass sich vereinzelte Messungen von Sichelbreiten schon im Anfange dieses Jahrhunderts vorfinden. Eine Reihe von 10 derartigen Messungen führte MÄDLER bei der sehr kleinen Finsterniss am 10. Juni 1835 aus und von SCHMIDT liegen 20 Messungen vom 22. Mai 1872 vor, doch haben beide Beobachter nur nach Augenmaass die Schraube möglichst in die Richtung der Pfeilhöhe gebracht und den Positionswinkel der Messung nicht bestimmt. Wie sich weiter unten zeigen wird, kann aber bei dieser Schätzung leicht ein Fehler von 20° und mehr eintreten, sodass die Resultate dieser beiden Reihen nicht ganz einwurfsfrei sind. In strenger Weise wurde das Verfahren zuerst am Leipziger Heliometer in Anwendung gebracht, jedoch ist zu beachten, dass nur, wenn der Winkel $p_c - p$ nahezu Null ist, am Heliometer wirkliche Sichelbreiten gemessen werden; ist er grösser, so erhält man nicht wie beim Fadenmikrometer den Abstand paralleler Tangenten, sondern es tritt eine kleine Complication der Rechnung ein.

### 3.

Die Messungen der Gruppe b) wird man nur zur Anwendung bringen, wenn man sich besondere Vortheile von denselben versprechen darf. So wäre es z. B. ganz sinnlos, am Refractor die beiden Hörnerspitzen wie zwei Sterne aneinander anzuschliessen. Denn da die Einstellungen bis zu 2 Minuten auseinander liegen können, so würden erst lange Reductionen wegen der Bewegung von Mond und Schatten nöthig sein. Für den Beobachter schwieriger, doch

für die Rechnung schon bequemer wäre die Messung der Länge und des Positionswinkels der Sehne zwischen den beiden Spitzen. Diese Methode kann ganz brauchbar werden, sobald bei centraler Bedeckung die Sehne sehr kurz geworden ist. Alsdann ändert sich der Positionswinkel nur sehr langsam, während die Sehne schnell veränderlich ist und eine scharfe Bestimmung von $\omega'$ ergiebt. Doch dürfte in diesem Falle die Tangenten-(Sichelbreiten-)messung immer noch mehr zu empfehlen sein.

Von grösserer Bedeutung ist eine andere hierher gehörige Methode, die einzige, welche die Willkür in der Schätzung der Schattengrenze ziemlich unschädlich zu machen gestattet. Ist man sich nämlich einmal darüber klar geworden, dass der geschätzte Schattenradius keine geometrisch, ja nicht einmal eine rein physiologisch bestimmte Grösse ist, da ihn ja jeder Beobachter je nach seiner Absicht grösser und kleiner messen kann, so kann man aus allen diesen Messungen nur zwei Resultate ableiten. Erstens kann man einen möglichst allgemein brauchbaren Mittelwerth des beobachteten Halbmessers $\omega'$, resp. der Grösse $V$ zu bestimmen suchen. Sobald dieser aber einmal festgestellt ist, würde eine weitere Fortsetzung der Beobachtungen keinen Zweck haben, wenn man nicht hoffen dürfte, eine zweite Frage, nämlich die nach der Form des Schattenquerschnittes, dadurch zu beantworten. Der Verfasser ist stets weit davon entfernt gewesen, anzunehmen, dass die beobachtete Vergrösserung des Erdschattens direct ihre Ursache im Schatten der Atmosphäre haben müsse. Der bei Weitem grösste Theil der Erscheinung würde auch zu beobachten sein, wenn die Erdatmosphäre nicht vorhanden wäre, denn erst in einiger Entfernung vom geometrischen Schattenrande fällt auf die Mondoberfläche eine für den Beobachter wahrnehmbare Menge Sonnenlichtes. Dagegen kann aber auch durchaus nicht bezweifelt werden, dass die Atmosphäre das Aussehen des Schattenrandes in merklicher Weise beeinflusst. Diejenigen Sonnenstrahlen, welche ohne Atmosphäre den geometrischen Schattenrand bilden würden, werden durch die Refraction um mehr als einen Grad von ihrem Wege abgelenkt, die höher liegenden nach und nach weniger, doch ist die Menge des auf diese Art in das Innere des Kernschattens gelangenden Lichtes ausreichend, um während einer totalen Finsterniss den Mond in hellrothem Lichte leuchten zu lassen.

Weggenommen wurde nun dieses Licht aus der Gegend des Schattenrandes, sodass also ohne Zweifel dort eine Verminderung des Lichtes eintritt. Ob jedoch die psychophysische Schattengrenze hierdurch weiter nach aussen rückt, das lässt sich vorläufig nicht sagen[1]). Auch das verschiedene Aussehen des total verfinsterten Mondes, der zuweilen in heller Kupferfarbe leuchtet, während er zu anderen Zeiten fast ganz verschwunden ist, sowie die Schwankungen in der Schärfe des Schattenrandes beweisen, dass Veränderungen in der Beschaffenheit der Atmosphäre sehr gut in den Schattenphänomenen, hauptsächlich wohl im Inneren des Kernschattens wahrgenommen werden können.

Ueberlegungen dieser Art berechtigen uns zu der Hoffnung, durch die Beobachtung der Mondfinsternisse etwas über den äusseren Anblick unserer Atmosphäre zu ermitteln. Denn der Mond dient uns bei diesen Erscheinungen gleichsam als ein Spiegel, in welchem wir den Rand der Erde von aussen her betrachten können; nur will die Beobachtung mittelst dieses Spiegels erst gelernt sein. Die Frage nach der Grösse des scheinbaren Schattens dürfen wir für erledigt halten und unsere weiteren Untersuchungen werden sich demnach hauptsächlich auf die Form desselben und die Lichtvertheilung in seinem Inneren erstrecken. Theoretisch ergiebt sich für den Querschnitt des Kernschattens in der Gegend des Mondes eine Ellipse, deren Axen in bestimmter Weise von den Erdaxen und der Sonnendeclination abhängen. Es tritt daher zunächst die Frage auf, ob sich aus den Beobachtungen die gleiche Form der Schattenellipse ergiebt. Da zu jedem $\omega'$ der Winkel $\chi$, den dasselbe mit der kleinen Axe der Schattenellipse bildet, berechnet werden kann, so hätte man nur durch die Endpunkte aller dieser Radien die wahrscheinlichste Ellipse zu legen. Jedoch zeigte es sich schon bei der Berechnung der Kraterantritte, dass die Grösse des Schattens von demselben Beobachter in den verschiedenen Phasen einer Finsterniss ganz verschieden geschätzt wird. Den gleichen Fehlerquellen unterliegen aber auch alle genannten

1) Herr SEELIGER fand durch seine Versuche mit rotirenden Scheiben für den wirklichen Erdschatten eine Vergrösserung von $V = 51''.0$, während sich für den idealen, ohne Atmosphäre gerechneten Schatten $V = 44''.7$ ergab, sodass also in der That etwa $\frac{1}{8}$ der ganzen Vergrösserung erst durch unsere Atmosphäre entsteht.

mikrometrischen Messungen. Denn sowohl die nach und nach eintretende Ermüdung des Auges als auch die in den einzelnen Stadien der Finsterniss stark variirende Helligkeit des Gesichtsfeldes wird die Schattengrenze physiologisch verschieben, sodass man nicht ohne Weiteres die im Verlaufe einer Finsterniss gemessenen $\omega'$ mit einander vergleichen kann. Neben den photographischen Aufnahmen, die ja diesen persönlichen Fehler ganz ausschliessen, ist daher zur Messung der Excentricität der Schattenellipse die folgende Methode zu empfehlen, welche unter geeigneten Umständen angewandt aus einer Einstellung direct die Abplattung der Ellipse ergiebt. Man beobachte nämlich nur den Positionswinkel der Sehne zwischen den beiden Hörnerspitzen, indem man bei schwacher Vergrösserung den Faden in die Richtung ihrer Verbindungslinie bringt und darauf achtet, dass derselbe auf beiden Seiten durch gleich helle Punkte geht. Der alsdann abgelesene Positionswinkel steht in einfacher Beziehung zur Abplattung der Schattenellipse. Erwähnt muss hier jedoch werden, dass diese Messungen nur dann Aussicht auf Erfolg haben, wenn die Sehne etwa 45° gegen die Axen der Ellipse geneigt ist; wird sie einer der Axen parallel, so ist ihre Richtung unabhängig von der Abplattung.

## 4.

Die photographischen Aufnahmen der Mondfinsternisse sind ohne Zweifel berufen, für die nächste Zeit das wichtigste, wenn nicht das allein brauchbare Material für die weitere Untersuchung der Form des Schattens zu liefern. Das photographische Verfahren ist einer so vielseitigen Anwendung fähig, dass es alle anderen Methoden in sich schliesst und besitzt dabei noch den unschätzbaren Vorzug, vom grössten Theile der systematischen Fehler anderer Messungen frei zu sein. Denn da man annehmen darf, dass gleich helle Punkte der Mondoberfläche auch die Platte gleichstark schwärzen, so werden die Curven gleicher Helligkeit auf der Schicht denen auf der Mondscheibe geometrisch ähnlich sein. Unter Helligkeit ist hier natürlich nur die Intensität derjenigen Strahlen zu verstehen, welche auf die benutzte Platte einwirken, sodass man bei Verwendung einer anderen Emulsion oder mit Hülfe von Sensibilisatoren oder farbigen Filtern eine andere Lichtvertheilung auf der Platte erhalten würde. Da nach den auf

der verfinsterten Mondscheibe erscheinenden Farben zu urtheilen in dem Lichte der einzelnen Schattenpartien die verschiedensten Strahlengattungen vorkommen, deren Intensitäten wohl kaum alle einander parallel verlaufen, so wird man durch die genannten Mittel auch die Vertheilung der verschiedenen Strahlen im Erdschatten ermitteln können.

Für die Ausmessung der Platten empfehlen sich zwei Methoden: man messe entweder rechtwinklige Coordinaten gegen den Mittelpunkt oder wende das oben beschriebene Tangentenverfahren an. Orientirt man die rechtwinkligen Coordinaten so, dass die eine Axe vertical steht, so wird die Reduction die denkbar einfachste, jedoch versagt dieses Verfahren seinen Dienst, sobald die Mondsichel sehr schmal geworden ist, da sich dann der Mondmittelpunkt nicht mehr mit genügender Schärfe bestimmen lässt. Das Tangentenverfahren ist dagegen unter allen Umständen anwendbar und ergiebt die Grösse aller Schattenradien mit stets gleichbleibender Schärfe. Eine Methode zur Ausmessung der rechtwinkligen Coordinaten, die ein möglichst gleichmässiges und rasches Ablesen des verwaschenen Schattenrandes erlaubt, wurde vom Verfasser vor längerer Zeit in Anwendung gebracht und hat sich ausgezeichnet bewährt. Auf einer Spiegelglasplatte stellt man ein Millimetergitter aus schwarzen Linien her und legt dasselbe auf die Schicht der auszumessenden Platte und zwar so, dass das eine Liniensystem dem Verticalkreise nahezu parallel ist. Beide Platten zusammen werden nun auf Bromsilberpapier photographisch vergrössert. Zwar muss der Lichtstrahl hierbei die Spiegelscheibe passiren, doch kann die hierdurch entstehende Verzeichnung ebenso wie die beim nachherigen Entwickeln auftretende Verziehung des Papieres ihren schädlichen Einfluss nur innerhalb der kleinen Gitterquadrate äussern und dürfte deshalb vollständig unmerklich sein. Durch geeignete Belichtungszeit bei der Originalaufnahme sowie namentlich auch bei der Vergrösserung kann man nun erreichen, dass auf dem Positiv die Schattencurve ziemlich scharf erscheint und sich dann gut in die hellen Gitterstriche einmessen lässt. Doch durch einen Kunstgriff gelingt es, die Genauigkeit und Gleichmässigkeit der Ablesungen noch erheblich zu steigern. Man legt zu diesem Zwecke ein recht gleichmässiges Pauspapier auf das Positiv, wodurch die schwächeren Lichtpartien verschwinden, sodass der Schattenrand noch

schärfer erscheint. Nun überblickt man die ganze Schattencurve und zeichnet dieselbe mit einem schnellen Bleistiftzuge auf dem Pauspapier nach. Ohne letzteres zu verschieben sind sodann nur noch die Durchschnittspunkte dieser Linie mit den Gitterstrichen abzulesen. Um die persönlichen Schätzungsfehler noch weiter zu eliminiren, kann man dasselbe Verfahren an demselben Positiv von zahlreichen Beobachtern wiederholen lassen. Die angestellten Versuche haben ergeben, dass ein Beobachter innerhalb einer Minute 7 bis 8 Ablesungen ausführen kann.

Dass man nach allen diesen Manipulationen eine ganz andere Stelle des Schattens als Grenze erhalten wird, als ein Beobachter am Ocular, versteht sich von selbst, aber immer wird die eingemessene Linie eine Curve constanter chemischer Intensität sein. Schon durch die Dauer der Aufnahme des Negatives wird die Grösse des erhaltenen Schattendurchmessers bestimmt, z. B. ergaben Aufnahmen von $1^s$ Belichtungsdauer eine Vergrösserung $V$ zwischen 3 und 4 Bogenminuten, während die erste Spur von Schwärzung des Kornes immer noch etwa $V = 80''$ ergab. An der Stelle der optischen Schattengrenze war also in $1^s$ noch keine Spur von chemischer Wirkung zu bemerken. Bei einer Belichtung von $90^s$ trat dagegen eine sehr scharfe Schattengrenze auf, die nur noch $10''$ bis $20''$ vom geometrischen Schattenrande entfernt war, während Schwärzung des Kornes bis zu $6'$ innerhalb des Kernschattens nachzuweisen war.

## 5.

Um sowohl aus den photographischen Aufnahmen, als auch aus den directen Beobachtungen für die Grösse des Schattens verständliche und zur weiteren theoretischen Behandlung brauchbare Zahlen zu erhalten, ist es nöthig, diese Methoden zu photometrischen auszubilden. Schon bei den Ocularbeobachtungen, noch deutlicher aber auf der photographischen Platte zeigt sich der Einfluss der Albedo der verschiedenen Mondgegenden auf die Grösse des Schattens: die Schattengrenze ist keine glatte Curve, sondern besitzt eine Menge Auszackungen. Zur Vermeidung der hieraus entspringenden Fehler hätte man die photometrische Beobachtung etwa in der folgenden Weise anzustellen. Durch ein in der Bildebene des Refractors

angebrachtes Diaphragma lässt man nur das Licht von einer kleinen Fläche des Mondes in ein geeignetes Photometer eintreten und hält unter Benutzung eines kräftigen Suchers immer genau denselben Punkt der Mondoberfläche innerhalb der Blende. Wählt man nun zur Beobachtung z. B. bei einer totalen Finsterniss eine Stelle aus, welche central bedeckt wird und macht vom ersten Eintreten des Halbschattens an bis nach dessen Verschwinden während der ganzen Dauer der Finsterniss Einstellungen am Photometer, so erhält man direct die Helligkeit aller Punkte längs zweier diametraler Schattenradien, ausgedrückt etwa in Theilen der Helligkeit bei Vollmond.

Auch die Photographie lässt sich für diese photometrischen Messungen mit Vortheil verwenden. Auf den für die Aufnahmen bestimmten Platten belichtet man zunächst mittelst eines exact arbeitenden Apparates und einer constanten Lichtquelle eine Helligkeitsscala, d. h. von einer Reihe nebeneinander liegender kleiner Quadrate wird etwa das erste $1^s$, das zweite $2^s$, das dritte $4^s$, das vierte $8^s$ u. s. w. belichtet. Am photographischen Refractor werden dann auf diese Platten Aufnahmen des ganzen Verlaufes der Finsterniss sowie auch vorher und nachher des Vollmondes gemacht. Nehmen wir vorläufig an, alle diese Belichtungen wären von genau gleicher Dauer $t^s$ gewesen, so ist der Gedankengang sehr einfach: Das Licht eines bestimmten Punktes der Mondscheibe wirkt im Brennpunkte des Refractors (innerhalb $t^s$) ebenso stark, wie die benutzte Normallichtquelle in $x^s$, wobei man die Zahl $x$ durch Aufsuchen der gleichstark geschwärzten Stelle in der Scala der Platte findet. Die Zeitscala der $x$ verwandelt man am besten auch experimentell in eine Intensitätsscala, indem man zu den verschiedenen Belichtungsdauern $x$ diejenigen Entfernungen der Normalflamme bestimmt, in welchen dieselbe bei immer constanter Belichtungszeit dieselben Schwärzungen hervorbringt. Aus diesen Entfernungen ergeben sich aber direct die Intensitäten des Lichtes auf der Platte. Man kann also sagen, dass mit der Auffindung von $x$ die Helligkeit des beobachteten Punktes in Theilen der Helligkeit der Flamme ausgedrückt sei — auf constante Factoren kommt es hier nicht an. Findet man so für denselben Punkt in voller Sonnenbeleuchtung die Intensität seines Lichtes $= J_0$, in irgend einer Phase $= J$, so ist wieder $\frac{J}{J_0}$ die Helligkeit in Theilen der Vollmondbeleuchtung.

Die Entfernung des beobachteten Punktes vom Schattenmittelpunkte erhält man hierbei stets nach den für die Kraterbedeckungen entwickelten Formeln. Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass bei diesem ganzen Verfahren keine einzige unzulässige Annahme zu machen war. Es ist nur nöthig, dass jede Platte in ihrer ganzen Ausdehnung gleich empfindlich ist und ausserdem sollen die Platten von derselben chemischen Beschaffenheit, sagen wir also von derselben Plattensorte sein, damit nicht die zwei Lichtquellen auf die einzelnen Platten ganz verschieden einwirken. Nicht nöthig ist die gleiche Empfindlichkeit oder die gleiche Entwicklung der Platten. Da die Bedingung der gleichen Belichtungsdauer $t$ nicht leicht zu erfüllen und auch eine unnöthige Beschränkung des Verfahrens ist, so lassen wir dieselbe vollständig fallen und denken uns dafür an dem Objectivverschlusse — nur ein solcher ist hier zu verwenden — einen elektrischen Contact angebracht, welcher die Belichtungsdauern selbstthätig registrirt. Die schon oben zur Uebertragung der Zeitscala in die Intensitätsscala ausgeführten Messungen ermöglichen nun wieder rein empirisch ohne jede Hypothese die Reduction der Aufnahmen auf gleiche Belichtungszeit. Da man bei dieser Methode hunderte von Punkten der ganzen Mondscheibe auf jeder einzelnen Aufnahme zum Vergleiche heranziehen kann, so ist dieselbe an Nutzbarkeit der directen photometrischen Messung weit überlegen und auch an Genauigkeit wird sie dieselbe wohl erreichen. Dagegen ist letztere durchaus nicht zu entbehren, da ja das photographische Verfahren wieder nur die chemischen, gerade auf die betreffende Plattensorte wirkenden Strahlen zu messen gestattet. Beispielsweise gab eine hochempfindliche, jedoch nicht orthochromatische Platte mit einem ziemlich lichtstarken Objectiv (Cometensucher) $90^s$ belichtet noch keine Spur des rothen Lichtes vom total verfinsterten Monde wieder, während derselbe ziemlich hell zu sehen war.

Noch ein weiteres photographisches Verfahren kann auf durchaus anderem Wege möglicherweise recht brauchbare Resultate geben. Auf die in gleicher Weise vorbereiteten Platten mache man vor und nach der Finsterniss eine Reihe von Aufnahmen des Vollmondes mit verschiedenen Belichtungszeiten. Misst man nun die Durchmesser dieser Bilder, so wird sich für jede bestimmte Belichtungszeit eine

ganz bestimmte Irradiation ergeben. Aus der Irradiation kann man also auch umgekehrt auf die Belichtungsdauer oder, mit Hülfe der oben besprochenen Uebertragung, auf die Intensität des Lichtes an den beiden eingestellten Randpunkten schliessen. Bei den Aufnahmen während der Finsterniss misst man dann nur den Durchmesser, der senkrecht zu der Verbindungslinie des Mondmittelpunktes mit dem Schattenmittelpunkte steht. Ob dieses Verfahren mit den beiden früher genannten photometrischen Methoden concurriren kann, wird erst der Versuch ergeben; jedenfalls kann der Verfasser schon jetzt versichern, dass die Irradiation in verschiedenen Abständen vom Schattencentrum ausserordentlich verschieden ist, ein Punkt, auf den wir später noch ausführlich zurückzukommen haben.

## II. Ableitung der Formeln für die wichtigsten Messungsmethoden.

### 6.

Die Berechnung der mikrometrischen Messungen auf der Mondscheibe wird ziemlich einfach, sobald man auf die Benutzung völlig strenger Formeln verzichtet. Da nun die Beobachtungen der verwaschenen Schattengrenze immer auf viele Bogensecunden unsicher sind, so soll auch hier, wie schon bei den Kraterbedeckungen, nur darauf geachtet werden, dass die bei der Rechnung begangenen Vernachlässigungen nur im ungünstigsten Falle $1''$ erreichen, im Allgemeinen jedoch wesentlich kleiner bleiben.

Während bei den Contactbeobachtungen die Stellung des Beobachters auf der Erdoberfläche ohne Einfluss auf die beobachteten Antrittszeiten war, die daraus entspringende parallaktische Libration also nicht berechnet zu werden brauchte, ist umgekehrt bei allen mikrometrischen Anschlüssen der eben genannte der einzig merkliche Theil der Libration. Für die aus diesem Grunde nöthige Reduction auf den Erdmittelpunkt sollen daher zunächst die einfachsten Formeln aufgestellt werden.

Die durch den Beobachtungsort, den Erdmittelpunkt und den Mondmittelpunkt gelegte Ebene habe am Mittelpunkte der Mondscheibe, vom Beobachter aus gesehen, den Positionswinkel $g$, vom

Erdmittelpunkte aus $g_0$, sodass also $g$ und $g_0$ die parallaktischen Winkel sind, bezogen auf die geocentrische Verticalebene. Die Grössen ohne unteren Index sollen sich auf den Beobachtungsort, die mit dem Index $_0$ auf den Erdmittelpunkt beziehen. Es seien

$\alpha$ $\alpha_0$ die Rectascension des Mondes,
$\delta$ $\delta_0$ die Declination » »
$h$ $h_0$ der Halbmesser » »
$\tau$ $\tau_0$ die Entfernung » »
$\tau'$ $\tau_0'$ die Entfernung eines Punktes der Mondoberfläche,
$F$ $F_0$ der selenocentrische Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkte der Mondscheibe. Ferner sei
$\mu$ die Höhenparallaxe und
$\varrho$ der lineare Radius des Mondes.

Aus $\alpha_0$, $\delta_0$, $\tau_0$ kann man leicht streng die Werthe $\alpha$, $\delta$, $\tau$, $\mu$, $g_0$ und $g$ berechnen. Da jedoch ein Positionswinkel am Mondmittelpunkte um fast $4'$ falsch sein müsste um am Mondrande einen Fehler von $1''$ zu ergeben, so genügt es, wenn wir die Parallaxe in $\alpha$ und $\delta$ sowie $h$ nach einer der bekannten Methoden berechnet annehmen und dann setzen:

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 - \delta &= \mu \cos g_0 \\ (\alpha_0 - \alpha) \cos \delta &= \mu \sin g_0 \\ g_0 - g &= \mu \sin g_0 \operatorname{tg} \delta = (\alpha_0 - \alpha) \sin \delta . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ferner besteht die Beziehung

$$\tau \sin h = \tau_0 \sin h_0 = \varrho . \tag{2}$$

Es sei nun der Ort eines Punktes der Mondoberfläche in Polarcoordinaten vom Mittelpunkte der Mondscheibe aus gemessen und zwar die Distanz $D'$ in beliebiger Einheit und der Positionswinkel $P'$ von einer beliebigen Richtung an. Um $D'$ für Refraction zu corrigiren sei es mit $\lambda$ und zur Umwandelung in Bogensecunden mit $\sigma$ zu multipliciren. Die Correctionen des Positionswinkels für Refraction und Instrumentalfehler seien $R$ und $J$. Die in der gebräuchlichen Weise ausgedrückten, von Refraction befreiten Polarcoordinaten sind also

$$\begin{aligned} D &= D' \lambda \sigma \\ p &= P' + J + R , \end{aligned}$$

während der vom Verticalkreise an gezählte Positionswinkel wird:

$$P = p - g = P' + J + R - g. \quad (3)$$

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnung ein

$$\varDelta = \frac{\sin D}{\sin h}, \quad (4)$$

wofür wir je nach Bedarf auch schreiben können

$$\varDelta = \frac{D}{h},$$

denn der hierbei begangene Fehler $\varDelta h$ — arc sin ($\varDelta$ sin $h$) erreicht sein Maximum, wenn $\cos D = \frac{\sin h}{h}$ ist. Dies ergiebt für $h = 17'$ einen grössten Fehler von 0.″0013 bei $D = 10'$. Es ist also $\varDelta$ die in Theilen des scheinbaren Halbmessers ausgedrückte Distanz. Setzen wir nun

$$\begin{aligned} \xi &= \varDelta \cos P \\ \eta &= \varDelta \sin P, \end{aligned} \quad (5)$$

so sind $\xi$, $\eta$ die rechtwinkligen in Theilen des scheinbaren Mondhalbmessers ausgedrückten Coordinaten parallel und senkrecht zum geocentrischen Verticalkreise. Bezeichnen wir nun mit $X$, $Y$, $Z$ die rechtwinkligen Coordinaten gegen den Mondmittelpunkt, $X$ und $Y$ parallel zu $\xi$ resp. $\eta$, $Z$ nach dem Beobachter hin gerichtet, so haben wir

$$\begin{aligned} F &= 180° - D - \text{arc sin}\, \varDelta \\ X &= \varrho \sin F \cos P \\ Y &= \varrho \sin F \sin P \\ Z &= \varrho \cos F. \end{aligned}$$

Wegen

$$\varrho \sin F = \tau' \sin D \quad (6)$$

unter Benutzung von (4) und (5) geht dies über in

$$\begin{aligned} X &= \xi \tau' \sin h \\ Y &= \eta \tau' \sin h \\ Z &= \zeta \tau' \sin h. \end{aligned}$$

Die hier zur Erreichung der Symmetrie eingeführte Grösse $\zeta$ unterliegt der Bedingung

$$\varrho \cos F = \zeta \tau' \sin h,$$

woraus nach (6) folgt

$$\zeta = \varDelta \cot F.$$

Drehen wir nun um die Y-Axe um den Winkel $\mu$, sodass nun $Z_0$ durch den Erdmittelpunkt geht, so haben wir

$$X_0 = X\cos\mu + Z\sin\mu$$
$$Y_0 = Y$$
$$Z_0 = Z\cos\mu - X\sin\mu$$

und hieraus folgen unter Benutzung der Abkürzung

$$Q = \frac{\tau'\sin h}{\tau_0'\sin h_0}$$

die geocentrischen Coordinaten

$$\xi_0 = Q\xi\cos\mu + Q\zeta\sin\mu$$
$$\eta_0 = Q\eta$$
$$\zeta_0 = Q\zeta\cos\mu - Q\xi\sin\mu$$

oder auch die Polarcoordinaten:

$$\Delta_0\cos P_0 = Q\Delta\cos P\cos\mu + Q\Delta\cot F\sin\mu$$
$$\Delta_0\sin P_0 = Q\Delta\sin P$$
$$\Delta_0\cot F_0 = Q\Delta\cot F\cos\mu - Q\Delta\cos P\sin\mu\,.$$

Diese Formeln zur Uebertragung der topocentrischen in geocentrische Werthe sind noch vollkommen streng. Für alle Fälle der praktischen Anwendung kann man sie jedoch erheblich vereinfachen. Schreiben wir nach (2) zunächst den Factor $Q$ in der Form

$$Q = \frac{\tau'\tau_0}{\tau_0'\tau}\,,$$

so sieht man sofort, dass derselbe äusserst nahe $= 1$ sein muss, da die Verhältnisse $\tau' : \tau_0'$ und $\tau : \tau_0$ sehr nahe gleich sind. Eine nähere Untersuchung ergiebt, dass $Q$ stets zwischen den Grenzen $1 \pm 0.0000893$ bleibt. Der grösste bei der Annahme $Q = 1$ zu begehende Fehler ist also $0.0000893\,h = \pm\,0''.092$.

Hiernach haben wir innerhalb $0''.1$ genau:

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= \xi\cos\mu + \zeta\sin\mu\\ \eta_0 &= \eta\\ \zeta_0 &= \zeta\cos\mu - \xi\sin\mu\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_0\cos P_0 &= \Delta\cos P\cos\mu + \Delta\cot F\sin\mu\\ \Delta_0\sin P_0 &= \Delta\sin P\\ \Delta_0\cot F_0 &= \Delta\cot F\cos\mu - \Delta\cos P\sin\mu\,,\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

wobei $F = 180° - \Delta h - \text{arc}\sin\Delta$ und $\zeta = \Delta\cot F$ ist.

Die letzten Formeln sind immer noch so streng, dass sie z. B. auch für die Ausmessung der Positionen von Mondformationen genügende Schärfe besitzen. Ziehen wir jedoch die Grenze des zulässigen Fehlers nur wenig weiter, so vereinfachen sich dieselben noch ganz erheblich. Setzen wir $\cos\mu = 1$, so ist die begangene Vernachlässigung im schlimmsten Falle $2h\sin^2\frac{\mu}{2} = 0''16$. Wir haben also zunächst auf $0''25$ genau

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \xi + \zeta\sin\mu \\ \eta_0 &= \eta \\ \zeta_0 &= \zeta - \xi\sin\mu. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Aus (8) erhalten wir durch eine einfache Umformung ebenso

$$\left.\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta + \Delta\cot F\cos P\sin\mu \\ P_0 &= P - \mu\cot F\sin P. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Der grösste Fehler in $\Delta_0$ beträgt hierbei nur $0''13$, in $P_0$ bleibt er für $D > 1'$ stets kleiner als $0''5$ (im Bogen grössten Kreises). Für grössere $D$ ist er ganz unmerklich, für kleinere jedoch wird die letzte Formel unbrauchbar.

Betreffs der Grösse $\cot F$ sei noch bemerkt, dass sehr nahe

$$\Delta\cot F = \sqrt{1 - \Delta^2}$$

oder

$$\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$$

ist; jedoch wird der Winkel $F$ bei der späteren Rechnung auch noch zu einem anderen Zwecke gebraucht.

Zählt man die Positionswinkel in der gebräuchlichen Weise, so ergeben sich aus (10) und (3) die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta + \Delta\cot F\cos(p - g)\sin\mu \\ p_0 &= p + (\alpha_0 - \alpha)\sin\delta - \mu\cot F\sin(p - g). \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Liegt der beobachtete Punkt im scheinbaren Mondrande, so ist $\Delta = 1$ und $F = 90° - h$. Es werden dann $P_0 - P$ und $\Delta_0 - \Delta$ Grössen zweiter Ordnung ($< 0''2$), mithin ist für diese Punkte

$$\left.\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta = 1 \\ P_0 &= P \\ p_0 &= p + (\alpha_0 - \alpha)\sin\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Zieht man zwischen zwei solchen Punkten eine Sehne, so folgt aus der Aehnlichkeit des topocentrischen und geocentrischen Dreieckes unmittelbar für deren Länge und Positionswinkel

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= D\frac{h}{h_0} \\ P_0 &= P \\ p_0 &= p + (\alpha_0 - \alpha)\sin\delta. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ein weiteres, im Folgenden an den Positionswinkeln häufig anzubringendes Correctionsglied ist an dieser Stelle noch zu erwähnen, nämlich die als Convergenz der Meridiane bekannte Grösse, deren Ableitung ich hier übergehen kann. Ist $D$ die Distanz zweier Punkte $P_1$ und $P_2$ an der Sphäre, $p_1$ der Positionswinkel der Richtung $P_1P_2$ bei $P_1$, $p_2$ derjenige der Verlängerung von $D$ über $P_2$ hinaus bei $P_2$ gemessen, so ist

$$n = p_2 - p_1 = D\sin p_1 \operatorname{tg}\delta. \tag{14}$$

In den folgenden Paragraphen sollen nun die Formeln aufgestellt werden für diejenigen Messungsmethoden, die entweder schon praktisch angewendet wurden oder deren Anwendung sich für die Zukunft doch am meisten empfiehlt.

## 7.

### Sehnenmethode.

Nach dem Vorschlage von Bruns (A. N. 2831) wird am Heliometer der Positionswinkel und die Länge einer Sehne gemessen, die von einer Hörnerspitze aus nach einem Punkte des hellen Mondrandes geht. Die Beobachtung ergiebt direct die Länge $D'$ in Scalentheilen und die Ablesung am Positionskreise $P'$.

Durch $P'$ und $D'$ ist die Lage der Hörnerspitze vierdeutig bestimmt, da man in der beobachteten Richtung $P'$ im Allgemeinen zwei Sehnen von der Länge $D'$ in die Mondscheibe legen kann, an deren vier Endpunkten der gemessene Punkt des Schattenrandes liegen kann. Um in der Rechnung diese Vieldeutigkeit zu vermeiden, definiren wir $P'$ und geben $D'$ ein Vorzeichen nach der folgenden einfachen Regel:

Man denke sich das über der Sehne nach dem Mondmittelpunkte hin zu construirende gleichschenklige Dreieck im Sinne wachsender Positionswinkel um den Mondmittelpunkt gedreht. Das bei dieser Bewegung vorausgehende Ende der Sehne soll als negatives, das nachfolgende als positives bezeichnet werden. Unter $P'$ wollen wir dann den Positionswinkel des positiven Endes, an der Mitte der Sehne gemessen, verstehen und $D'$ soll das Zeichen $+$ oder $-$ erhalten, je nachdem der eingemessene Schattenpunkt am positiven oder negativen Ende der Sehne lag.

Zunächst erhalten wir die wegen Refraction und Instrumentalfehler verbesserten Grössen

$$D = D'\lambda\sigma$$
$$p = P' + J + R\,.$$

Aus $D$ ergiebt sich nun der halbe Winkel an der Spitze des oben genannten Dreieckes

$$\sin\iota = \frac{D}{2h} = \frac{\lambda\sigma}{2h}D'\,.$$

Die Grösse $\frac{\lambda\sigma}{2h}$ ist mit der Zeit langsam veränderlich und wird in eine Tafel gebracht; $\iota$ hat das Vorzeichen von $D$ und wird immer $< 90°$ genommen.

Der am Mittelpunkte der Sehne gemessene Positionswinkel $p$ wird nach (14) an den Mondmittelpunkt übertragen durch die Correction

$$n = -h\cos\iota\cos p\operatorname{tg}\delta\,.$$

Der Positionswinkel des nach dem beobachteten Punkte gezogenen Mondhalbmessers wird dann $p + n + 90° - \iota$, und sein geocentrischer Werth nach (12)

$$p_0 = p + n + 90° - \iota + (\alpha_0 - \alpha)\sin\delta\,.$$

Addiren wir endlich zu $p_0$ noch den Winkel $90° + \nu + q_1$, wobei $\nu$ die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik und $q_1$ der Winkel zwischen Breiten- und Declinationskreis am Mondmittelpunkte ist, so ist der erhaltene Winkel

$$\psi = p + n + 180° + (\alpha_0 - \alpha)\sin\delta + \nu + q_1 - \iota$$

identisch mit dem früheren Winkel $\psi$ (siehe I, p. 393); es ist der Winkel, den der nach dem beobachteten Punkte gezogene Mond-

radius mit der Westseite der Mondbahn einschliesst, gezählt in der Richtung der Positionswinkel. Die Summe der Winkel

$$180^\circ + (\alpha_0 - \alpha)\sin\delta + \nu + q_1$$

ist nur von der Zeit abhängig und wird daher tabulirt. Wurde längere Zeit hindurch bei derselben Einstellung des Positionskreises beobachtet, so ist auch $P' + J + R + n$ mit in diese Summe aufzunehmen. Von hier an ist die Rechnung die gleiche, wie bei den Kraterbedeckungen. Der beobachtete Schattenradius $\omega'$ folgt (I p. 393) aus

$$\omega' \cos\mu = e + h_0 \sin\psi$$
$$\omega' \sin\mu = (\vartheta - t_0)\, dS - h_0 \cos\psi\,.$$

Mit der kleinen Axe der Schattenellipse bildet $\omega'$ den Winkel

$$\chi = \mu - (\nu + q),$$

wobei $q$ wie früher (am Schattenmittelpunkte liegend) folgt aus

$$\operatorname{tg} q = \cos\varDelta_2 \operatorname{tg}\varepsilon_2\,,$$

während man zur Berechnung des am Mondmittelpunkte liegenden $q_1$ hat

$$\sin q_1 = \frac{\cos\alpha_0 \sin\varepsilon_2}{\cos b},$$

wobei der Cosinus der Mondbreite $b$ auch einfach $= 1$ gesetzt werden kann. Der theoretische Schattenradius ist (I, p. 394)

$$\omega = \omega_{a_2} + (\vartheta - t_0)\, d\pi - u \cos^2\chi$$

und die beobachtete Vergrösserung

$$V = \omega' - \omega\,.$$

Die Rechnung bei der Seite 376 besprochenen Projectionsmethode ist ganz analog, nur hat an Stelle der Gleichung

$$\sin\iota = \frac{D}{2h}$$

hierbei die andere zu treten:

$$\cos\iota = \frac{h - D}{h}\,.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erkennt man auch sofort, dass die Sehnenmessung die genauesten Werthe liefert, wenn $D$ möglichst klein ist, bei $D = 2h$ aber unbrauchbar wird. Die andere Methode ist dagegen für $D = h$ am schärfsten und für $D = 0$ und

$D = 2h$ gleich unsicher. Nach diesen Gesichtspunkten hat man bei der Anwendung dieser Methoden den Positionskreis geeignet einzustellen.

### 8.

### Tangentenmethode.

Es sei entweder am Fadenmikrometer oder auf der photographischen Platte der Abstand $D'$ zweier paralleler Tangenten gemessen, von denen die eine an den Schattenrand, die andere an den hellen Mondrand gelegt wurde. Die beobachtete Richtung dieses Abstandes sei $P'$. Zunächst werden $D'$ und $P'$ wieder für Instrumentalfehler und Refraction corrigirt, sodass man hat

$$D = D'\sigma\lambda$$
$$P = P' + J + R - g\,.$$

Ist nun $c_0$ der geocentrische Abstand des Mondes vom Schattencentrum und $\gamma$ der gegen die Mondbahn gemessene Positionswinkel von $c_0$ am Mittelpunkte des Schattens, so haben wir (I, p. 393)

$$c_0 \cos\gamma = e$$
$$c_0 \sin\gamma = (\vartheta - t_0)dS$$

und der in der gebräuchlichen Weise gezählte Positionswinkel von $c_0$ ist

$$p_c = \gamma - (\nu + q)\,.$$

Nach (14) ist der entsprechende Winkel am Mondmittelpunkte

$$p_c' = p_c + c_0 \sin p_c \operatorname{tg}\delta$$

und endlich von der Verticalen an gerechnet

$$P_c = p_c' - g_0\,.$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass der topocentrische Werth von $P_c$ dem geocentrischen gleich ist. Denn die Gerade $c_0$ schneidet die Mondkugel in zwei Punkten des scheinbaren Mondrandes und nach (13) ist für die Verbindungslinie zwischen diesen Punkten d. h. für $c_0$ $P_0 = P$. Es ist also auch topocentrisch

$$P_c = \gamma - (\nu + q) + c_0 \sin p_c \operatorname{tg}\delta - g_0\,,$$

während der topocentrische Werth von $c_0$ wird

$$c = \frac{c_0 h}{h_0}\,.$$

Der weitere Gang der Rechnung erklärt sich nun aus der folgenden Figur:

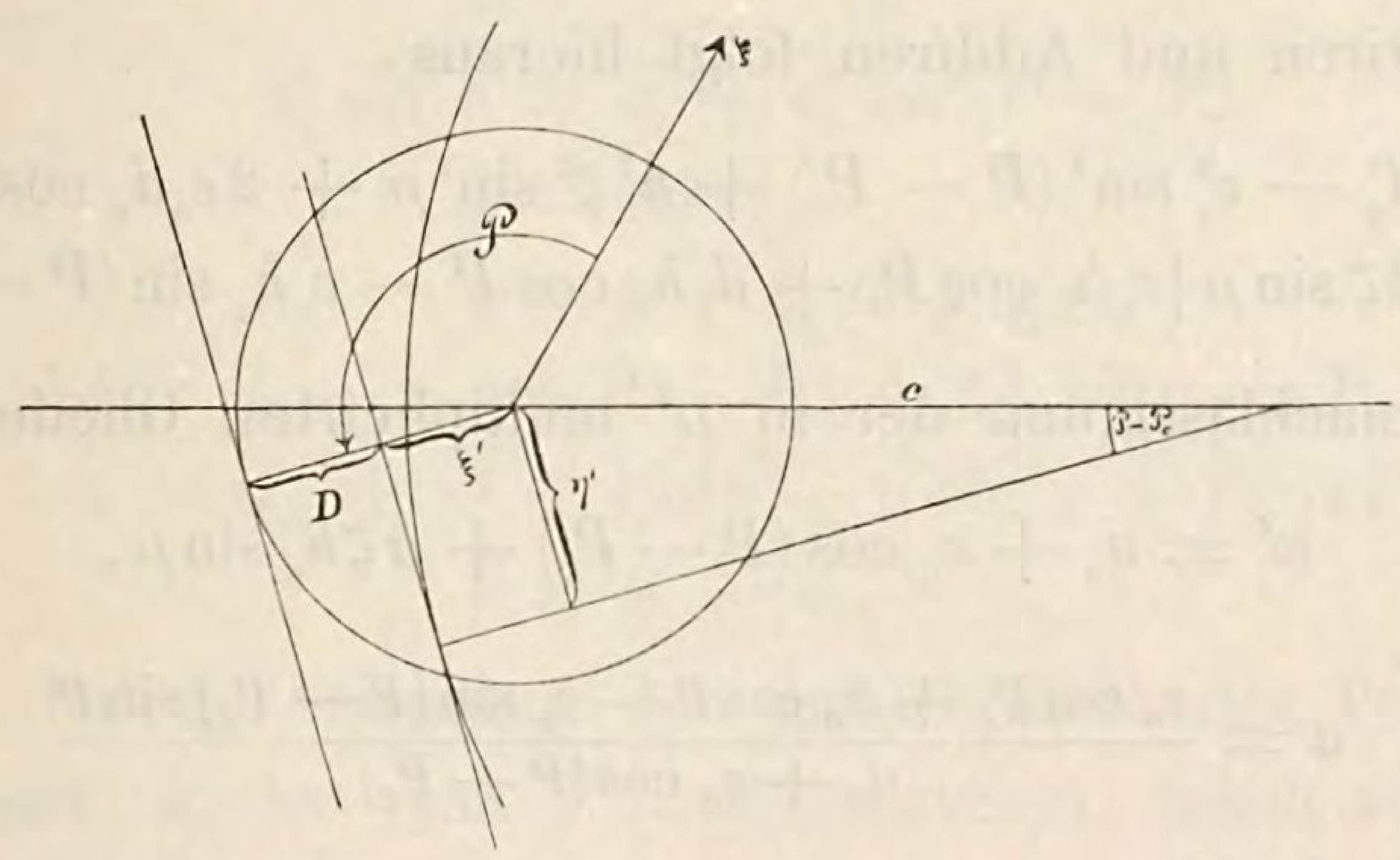



Fig. 1.

Setzen wir

$$\xi' = \frac{h - D}{h}$$

$$\eta' = \frac{c \sin (P - P_c)}{h} = \frac{c_0 \sin (P - P_c)}{h_0},$$

so sind die rechtwinkligen Coordinaten des beobachteten Schattenpunktes nach unserer früheren Bezeichnungsweise

$$\xi = \xi' \cos P - \eta' \sin P$$
$$\eta = \xi' \sin P + \eta' \cos P$$

und geocentrisch nach (9)

$$\xi_0 = \xi + \zeta \sin \mu$$
$$\eta_0 = \eta .$$

Ist noch zur Abkürzung

$$d_0 = h_0 \xi' = h_0 - \frac{h_0 D}{h},$$

so sind die Winkelwerthe dieser letzten Coordinaten

$$h_0 \xi_0 = d_0 \cos P - c_0 \sin (P - P_c) \sin P + h_0 \zeta \sin \mu$$
$$h_0 \eta_0 = d_0 \sin P + c_0 \sin (P - P_c) \cos P .$$

In demselben System sind nun die Coordinaten des Schattenmittelpunktes $- c_0 \cos P_c$ und $- c_0 \sin P_c$ .

Für die Länge und den Positionswinkel des beobachteten geocentrischen Schattenhalbmessers haben wir daher:

$$\omega' \cos P_\omega = c_0 \cos P_c + d_0 \cos P - c_0 \sin(P - P_c) \sin P + h_0 \zeta \sin\mu$$
$$\omega' \sin P_\omega = c_0 \sin P_c + d_0 \sin P + c_0 \sin(P - P_c) \cos P .$$

Durch Quadriren und Addiren folgt hieraus

$$\omega'^2 = c_0^2 + d_0^2 - c_0^2 \sin^2(P - P_c) + h_0^2 \zeta^2 \sin^2\mu + 2 c_0 d_0 \cos(P - P_c)$$
$$+ 2\zeta \sin\mu \{c_0 h_0 \cos P_c + d_0 h_0 \cos P - c_0 h_0 \sin(P - P_c) \sin P\}$$

und bei Vernachlässigung der in $\mu^2$ multiplicirten Glieder:

$$\omega' = d_0 + c_0 \cos(P - P_c) + a\zeta h_0 \sin\mu ,$$

wobei

$$a = \frac{c_0 \cos P_c + d_0 \cos P - c_0 \sin(P - P_c) \sin P}{d_0 + c_0 \cos(P - P_c)}$$

ist. Setzen wir jetzt

$$\cos P_c = \cos P \cos(P - P_c) + \sin P \sin(P - P_c)$$

ein, so folgt $a = \cos P .$

Der Winkel $P_\omega$ selbst wird nur etwa auf Zehntelgrade genau gebraucht, sodass wir direct $P_\omega = P$ setzen können. Der lästigste Theil der Rechnung ist die Bestimmung von $\zeta$ und $F$, die für jede einzelne Messung auszuführen ist, obwohl hierbei zwei bis drei Decimalen genügen. Nach § 6 haben wir

$$\sin G = \varDelta$$
$$F = 180^\circ - D_1 - G$$
$$\zeta = \varDelta \cot F$$

und wir finden hier $D_1$ und $G$ aus den beiden Gleichungen

$$D_1^2 = h_0^2 \sin^2 G = d_0^2 + c_0^2 \sin^2(P - P_c) .$$

Wir können jedoch ohne merklichen Fehler $\sin F = \sin G = \varDelta$ setzen und erhalten dann sehr einfach

$$h_0^2 \sin^2 F = d_0^2 + c_0^2 \sin^2(P - P_c)$$
$$\zeta = \cos F .$$

Zur besseren Uebersicht stelle ich die Formeln für die Tangentenmethode nochmals zusammen:

$$c_0 \cos\gamma = e$$
$$c_0 \sin\gamma = (\vartheta - t_0) dS$$
$$p_c = \gamma - (\nu + q)$$
$$p = P' + J + R$$
$$P = p - q$$

$$P - P_c = p - \gamma + \nu + q + (\alpha_0 - \alpha)\sin\delta - c_0 \sin p_c \operatorname{tg}\delta$$
$$d_0 = h_0 - \frac{D'\sigma\lambda h_0}{h}$$
$$h_0^2 \sin^2 F = d_0^2 + c_0^2 \sin^2(P - P_c)$$
$$\zeta = \cos F$$
$$\chi = p - c_0 \sin p \operatorname{tg}\delta$$
$$\omega' = d_0 + c_0 \cos(P - P_c) + \zeta h_0 \sin\mu \cos P$$
$$\omega = \omega_{a_2} + (\vartheta - t_0)d\pi - u\cos^2\chi + f\cos F$$
$$V = \omega' - \omega\,.$$

Wurde bei der Messung der Sichelbreiten der Positionswinkel nicht abgelesen, so hat man $P = P_c$ zu setzen, erhält also das etwas einfachere Rechnungsschema:

$$c_0 \cos\gamma = e$$
$$c_0 \sin\gamma = (\vartheta - t_0)dS$$
$$\chi = \gamma - (\nu + q)$$
$$P = \chi - g_0 + c_0 \sin\chi \operatorname{tg}\delta$$
$$h_0 \sin F = d_0 = h_0 - \frac{D'\sigma\lambda h_0}{h}$$
$$\zeta = \cos F$$
$$\omega' = d_0 + c_0 + \zeta h_0 \sin\mu \cos P\,.$$

Die Reduction der am Heliometer in bekanntem Positionswinkel gemessenen Sichelbreiten ist etwas complicirter. Bei diesen Messungen wird die Schnittlinie des Objectives nahezu in die Richtung der Pfeilhöhe gebracht. Man klemmt dann den Positionskreis fest und nähert die beiden Mondbilder einander, bis der Schattenrand des ersten (1) von dem hellen Rand des zweiten (2) wie in der folgenden Figur

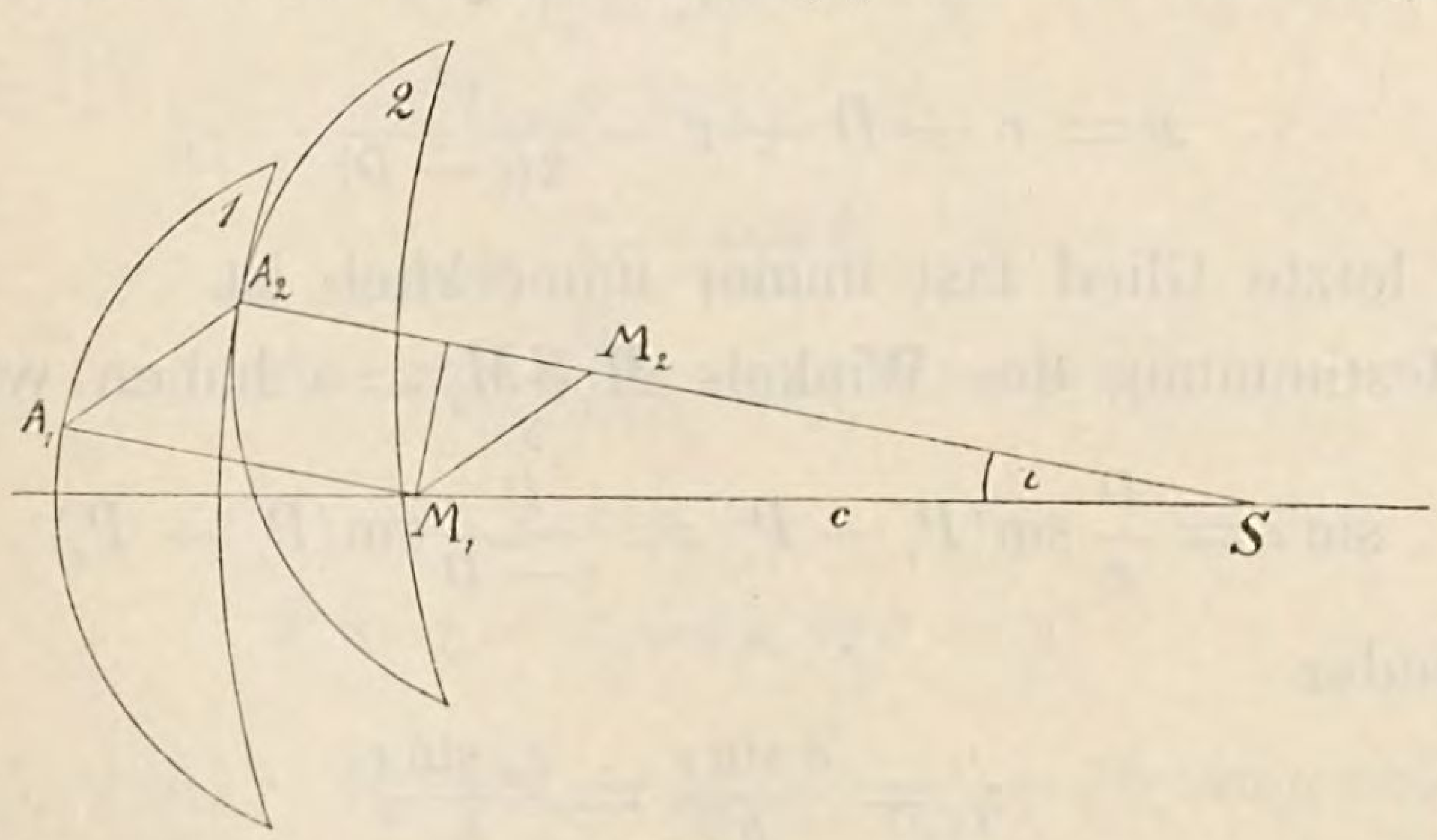



Fig. 2.

berührt wird. Die Berührungsstelle soll in der Mitte des Gesichtsfeldes liegen.

Ist wieder $S$ der Schattenmittelpunkt und ziehen wir den Radius $M_1A_1 \parallel SM_2A_2$ so ist auch $A_1A_2 \parallel M_1M_2$ und gemessen ist die Strecke $A_1A_2 = M_1M_2 = D'$ und ihr Positionswinkel $P'$ an der Mitte von $A_1A_2$. Zunächst ist nun wieder

$$D = D'\sigma\lambda$$
$$p = P' + J + R.$$

Nach $A_1$ wird der Positionswinkel übertragen durch die Correction

$$+\frac{D}{2}\sin p \operatorname{tg}\delta$$

und nach $M_1$ durch

$$-h\sin(P_c + g)\operatorname{tg}\delta.$$

Der Positionswinkel (von der Verticalen an) von $M_1M_2$ ist daher

$$P_1 = P' + J + R + \frac{D}{2}\sin p \operatorname{tg}\delta - h\sin(P_c + g)\operatorname{tg}\delta - g,$$

während der topocentrische Positionswinkel von $c$ wieder

$$P_c = \gamma - (\nu + q) + c_0 \sin p_c \operatorname{tg}\delta - g_0$$

ist. Setzen wir nun $M_2S = x$, so haben wir

$$x^2 = c^2 + D^2 - 2cD\cos(P_1 - P_c).$$

Da nun bei der Messung der Sichelbreiten $P_1 - P_c$ stets klein ist, so entwickeln wir nach Potenzen dieses Winkels. Aus

$$x^2 = (c - D)^2 + 4cD\sin^2\frac{P_1 - P_c}{2}$$

folgt mit der Abkürzung

$$v = \frac{2cD}{c - D}\sin^2\frac{P_1 - P_c}{2}$$

$$x = c - D + v - \frac{v^2}{2(c - D)}\cdots,$$

wobei das letzte Glied fast immer unmerklich ist.

Zur Bestimmung des Winkels $M_1SM_2 = \iota$ haben wir

$$\sin\iota = \frac{D}{x}\sin(P_1 - P_c) = \frac{D}{c - D}\sin(P_1 - P_c).$$

Nun ist wieder

$$\eta' = \frac{c\sin\iota}{h} = \frac{c_0\sin\iota}{h_0}$$

$$\xi' = \frac{x + h - c\cos\iota}{h} = \frac{x\frac{h_0}{h} + h_0 - c_0\cos\iota}{h_0}.$$

Setzen wir also

$$D_0 = D\frac{h_0}{h} = \frac{D' h_0 \sigma \lambda}{h}$$

$$v_0 = \frac{2 c_0 D_0}{c_0 - D_0} \sin^2 \frac{P_1 - P_c}{2}$$

$$x_0 = x\frac{h_0}{h} = c_0 - D_0 + v_0 - \frac{v_0^2}{2(c_0 - D_0)} \cdots,$$

so folgt

$$d_0 = h_0 \xi' = c_0 - D_0 + v_0 - \frac{v_0^2}{2(c_0 - D_0)} + h_0 - c_0 \cos \iota$$

und wir erhalten wie oben

$$\omega' = c_0 - D_0 + h_0 + v_0 - \frac{v_0^2}{2(c_0 - D_0)} + \zeta h_0 \sin \mu \cos (P_c - \iota).$$

Die Heliometer-Sichelbreiten sind also nach den folgenden Formeln zu berechnen:

$$c_0 \cos \gamma = e$$

$$c_0 \sin \gamma = (\vartheta - t_0)\, dS$$

$$p_c = \gamma - (\nu + q)$$

$$D_0 = \frac{D' h_0 \sigma \lambda}{h}$$

$$p = P' + J + R$$

$$W = \nu + q + p + (\alpha_0 - \alpha) \sin \delta - (c_0 + h) \sin p_c \operatorname{tg} \delta + \frac{D_0}{2} \sin p \operatorname{tg} \delta .$$

Die Grössen $W$ und $A = \frac{h_0 \sigma \lambda}{h}$ werden tabulirt.

$$v_0 = \frac{2 c_0 D_0}{c_0 - D_0} \sin^2 \frac{W - \gamma}{2}$$

$$h_0 \sin F = h_0 - D_0$$

$$\zeta = \cos F$$

$$\sin \iota = \frac{D_0}{c_0 - D_0} \sin (W - \gamma)$$

$$\chi = p_c - \iota$$

$$P = \chi + c_0 \sin p_c \operatorname{tg} \delta - g_0$$

$$\omega' = c_0 + h_0 - D_0 + v_0 - \frac{v_0^2}{2(c_0 - D_0)} + \zeta h_0 \sin \mu \cos P .$$

Diese Formeln gelten für alle Werthe des Winkels $P_1 - P_c$; ist dieser $< 20^\circ$, so ist das Glied mit $v_0^2$ unmerklich, ist er $< 2^\circ$, sind

also die Sichelbreiten nahezu in der Richtung der Pfeilhöhe gemessen, so ist auch $v_0 = 0$ und $\iota = 0$ zu setzen, wodurch die Rechnung etwas einfacher wird.

## 9.

### Positionswinkel der Sehne zwischen den Hörnerspitzen.

Wir lösen zunächst die folgende Aufgabe:

Gegeben sei die Ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

und der Kreis

$$x = c \cos p - h \cos(v + p)$$
$$y = c \sin p - h \sin(v + p).$$

Es wird die Richtung der gemeinsamen Sehne gesucht.

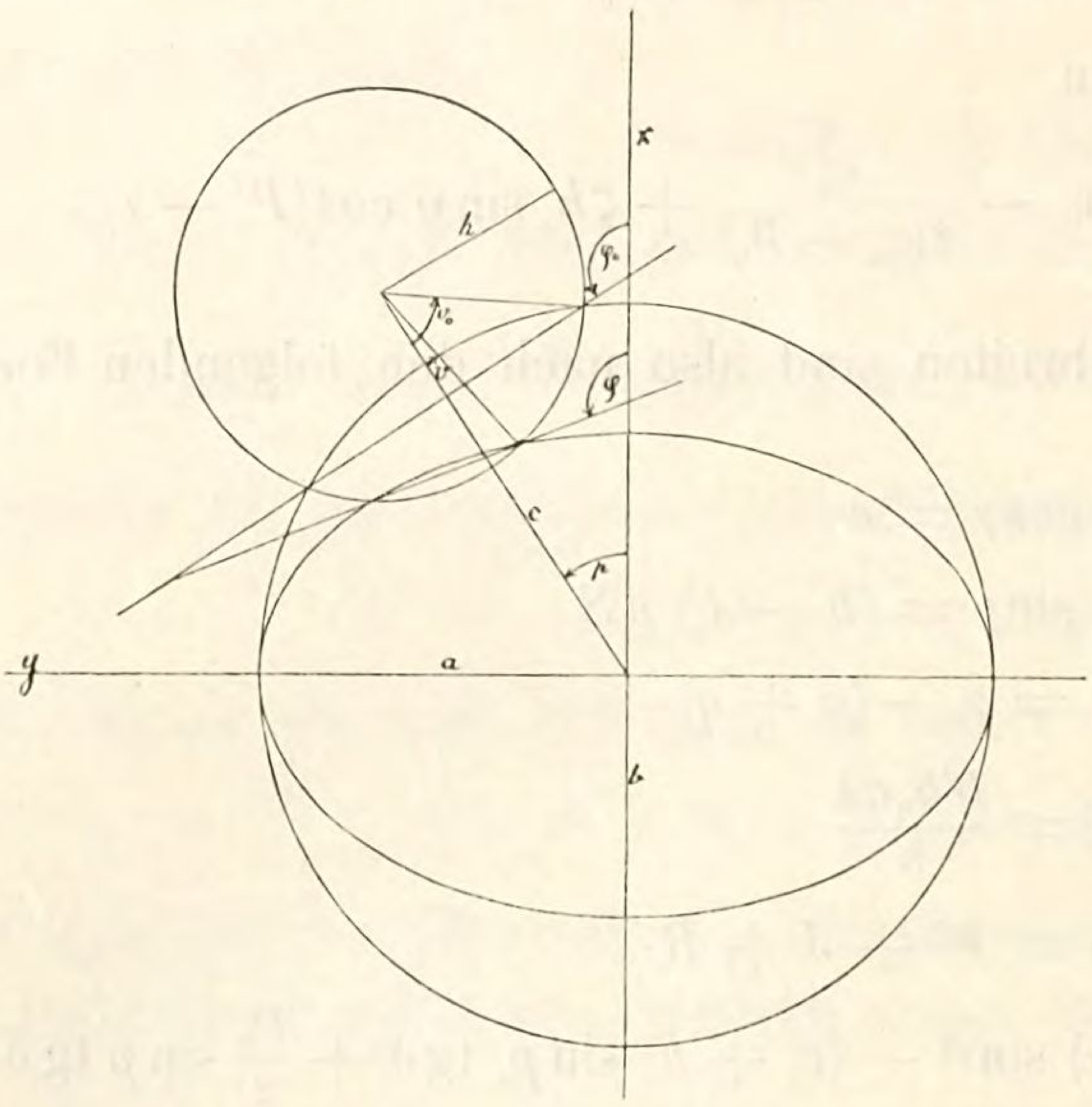


Fig. 3.

Setzen wir

$$b^2 = a^2 - a^2 e^2 ,$$

so folgen die Werthe von $v$ für die Durchschnittspunkte der beiden Curven aus der Gleichung.

$$(c \cos p - h \cos(v + p))^2 + (c \sin p - h \sin(v + p))^2$$
$$- (c \sin p - h \sin(v + p))^2 e^2 = a^2 - a^2 e^2$$

oder

$$c^2 + h^2 - a^2 + a^2 e^2 - 2ch \cos v - e^2 (c \sin p - h \sin(v + p))^2 = 0 .$$

Ist nun $v_0$ der für $e = 0$ resultirende Werth von $v$, also

$$c^2 + h^2 - a^2 - 2ch \cos v_0 = 0 ,$$

so können wir obige Gleichung auch so schreiben:

$$2ch(\cos v - \cos v_0) = e^2 [a^2 - (c \sin p - h \sin(v + p))^2] .$$

Aus diesem Ausdrucke geht hervor, dass $\cos v - \cos v_0$ von der Ordnung $e^2$ ist. Vernachlässigen wir $e^4$, so können wir also in der

Klammer [ ] $v = v_0$ setzen und erhalten nach einigen einfachen Reductionen

$$[\,] = a^2 \cos^2 p + ch \sin v_0 \sin 2p - h^2 \sin v_0 \cos v_0 \sin 2p - h^2 \sin^2 v_0 \cos 2p.$$

Nun folgt weiter

$$2 \sin \frac{v + v_0}{2} \sin \frac{v - v_0}{2} = - \frac{e^2 [\,]}{2ch},$$

also

$$v = v_0 - \frac{e^2 [\,]}{2ch \sin v_0 \sin 1''}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung einmal $v_0 = + v_0$ und dann $v_0 = - v_0$ ein, so ergeben sich zwei Werthe $v_1$ und $v_2$ von $v$, welche den beiden hier allein in Frage kommenden Schnittpunkten entsprechen. Ist nun $\varphi$ der gesuchte Positionswinkel der Sehne, $\varphi_0$ der $e = 0$ entsprechende Werth, so wird

$$\varphi_0 = p + 90^\circ$$

$$\varphi = p + 90^\circ + \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Die Einsetzung der Werthe von $v_1$ und $v_2$ ergiebt nun direct

$$\varphi - \varphi_0 = - \frac{e^2 \sin 2p}{2c \sin 1''} [c - h \cos v_0].$$

Da wir die Schattenellipse bisher in der Form (I, pag. 385)

$$\omega = \omega_a - u \cos^2 \chi$$

darstellten, so haben wir hier zu setzen

$$a = \omega_a$$

$$b = \omega_a - u$$

also

$$e^2 = \frac{2u}{\omega_a}.$$

Hiermit ergiebt sich zunächst

$$\varphi - \varphi_0 = - \frac{u \sin 2p}{c \omega_a \sin 1''} [c - h \cos v_0].$$

Eine letzte Vereinfachung folgt noch, wenn wir statt $v_0$ einen anderen Hülfswinkel $w$ einführen durch die Bedingung

$$\cos w = \frac{c^2 + \omega_a^2 - h^2}{2 c \omega_a}.$$

Aus der geometrischen Bedeutung von $w$ folgt dann

$$c - h \cos v_0 = \omega_a \cos w$$

und wir erhalten somit

$$\varphi - \varphi_0 = -u \frac{(c^2 + \omega_a^2 - h^2) \sin 2p}{2c^2 \omega_a \sin 1''}.$$

Dieser Ausdruck soll nun benutzt werden, um durch Messung des Winkels $\varphi$ die Grösse $u$ zu bestimmen. Es sei also $P'$ der am Fadenmikrometer oder auch am Heliometer abgelesene Positionswinkel der Sehne zwischen den Hörnerspitzen, gemessen an der Mitte der Sehne. Der verbesserte Werth ist wie früher

$$\varphi = P' + J + R.$$

$\varphi_0$ ist der Positionswinkel, den man beobachten würde, wenn der Schatten einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius $\omega_a$ hätte. Diesen Winkel findet man durch die folgenden Formeln. Zunächst ist wieder

$$c_0 \cos \gamma = e$$
$$c_0 \sin \gamma = (\vartheta - t_0) dS$$
$$p_c = \gamma - (\nu + q).$$

Nach dem Mittelpunkte der Sehne wird $p_c$ übertragen durch die Correction

$$-\omega_a \cos w \sin p_c \operatorname{tg} \delta_\odot$$

und auf den Beobachtungsort nach (13) durch

$$-(\alpha_0 - \alpha) \sin \delta.$$

Wir haben mithin

$$\varphi_0 = \gamma - (\nu + q) - \omega_a \cos w \sin p_c \operatorname{tg} \delta_\odot - (\alpha_0 - \alpha) \sin \delta + 90°.$$

Für $\omega_a$ ist hier immer der scheinbare, d. h. um die empirische Vergrösserung verbesserte Halbmesser des Erdschattens zu setzen. Die Rechnung ist äusserst bequem, da fast alles tabellarisch gerechnet werden kann. Setzt man zur Abkürzung

$$d_0 = \frac{c_0^2 + \omega_a^2 - h_0^2}{2c_0}$$

$$m = -\frac{d_0 \sin 2p_c}{c_0 \omega_a \sin 1''}$$

$$M = J + R + \nu + q + d_0 \sin p_c \operatorname{tg} \delta_\odot + (\alpha_0 - \alpha) \sin \delta - 90°,$$

so wird man $m$ und $M$ tabuliren und hat dann direct

$$\varphi - \varphi_0 = P' + M - \gamma = mu\,.$$

Wie man aus der letzten Gleichung deutlich erkennt, hängt die Anwendbarkeit dieser Methode lediglich von der Grösse des Factors $m$ ab, da jeder in $P'$ begangene Beobachtungsfehler mit $m$ dividirt in den Werth von $u$ eingeht. Ganz unbrauchbar werden diese Messungen, wenn $p_c$ ein Vielfaches von $90°$ ist, d. h. wenn die Sehne parallel zu einer der Axen der Schattenellipse wird. Ausserdem ist $m$ proportional dem Quotienten

$$\frac{d_0}{c_0\,\omega_a} = \frac{\cos w}{c_0}\,.$$

Da der grösste Werth von $w$ etwa $20°$ ist, so liegt $\cos w$ immer zwischen 0.94 und 1.00, sodass also die Grösse von $m$ wesentlich von $c_0$ abhängt. Der günstigste Fall tritt also ein, wenn nur noch eine schmale Sichel des Mondes sichtbar und die Sehne $45°$ gegen den Stundenkreis geneigt ist. So erhält man z. B. für $\omega = 45'$, $h = 15'$, $c = 31'$ und $p_c = 45°$ den Factor $m = 110$. Da der grösste theoretische Werth von $u$ $12''6$ beträgt, so kann $\varphi - \varphi_0$ den Betrag von $30'$ erreichen.

## 10.

### Photographische Aufnahmen.

Bei der Ausmessung photographischer Platten lassen sich alle bisher beschriebenen Methoden in Anwendung bringen — zu empfehlen sind jedoch nur zwei: die Tangentenmethode und die Messung rechtwinkliger Coordinaten.

Die Tangentenmethode ist stets anwendbar und ergiebt alle Schattenradien mit gleicher Schärfe; jedoch erfordert sie einen Apparat zum Messen von Polarcoordinaten und ist für die Rechnung etwas unbequem. Die Formeln wurden in § 8 bereits aufgestellt. Eine kleine Abkürzung der Rechnung tritt hier, wie bei allen photographischen Messungen dadurch ein, dass alle nur von der Zeit abhängigen Grössen für alle Punkte derselben Platte nur einmal gerechnet zu werden brauchen.

Bei der Messung von rechtwinkligen Coordinaten legt man die

$x$-Axe entweder in die Richtung der Pfeilhöhe, was namentlich bei sehr schmaler Sichel zu empfehlen ist, oder in die Richtung der Verticalen, wodurch die Rechnung äusserst einfach wird. Da man vom einen Falle leicht zum anderen übergehen kann, so wollen wir hier nur die Formeln für den zuletzt genannten aufstellen.

Es seien $x'$ $y'$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Schattenrandes gegen den Mittelpunkt der Mondscheibe in beliebiger Einheit ausgedrückt. Die $x'$-Axe habe am Mondmittelpunkte den Positionswinkel $g + \iota$, also gegen den geocentrischen Verticalkreis den Positionswinkel $\iota$. Die genau orientirten Coordinaten sind also

$$x = x' \cos\iota - y' \sin\iota$$
$$y = y' \cos\iota + x' \sin\iota\,.$$

Um die Messungen für Refraction zu verbessern ist nun nur $x$ mit einem Factor $\lambda > 1$ zu multipliciren, während $y$ unverändert bleibt. Zwar fällt die Richtung der Refraction nicht genau mit $x$ zusammen, doch ist der Unterschied hier ganz zu vernachlässigen. Ist wieder $\sigma$ der Scalenwerth, so folgt

$$\xi = \frac{x\lambda\sigma}{h} \qquad \eta = \frac{y\sigma}{h}$$

oder, wenn wir noch den verticalen Mondhalbmesser

$$h' = \frac{h}{\lambda}$$

einführen,

$$\xi = \frac{x\sigma}{h'} \qquad \eta = \frac{y\sigma}{h}\,.$$

Die geocentrischen Werthe sind nach (9)

$$\xi_0 = \frac{x\sigma}{h'} + \zeta \sin\mu$$
$$\eta_0 = \frac{y\sigma}{h}$$

und in Bogensecunden ausgedrückt

$$x_0 = \frac{x\sigma h_0}{h'} + \zeta h_0 \sin\mu$$
$$y_0 = \frac{y\sigma h_0}{h}\,.$$

Die Coordinaten des Schattenmittelpunktes in demselben System sind nach § 8

$$-\, c_0 \cos P_c$$
$$-\, c_0 \sin P_c\,.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\sigma_1 = \frac{\sigma h_0}{h} \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma h_0}{h'} = \sigma_1 \lambda\,,$$

so folgt

$$\omega' \cos P_\omega = c_0 \cos P_c + x'\sigma_2 \cos\iota - y'\sigma_2 \sin\iota + \zeta h_0 \sin\mu$$
$$\omega' \sin P_\omega = c_0 \sin P_c + x'\sigma_1 \sin\iota + y'\sigma_1 \cos\iota\,.$$

Hat man bei derselben Orientirung der Platte die Coordinaten zahlreicher Punkte gemessen, so ist es bequemer, gleich im System $x'y'$ zu bleiben. Schreiben wir $\lambda = 1 + \varkappa$, so ist $\varkappa$ eine sehr kleine Grösse, deren Producte in $\sin\iota$ (falls wir $\iota < 1^\circ$ annehmen) und $\sin\mu$ zu vernachlässigen sind. Hierdurch erhalten wir zunächst

$$\omega' \cos P_\omega = c_0 \cos P_c + x'\sigma_1 \cos\iota - y'\sigma_1 \sin\iota + x'\sigma_1\varkappa \cos\iota + \zeta h_0 \sin\mu$$
$$\omega' \sin P_\omega = c_0 \sin P_c + x'\sigma_1 \sin\iota + y'\sigma_1 \cos\iota\,.$$

Multipliciren wir diese beiden Gleichungen zuerst mit $+\cos\iota$ resp. $+\sin\iota$, dann mit $-\sin\iota$ resp. $+\cos\iota$ und addiren sie jedesmal, so folgt:

$$\omega' \cos(P_\omega - \iota) = c_0 \cos(P_c - \iota) + x'\sigma_1 + x'\sigma_1\varkappa + \zeta h_0 \sin\mu$$
$$\omega' \sin(P_\omega - \iota) = c_0 \sin(P_c - \iota) + y'\sigma_1\,.$$

Dieses ist für die Rechnung die denkbar einfachste Form: für die einzelne Messung sind nur kleine Correctionsglieder zu berechnen, während die Hauptglieder für jede Aufnahme constant sind. Umständlich ist nur wieder die Berechnung von $\zeta$. Wir haben folgende Formeln:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma h_0}{h}$$
$$h_0^2 \sin^2 F = (x'\sigma_1)^2 + (y'\sigma_1)^2$$
$$\zeta = \cos F$$
$$c_0 \cos\gamma = e$$
$$c_0 \sin\gamma = (\vartheta - t_0)\, dS$$
$$p_c = \gamma - (\nu + q)$$
$$P_c = p_c + c_0 \sin p_c \operatorname{tg}\delta - g_0$$

$$\omega' \cos(P_\omega - \iota) = c_0 \cos(P_c - \iota) + x'\sigma_1 + x'\sigma_1 \varkappa + \zeta h_0 \sin\mu$$
$$\omega' \sin(P_\omega - \iota) = c_0 \sin(P_c - \iota) + y'\sigma_1$$
$$\chi = P_\omega + g_0 - \omega' \sin(P_\omega + g_0) \operatorname{tg}\delta$$
$$\omega = \omega a_2 + (\vartheta - t_0)\, d\pi - u \cos^2\chi + f \cos F.$$

Zur Bestimmung des Scalenwerthes $\sigma$ und der Orientirung $\iota$ könnte man je zwei Aufnahmen auf dieselbe Platte bei feststehendem Instrument machen und erhielte dann diese beiden Grössen aus der Verbindungslinie der beiden Mondmittelpunkte und der beobachteten Zwischenzeit. Dieses Verfahren, welches bisher öfters angewendet wurde, ist jedoch durchaus nicht zu empfehlen. Denn um den Schattenrand möglichst scharf zu erhalten darf man, wie die bisherigen Aufnahmen ergeben haben, selbst bei Anwendung einer Momentplatte und eines ziemlich lichtstarken Objectives (1 : 12) die Belichtungsdauer nicht kleiner als $1^s$ nehmen, wogegen Aufnahmen von $10^s$, $20^s$ und weit mehr für gewisse Zwecke erwünscht sind. Alle diese Aufnahmen sind jedoch nur möglich, wenn das Fernrohr zum mindesten der täglichen Bewegung des Mondes folgt, da selbst in $1^s$ die Verschiebung des Mondbildes um $15''$ jede scharfe Messung ausschliesst. Zur Ermittelung des Scalenwerthes benutzt man am besten einen Normalbogen von Fixsternen, den man vor und nach der Finsterniss bei gleicher Focusirung aufnimmt. Um nun auch die Orientirung aus diesen Platten entnehmen zu können ist nur noch nöthig, dass eine am Fernrohr feste Richtung auf allen Platten markirt wird. Man könnte zu diesem Zwecke etwa an allen Platten eine Kante gerade schleifen und sie mit dieser gegen die festen Anschläge in der Cassette legen, während letztere wieder durch drei feste Punkte eine unveränderliche Stellung am Refractor erhält. Die genannte Vorbereitung der Platten ist jedoch umständlich und es ist daher die folgende sehr einfache Vorkehrung zu empfehlen, die sich hier gut bewährt hat. Die Vorderseite der Metallcassette ist über den Ecken der Platte durch einige feine kreisrunde Oeffnungen bis zur Schicht hin durchbohrt. Damit durch diese Löcher nicht fortwährend Licht eindringe, wurden dieselben so gelegt, dass sie auch den Schieber durchsetzen müssen. Der Schieber wurde nämlich ganz wenig geöffnet, sodass die Platte noch nicht sichtbar war und in dieser Stellung wurden die Oeffnungen gebohrt. Ausserdem wurde

noch an einer passenden Stelle nicht mehr über der Platte ein weiteres conisches Loch gebohrt, in welches ein Stift genau eingeschliffen wurde. Drückt man den Stift in diese Oeffnung, so verschiebt sich der Cassettendeckel so weit, dass die Oeffnungen über der Platte frei werden. Man sendet dann durch diese einige Secunden lang das Licht der geöffneten Dunkelkammerlampe und erhält dadurch auf der Platte kreisrunde scharfbegrenzte Marken, welche die Lage der Platte in der Cassette, also auch am Fernrohre kennzeichnen.

Die Grössen $x'y'$ sind Coordinaten gegen den Mittelpunkt der Mondscheibe und es sind daher noch einige Worte über die Bestimmung der Coordinaten $x_0 y_0$ dieses Punktes zu sagen. Da wir den Mondrand als Ellipse annahmen, deren Axen zu $x$ und $y$ parallel liegen, so erscheint die Aufgabe der Mittelpunktsbestimmung auf den ersten Blick ausserordentlich einfach. Schneidet eine Gerade $x = \text{const.}$ den Mondrand in den Punkten $y_1$ und $y_2$, so würde

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

sein und ebenso würde man $x_0$ aus jeder Sehne $y = \text{const.}$ finden. Bei der praktischen Ausführung zeigte es sich jedoch, dass die Bestimmung des Mittelpunktes unerwartete Schwierigkeiten bot, weil in Folge der photographischen Irradiation der Mondrand statt einer Ellipse eine ganz andere Curve geworden war. Da sich die hierbei auftretenden Erscheinungen am besten an der Hand der Messungen erklären lassen, so sollen dieselben in dem nun folgenden praktischen Theile besprochen werden.

## III. Berechnung der vorhandenen Messungen.

### 11.

Um die Beurtheilung der Genauigkeit der verschiedenen neuen Messungsmethoden zu erleichtern, wollen wir zunächst die Resultate der Contactbeobachtungen etwas eingehender betrachten. Wir haben früher das Mittel aus den einzelnen beobachteten $V$ jedes Beobachters mit $V_1$ und den Rest $V - V_1$ mit $R$ bezeichnet, wobei die Eintritte (E) und Austritte (A) getrennt berechnet wurden. Behandeln

wir diese $R$ als zufällige Beobachtungsfehler, so erhalten wir für die Reihen von mindestens acht Beobachtungen die folgenden mittleren Fehler einer Contactbeobachtung:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GAUSS | 1816 II | 8E | ± 5''68 | SCHMIDT | 1856 | 41E | ± 9''13 |
| SCHMIDT | 1849 | 35E | 6.65 | BOWDEN | 1856 | 8E | 9.33 |
| „ | 1878 | 38A | 6.96 | BESSEL | 1816 II | 10A | 9.44 |
| MÄDLER | 1842 | 19A | 7.48 | SCHRADER | 1877 II | 8E | 9.51 |
| TODD | 1877 I | 23E | 7.48 | SCHMIDT | 1856 | 23A | 9.65 |
| SCHMIDT | 1876 | 26A | 7.64 | MÄDLER | 1844 II | 38A | 9.68 |
| „ | 1877 II | 60E | 7.98 | ARGELANDER | 1841 | 9A | 9.76 |
| „ | 1867 | 57E | 8.16 | ENCKE | 1842 | 8A | 9.83 |
| VOGEL | 1867 | 9A | 8.29 | GALLE | 1844 I | 9A | 9.84 |
| GOLDSCHMIDT | 1841 | 17E | 8.30 | LEPPIG | 1876 | 9E | 9.86 |
| SCHMIDT | 1876 | 26E | 8.52 | LENARD | 1889 | 21E | 9.90 |
| „ | 1863 | 38E | 9.03 | CANELAS | 1806 | 23E | 9.92 |
| „ | 1849 | 29A | 9.11 | | etc. | | |

Schon diese Zusammenstellung würde beweisen, dass ein m. F. einer Beobachtung von 10'' leicht inne zu halten ist, jedoch ist zu bemerken, dass die obigen Fehler noch erheblich zu gross ausgefallen sind, da die $R$ keineswegs als zufällige Beobachtungsfehler aufgefasst werden dürfen. Schon ein flüchtiger Blick auf die Werthe von $R$ zeigt, wie schon früher (I, pag. 539) bemerkt wurde, dass mit zunehmender Verfinsterung des Mondes der Radius des Erdschattens scheinbar kleiner wird. Wir haben es hier jedenfalls mit einem rein subjectiven Vorgange zu thun: Sobald die leuchtende Mondsichel schmal ist, pflegen die Beobachter den Schatten kleiner zu schätzen weil sie, vom hellen Mondlichte weniger geblendet, die Krater noch weiter in den Halbschatten hinein verfolgen können. Zur Stützung dieser Ansicht will ich nur auf die folgenden Punkte aufmerksam machen. Ist obige Erklärung richtig, so muss, so lange nur wenig vom Monde verfinstert ist, die Abnahme von $R$ sehr langsam erfolgen, da zu dieser Zeit auch die Lichtabnahme viel langsamer vor sich geht. Hieraus würde dann weiter folgen, dass bei partiellen Finsternissen, bei denen die leuchtende Sichel überhaupt nicht so schmal wird, diese Abnahme sich in erheblich geringerem Grade zeigen muss, als bei totalen oder doch nahezu totalen Finsternissen.

Und hieraus wieder würde endlich drittens folgen, dass die partiellen Finsternisse, da bei ihnen die Verkleinerung von $V$ zum grössten Theile wegfällt, im Durchschnitt grössere Werthe für den Schattenradius oder vielmehr für $V$ ergeben müssten, als die totalen Finsternisse.

Durch die Beobachtungen werden diese drei Folgerungen in der That auf das Entschiedenste bestätigt. Wir beginnen mit der letzten. Für die Grösse der Finsterniss in Theilen des Monddurchmessers haben wir mit den Bezeichnungen von I pag. 388:

$$G = \frac{\omega_{a_2} + h_2 - e}{2h_2}.$$

Ordnen wir nun die Finsternisse nach der Grösse $G$ und zwar, aus den I, pag. 533 angegebenen Gründen, getrennt für die beiden Perioden vor und nach 1824, so erhalten wir die folgende Zusammenstellung:

| | partiell | | | total | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $G$ | $V_2$ | | $G$ | $V_2$ |
| I. Periode | 1813 | 0.346 | 59″.18 | 1816 I | 1.221 | 56″.88 |
| | 1818 | 0.438 | 68.16 | 1805 | 1.335 | 44.88 |
| | 1811 | 0.585 | 60.52 | | Mittel | 50.88 |
| | 1816 II | 0.645 | 47.87 | | | |
| | 1802 | 0.743 | 57.35 | | | |
| | 1806 | 0.755 | 53.45 | | | |
| | 1809 | 0.854 | 56.89 | | | |
| | | Mittel | 57.63 | | | |
| II. Periode | 1858 | 0.313 | 49.53 | 1856 | 0.977 | 44.75 |
| | 1876 | 0.323 | 52.70 | 1863 | 1.199 | 44.56 |
| | 1887 | 0.401 | 52.04 | 1844 I | 1.304 | 50.98 |
| | 1878 | 0.572 | 50.86 | 1844 II | 1.415 | 49.27 |
| | 1867 | 0.675 | 52.75 | 1888 | 1.624 | 51.86 |
| | 1889 | 0.678 | 52.85 | 1852 | 1.644 | 51.59 |
| | 1849 | 0.722 | 46.36 | 1877 I | 1.644 | 46.76 |
| | 1842 | 0.772 | 52.92 | 1877 II | 1.663 | 44.42 |
| | 1860 | 0.790 | 50.11 | 1841 | 1.697 | 51.38 |
| | 1845 | 0.902 | 51.52 | | Mittel | 48.45 |
| | | Mittel | 51.16 | | | |

Der Werth $V_2$ für 1816 I beruht nur auf acht Beobachtungen eines Beobachters und ist daher sehr unsicher. Die angegebenen $G$ sind die theoretischen Werthe; wegen der Vergrösserung des Erdschattens um 50″ erscheint dem Beobachter $G$ um ca. 0.03 grösser, weshalb 1856 zu den totalen Finsternissen zu rechnen ist.

Ob der sich in obigen Zahlen deutlich zeigende Unterschied zwischen totalen und partiellen Finsternissen nun in der That den genannten subjectiven Grund hat oder vielleicht von einer abweichenden Abplattung der Schattenellipse herrührt ist eine Frage, die erst durch photographische Aufnahmen entschieden werden kann. Für jetzt genügt es, dass die rein physiologische Erklärung dieses Vorganges möglich und mit anderen Erscheinungen im Einklange ist.

Um die Abhängigkeit der einzelnen beobachteten $V$ von verschiedenen Nebenumständen statistisch untersuchen zu können, muss man die Beobachtungen zuerst von dem grössten systematischen Fehler, dem constanten Gliede der persönlichen Auffassung des betreffenden Beobachters, befreien. Bei nicht zu kurzen Beobachtungsreihen kann man annehmen, dass die $V_1$ sehr nahe mit obigem Gliede identisch sind, so dass $R = V - V_1$ als die Summe der übrigen systematischen und zufälligen Beobachtungsfehler anzusehen ist. Für die folgenden Untersuchungen wurden daher nur Reihen von mindestens zehn zuverlässigen Beobachtungen benutzt. Um speciell den Einfluss der Helligkeit der Mondsichel auf die Grösse des beobachteten Schattenhalbmessers zu ermitteln sei $s$ die Pfeilhöhe des Schattens auf der Mondscheibe im Augenblicke der Beobachtung, $S$ der grösste Werth von $s$ während der ganzen Beobachtungsreihe und $Q = \frac{s}{S}$. In jeder Beobachtungsreihe wird dann die Grösse $Q$ mit der zunehmenden Verfinsterung von 0 bis 1 gehen, sodass also $Q$ ein Maass für die relative Helligkeit des Mondes bei den einzelnen Antritten abgiebt, ihr allerdings nicht proportional ist, worauf es jedoch hier nicht ankommt. Da, wie schon bemerkt, Finsternisse von verschiedener Grösse sich in dieser Hinsicht sehr verschieden verhalten können, so theilen wir dieselben in drei Gruppen, welche durch die Grenzen $G = 0.75$ und $G = 1.25$ getrennt werden. Da ferner bei den Eintrittsbeobachtungen die physiologischen Vorgänge von etwas anderer Art sind, als bei den Austritten, so werden beide Beobach-

tungsarten gesondert behandelt. Aus demselben Grunde sind auch die Beobachtungen des Mondrandes von den Kraterantritten getrennt zu untersuchen. Die zeitliche Trennung in die Perioden vor und nach 1824 hier einzuführen liegt kein Grund vor, da die thatsächlich vorhandene Verschiedenheit der in beiden Zeiträumen beobachteten $V$ durch die Einführung von $R$ statt $V$ unschädlich gemacht wird.

Die folgende Zusammenstellung giebt nun nach $Q$ geordnet die Mittelwerthe von $R$ und dahinter in Klammern die Anzahl der benutzten Beobachtungen.

| | I. $G < 0.75$ | | II. $0.75 < G < 1.25$ | |
|---|---|---|---|---|
| | E | A | E | A |
| ☾Rd. | − 10″3 (8) | − 5″4 (7) | + 5″2 (8) | − 11″0 (4) |
| $Q =$ 0.05 | + 9.1 (17) | — | + 6.2 (14) | + 12.8 (4) |
| 0.15 | − 2.0 (3) | + 1.3 (7) | + 2.6 (38) | + 6.1 (19) |
| 0.25 | + 3.7 (52) | + 7.1 (11) | + 6.1 (18) | + 16.5 (2) |
| 0.35 | 0.0 (40) | + 3.9 (23) | + 1.7 (59) | + 8.8 (13) |
| 0.45 | + 1.1 (42) | + 6.9 (23) | + 2.8 (34) | + 2.6 (22) |
| 0.55 | + 0.2 (28) | + 1.3 (32) | + 1.3 (30) | − 1.8 (15) |
| 0.65 | + 0.6 (29) | + 0.3 (18) | − 2.7 (38) | + 2.0 (37) |
| 0.75 | − 0.8 (51) | + 1.1 (42) | − 5.0 (39) | − 0.6 (35) |
| 0.85 | − 0.8 (47) | + 0.9 (19) | − 7.0 (20) | − 6.6 (27) |
| 0.95 | − 2.6 (69) | − 7.1 (61) | − 12.1 (19) | − 9.0 (24) |
| ☾Rd. | — | — | + 6.0 (2) | + 6.0 (1) |

| | III. $G > 1.25$ | | $G > 0.75$ |
|---|---|---|---|
| | E | A | Mittel |
| ☾Rd. | − 11″6 (14) | + 2″8 (11) | − 3″6 (37) |
| $Q =$ 0.05 | + 5.0 (34) | + 11.8 (10) | + 6.9 (62) |
| 0.15 | + 10.4 (48) | + 10.8 (28) | + 7.6 (133) |
| 0.25 | + 6.1 (65) | + 11.0 (26) | + 7.4 (111) |
| 0.35 | + 6.4 (71) | + 6.1 (62) | + 5.0 (205) |
| 0.45 | − 1.9 (52) | + 4.6 (41) | + 1.6 (149) |
| 0.55 | − 1.5 (83) | + 7.0 (23) | + 0.3 (151) |
| 0.65 | − 2.6 (79) | − 4.4 (69) | − 2.4 (223) |
| 0.75 | − 5.2 (50) | − 8.5 (41) | − 5.0 (165) |
| 0.85 | − 6.0 (57) | − 11.6 (36) | − 7.7 (140) |
| 0.95 | − 8.5 (13) | − 13.4 (23) | − 10.9 (79) |
| ☾Rd. | − 7.1 (23) | − 7.6 (10) | − 6.2 (36) |

Lassen wir die unsicheren und regellos verlaufenden Zahlen der Randbeobachtungen bei Seite, so zeigt sich zunächst in allen Reihen deutlich die Abnahme von $R$ bei zunehmendem $Q$. Sehr schwach ausgesprochen ist dieser Vorgang bei Gruppe I, dagegen sehr entschieden und nahezu gleich stark bei II und III. Wir sehen hierin die Bestätigung der zweiten oben aufgestellten Folgerung. Auch die Ein- und Austritte der Gruppen II und III stimmen so nahe überein, dass wir alle vier Reihen zu einem Mittel vereinigen können, welches in der letzten Columne gegeben ist. Diese Zahlen zeigen nun einen ganz überraschend regelmässigen Verlauf: bis etwa $\frac{1}{4}$ des Monddurchmessers verdeckt ist, bleibt der beobachtete Schattenradius fast ganz constant, dann aber beginnt eine schnelle und zu $Q$ fast genau proportionale Abnahme. Hiermit ist nun auch der oben aufgestellte Satz erwiesen, dass die Verkleinerung von $V$ nicht gleich im Anfange der Finsterniss beginnt, sondern erst später merklich wird.

Man sieht aus der letzten Zahlenreihe, dass der Unterschied zwischen dem grössten und kleinsten $V$ in Folge dieses physiologischen Vorganges nicht weniger als 18.″5 beträgt, so dass durch diesen systematischen Fehler die Beobachtungen ganz erheblich verschlechtert werden mussten. Setzen wir

$$\text{für } Q < 0.25 \qquad R = +7.''3$$
$$\text{für } Q > 0.25 \qquad R = +7.''3 - 25''(Q - 0.25),$$

so werden die Zahlen der obigen Reihe sämmtlich innerhalb 0.″7 dargestellt. Bringen wir diese Mittelwerthe mit umgekehrten Vorzeichen als Correctionen an den einzelnen $V$ an, so wird wohl ein grosser Theil des systematischen Fehlers in $R$ verschwinden, ein Rest davon wird aber immer noch übrig bleiben, da ja die einzelnen Beobachtungsreihen die Veränderlichkeit von $V$ in sehr verschiedenem Grade zeigen. Aus jeder einzelnen Reihe den Verlauf dieser Correction selbst zu bestimmen hielt der Verfasser nicht für erlaubt, da man dann namentlich bei kurzen Beobachtungsreihen leicht in die Gefahr gekommen wäre, auch rein zufällige Beobachtungsfehler mit zu eliminiren. Um eine deutliche Vorstellung von der Genauigkeit der Contactbeobachtungen zu geben, habe ich für alle Reihen von mehr als zehn Beobachtungen den mittleren Fehler

eines Antrittes berechnet, wobei für $G > 0.75$ die obigen Correctionen angebracht sind.

Mittlere Fehler einer Contactbeobachtung.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1802 | Beitler | 22 E | ± 13″74 | 1852 | Schönfeld | 16 E | ± 13″02 |
| 1805 | (3 Beobachter) | 11 A | 8.61 | 1856 | Bartels | 10 E | 9.32 |
| 1806 | Seyffert | 14 E | 12.94 | | Niebour | 23 E | 20.35 |
| | Zach | 13 E | 10.14 | | » | 17 A | 10.70 |
| | David | 10 E | 11.93 | | Schmidt | 41 E | 9.89 |
| | Canelas | 23 E | 8.38 | | » | 23 A | 8.94 |
| | » | 14 A | 7.30 | 1860 | » | 37 E | 11.46 |
| 1809 | » | 21 E | 13.60 | | » | 64 A | 9.44 |
| | » | 13 A | 11.99 | | Bruhns | 16 E | 15.32 |
| 1811 | » | 16 E | 22.17 | | Pogson | 14 E | 9.06 |
| 1816 II | Walbeck | 11 E | 17.55 | | » | 15 A | 12.85 |
| | Hansteen | 14 E | 10.59 | 1863 | Gerling | 11 E | 12.09 |
| | » | 12 A | 11.26 | | Mauritius | 12 E | 14.43 |
| | Bessel | 12 E | 11.34 | | Schmidt | 38 E | 8.94 |
| | » | 10 A | 9.44 | | » | 38 A | 13.12 |
| 1841 | Goldschmidt | 17 E | 9.60 | 1867 | » | 57 E | 8.16 |
| | » | 11 A | 7.99 | | » | 52 A | 12.45 |
| 1842 | Mädler | 26 E | 11.67 | 1876 | » | 26 E | 8.52 |
| | » | 19 A | 8.11 | | » | 26 A | 7.64 |
| 1844 I | Liagre | 20 E | 14.42 | | Perrotin | 12 E | 12.41 |
| | » | 14 A | 11.95 | | » | 10 A | 16.24 |
| | Quetelet | 22 E | 17.66 | 1877 I | Todd | 23 E | 8.08 |
| | » | 17 A | 13.05 | | Schmidt | 61 E | 9.92 |
| | Gauss | 29 E | 12.03 | | » | 56 A | 10.45 |
| | » | 28 A | 11.00 | | Perrotin | 18 E | 10.65 |
| | Goldschmidt | 20 E | 11.44 | | » | 37 A | 9.79 |
| | » | 21 A | 13.73 | | Sterneck | 10 E | 20.19 |
| | Schmidt | 41 E | 14.96 | 1877 II | Schmidt | 60 E | 9.02 |
| | » | 43 A | 14.56 | | » | 66 A | 9.56 |
| 1844 II | Mädler | 47 E | 8.54 | | Boeddicker | 14 E | 11.33 |
| | » | 38 A | 7.62 | | Schrader | 11 A | 13.81 |
| | Schmidt | 11 E | 14.01 | | Johnson | 10 E | 10.84 |
| | De Vico | 16 E | 21.04 | 1878 | Schmidt | 42 E | 12.43 |
| | » | 16 A | 12.25 | | » | 38 A | 6.96 |
| 1845 | Encke | 10 E | 13.46 | | Bigourdan | 24 E | 17.81 |
| 1849 | Schmidt | 35 E | 6.65 | | » | 14 A | 18.49 |
| | » | 29 A | 9.11 | | Perrotin | 27 E | 18.32 |
| 1852 | » | 43 E | 16.54 | | » | 25 A | 16.88 |
| | Galle | 12 E | 14.39 | 1888 | Stuyvaert | 25 E | 10.44 |
| | Günther | 11 E | 16.59 | | » | 14 A | 24.14 |
| | Klinkerfues | 25 E | 16.00 | 1889 | » | 35 E | 10.76 |
| | Westphal | 29 E | 16.10 | | Clemens | 31 E | 14.17 |
| | Peters | 10 E | 14.12 | | » | 15 A | 20.56 |
| | Agardh | 10 E | 10.81 | | Lenard | 21 E | 9.90 |

Im Mittel aus diesen 2121 Beobachtungen ergiebt sich der m. F. ± 12″37, eine Zahl, die durch Ausschluss einiger recht zweifel-

hafter Beobachtungsreihen noch um 1″ bis 2″ verkleinert werden könnte. Die 927 Beobachtungen von SCHMIDT haben den m. F. ± 10″83 und die 130 Beobachtungen MÄDLER's ± 8″95. Alle diese Zahlen sind aus dem oben angeführten Grunde noch etwas zu gross, so dass wir also den zufälligen m. F. einer Contactbeobachtung bei einem geübten Beobachter auf 10″ bis 11″ zu veranschlagen haben.

Es dürfte hier die geeignete Stelle sein, auch noch über eine unter einem anderen Gesichtspunkte ausgeführte Gruppirung der $R$ kurz zu berichten. Herr SEELIGER bezeichnete es als wünschenswerth, die Werthe der $V$ zu ordnen nach den scheinbaren Abständen der einzelnen Krater von der Mondscheibenmitte. Wenn man bedenkt, dass sich in der Gegend des Mondrandes die Schattengrenze auf der Mondkugel über weite Strecken hin ausbreitet, die uns nur, weil wir uns zufällig selbst in der Richtung der einfallenden Strahlen befinden, wieder perspectivisch zu der fast kreisförmigen Schattengrenze zusammengedrängt erscheinen, so dürfte eine Abhängigkeit des Schattenhalbmessers von dem Einfallswinkel der Sonnenstrahlen leicht erklärlich sein, zumal da es ja bekannt ist, dass auch beim Vollmond die Randpartien heller leuchten als die Mitte der Mondscheibe. Nach Analogie der letztgenannten Erscheinung sollte man erwarten, dass der Schatten am Mondrande weniger dunkel d. h. der Schattenradius kleiner sein sollte, als im Innern der Mondscheibe. In der That fand auch Herr SEELIGER aus den Beobachtungen am Mondrande allein einen kleineren Werth von $V$, als aus allen Beobachtungen zusammen. Der Verfasser hat nun die $R$ der zuverlässigeren Beobachtungsreihen nach dem Winkel $F$ geordnet, wobei sich das folgende Resultat ergab:

| $F$ | SCHMIDT und MÄDLER | Alle anderen Beobachter |
|---|---|---|
| 0° — 10° | + 13″6 (5) | + 19″0 (3) |
| 10 — 20 | + 0.1 (57) | + 1.3 (75) |
| 20 — 30 | + 2.3 (236) | + 3.3 (262) |
| 30 — 40 | — 0.5 (119) | + 3.7 (108) |
| 40 — 50 | — 0.1 (258) | — 1.4 (248) |
| 50 — 60 | — 0.2 (149) | — 2.3 (187) |
| 60 — 70 | — 2.1 (171) | — 2.2 (144) |
| 70 — 80 | + 0.6 (33) | + 4.2 (15) |
| 90 | — 3.5 (29) | — 7.3 (61) |

In diesen Zahlen spricht sich nun thatsächlich ein Gang in dem erwarteten Sinne aus, namentlich bestätigt die letzte Zeile das von Herrn Seeliger gefundene Resultat. Die gefundenen Correctionen sind aber, soweit sie überhaupt als sicher bestimmt zu betrachten sind, so klein, dass durch ihre Anbringung die Darstellung der Contactbeobachtungen kaum merklich verbessert würde. Bei schärferen Messungen darf jedoch diese Erscheinung nicht mehr ausser Acht gelassen werden.

## 12.

### Sichelbreiten, gemessen am Fadenmikrometer.

Während der sehr kleinen Mondfinsterniss am 10. Juni 1835 maass Mädler am Fadenmikrometer zehnmal die Pfeilhöhe des verfinsterten Theiles und veröffentlichte die Berechnung dieser Messungen zuerst in den A. N. Bd. 12, pag. 367, später noch mit denselben Zahlen in der Selenographie pag. 144 und in den Beiträgen zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper pag. 53. Die dort gefundene Vergrösserung $V = 95''5$ (Vergrösserungsfactor 1 : 28.3) weicht so sehr von allen anderen Beobachtungen ab, dass eine nochmalige Bearbeitung dieser wenigen Messungen erwünscht erschien, zumal da die Mädler'sche Berechnung durchaus nicht einwurfsfrei ist: aus den zehn directen Messungen bildet er zuerst auf eine höchst willkürliche Weise sechs Mittelwerthe, aus denen dann durch eine Interpolationsformel das Maximum der Schattenbreite abgeleitet wird. Indem Mädler hieraus dann den Werth von $V$ berechnete, übersah er noch den Einfluss der Parallaxe, der bei dem tiefen Stande des Mondes die gemessene Strecke um etwa $10''$ zu gross erscheinen liess.

Die Originalmessungen sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $16^h 41^m 7$ Stz. Berl. | $25^R742$ l | $16^h 59^m 8$ Stz. Berl. | $33^R027$ r |
| 43.2 | 34.298 r | 17 1.2 | 27.361 l |
| 51.8 | 34.270 r | 3.2 | 32.490 r |
| 53.2 | 26.078 l | 4.6 | 27.746 l |
| 58.2 | 26.803 l | 8.7 | 28.368 l |
| Coinc. = $30^R038$ | | $1^R = 44''200$ | |

Aus den HANSEN'schen und LEVERRIER'schen Tafeln ergeben sich die zwei Örter:

| | 1835 | |
|---|---|---|
| $\vartheta$ = Mittl. Greenw. Zeit | Juni 10.440 | 10.460 |
| $l$ = Länge des Mondes | 259° 7′ 52″.5 | 259° 25′ 48″.0 |
| $b$ = Breite des Mondes | — 0 59 44.4 | — 1 1 22.0 |
| $\pi$ = Parallaxe des Mondes | 1 0 48.9 | 1 0 48.5 |
| $h$ = Halbmesser des Mondes | 16 35.9 | 16 35.8 |
| $\Lambda$ = Länge der Erde | 259 14 55.5 | 259 16 4.3 |
| $\Pi$ = Parallaxe der Sonne | 8.7 | 8.7 |
| $H$ = Halbmesser der Sonne | 15 46.5 | 15 46.5 |

und hieraus nach I, pag. 388 die folgenden Finsternisselemente:

$$t_0 = 10^h 35^m 44^s.4$$
$$\log e = 3.557324_n$$
$$\log dS = 9.767388$$
$$\nu = -5° 32'.3$$
$$q = -4 \quad 37.5$$
$$\omega_{a_2} = 45' 10''.9$$
$$f = 17.6$$
$$u = 10.4$$

Obwohl sich die HANSEN'schen Tafeln zu jener Zeit den Beobachtungen sehr gut anschliessen, so wurde doch der Versuch gemacht, den Mondort durch gleichzeitige Beobachtungen zu sichern, da ein Fehler in der Mondbreite mit seinem vollen Betrage in $V$ eingeht. Besonderen Nutzen hoffte der Verfasser aus der Bedeckung von $\vartheta$ Ophiuchi zu ziehen, welche am selben Abend stattfand. Es fanden sich jedoch nur Beobachtungen aus Ortschaften vor, für welche die Bedeckung so nahe central war, dass eine Breitenbestimmung ausgeschlossen erscheint. Die in den A. N. Bd. 13, 14 und 17 publicirten Beobachtungen lieferten die folgenden Bedingungsgleichungen; da sich bei dem geringen Breitenunterschiede der Beobachtungsorte die Mondparallaxe nicht bestimmen lässt, so wurde die HANSEN'sche, deren Fehler nach anderen Untersuchungen ja auch 0″.5 kaum überschreitet, als fehlerfrei angenommen.

| | |
|---|---|
| Krakau E: | $+0''7 = dh + 0.89\,d\alpha + 0.20\,d\delta$ |
| Breslau E: | $+1.1 = dh + 0.89\,d\alpha + 0.17\,d\delta$ |
| Breslau A: | $+2.5 = dh - 0.70\,d\alpha + 0.64\,d\delta$ |
| Greenwich A: | $+3.9 = dh - 0.81\,d\alpha + 0.44\,d\delta$ |
| Altona E: | $+3.6 = dh + 0.90\,d\alpha + 0.10\,d\delta$ |
| Wilna E: | $-0.2 = dh + 0.85\,d\alpha + 0.36\,d\delta$ |
| Königsberg E: | $+3.5 = dh + 0.87\,d\alpha + 0.29\,d\delta$. |

Der Mondort ist nach HANSEN gerechnet, während als mittlerer Mondhalbmesser nicht HANSEN's Werth 15′34″1, sondern der aus Sternbedeckungen und Heliometermessungen folgende Werth 15′32″8 angenommen wurde. Die Königsberger Beobachtung wurde um $+1^{m}$ verbessert.

Aus obigen 7 Beobachtungen folgen die Normalgleichungen:

$$+15''10 = +7.00\,dh + 2.89\,d\alpha + 2.20\,d\delta$$
$$+2.80 = +2.89\,dh + 5.02\,d\alpha + 0.17\,d\delta$$
$$+4.95 = +2.20\,dh + 0.17\,d\alpha + 0.89\,d\delta,$$

von denen jedoch die letzte, abgesehen von $d\alpha$, fast genau der dritte Theil der ersten ist, so dass sich also $dh$ und $d\delta$ nicht scharf trennen lassen. Bestimmen wir $d\alpha$ aus der zweiten Gleichung, so folgt aus der ersten und dritten nahezu identisch:

$$d\delta = +6''42 - 2.54\,dh$$
resp. $$d\delta = +5.52 - 2.39\,dh$$
oder im Mittel $$d\delta = +6.16 - 2.50\,dh.$$

Für die oben angegebenen Werthe von $h$, die man etwa als Grenzwerthe ansehen kann, würde man also erhalten

$$d\delta = +2''81 \text{ resp. } d\delta = +6''16$$
während gleichzeitig $d\alpha = -0''30$ resp. $d\alpha = +0''35$

würde. Jedoch ist die Bestimmung von $d\delta$ ganz unsicher, da z. B. die strenge Auflösung der Normalgleichungen $d\delta = -7''5 \pm 6''3$ ergiebt.

Wesentlich zuverlässiger sind die gleichzeitigen Meridianbeobachtungen des Mondes:

| | | |
|---|---|---|
| 1) Wien, Juni 10 (A. N. 12, pag. 368) | $d\alpha = +0^{s}02$ | $d\delta = -3''6$ |
| 2) Greenwich, Juni 9, 10, 11 (Greenw. Obs.) | $+0.03$ | $+0.9$ |

Die Greenwicher Declination liegt in der Mitte zwischen der durch die Sternbedeckung gezogenen Grenze und der Wiener Beobachtung, auch stimmen die drei gemittelten Abende sehr gut unter einander. Hiernach dürfen wir annehmen, dass der HANSEN'sche Mondort kaum über 1″ fehlerhaft sein wird.

Die Berechnung von MÄDLER's Messungen wurde nach den Formeln des § 8 ausgeführt, nur war, da die Breite des verfinsterten Theiles gemessen wurde, $2h - D'$ statt $D'$ einzusetzen. Um eine Controle zu erleichtern, seien die folgenden Hülfsgrössen mitgetheilt:

| $\vartheta$ | $g_0$ | $P$ | $\lg\lambda$ | $\lg\frac{h_0}{h}$ | $\varepsilon$ | $\omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^h\ 30^m$ | $-5°\ 23'.7$ | $198°\ 51'.5$ | 0.00370 | 9.99830 | $-9''.6$ | $45'\ 11''.5$ |
| 40 | $-3\ 53.8$ | 191 44.8 | 376 | 828 | $-9.9$ | 11.1 |
| 50 | $-2\ 23.8$ | 184 40.6 | 378 | 827 | $-9.0$ | 9.6 |
| 11 0 | $-0\ 53.5$ | 177 44.7 | 378 | 826 | $-6.6$ | 7.2 |

Die vorletzte Columne enthält das parallaktische Glied

$$\varepsilon = \zeta h_0 \sin\mu \cos P,$$

während die anderen Bezeichnungen in § 8 erklärt sind. Die Endresultate der einzelnen Messungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

| Nr. | $\chi$ | $\omega'$ | $V$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 191°.2 | $46'\ 34''.1$ | $+1'\ 22''.7$ | $+5''.1$ |
| 2 | 190.4 | 46 32.3 | 1 20.9 | $+3.3$ |
| 3 | 185.6 | 46 42.4 | 1 31.7 | $+14.1$ |
| 4 | 184.8 | 46 34.6 | 1 24.1 | $+6.5$ |
| 5 | 182.1 | 46 23.8 | 1 14.3 | $-3.3$ |
| 6 | 181.2 | 46 21.4 | 1 12.2 | $-5.4$ |
| 7 | 180.4 | 46 15.9 | 1 7.0 | $-10.6$ |
| 8 | 179.4 | 46 18.8 | 1 10.4 | $-7.2$ |
| 9 | 178.6 | 46 21.5 | 1 13.5 | $-4.1$ |
| 10 | 176.4 | 46 26.6 | 1 19.6 | $+2.0$ |
| | | Mittel | $V_1 = +1\ 17.6$ | |

Die von uns gefundene Vergrösserung $V = 77''.6$ ist nun erheblich kleiner als MÄDLER's Resultat $95''.5$; der Unterschied erklärt sich zum Theil durch den Fehler von 6″ in der BURCKHARDT'schen Mondbreite, zum Theil (10″) durch die Vernachlässigung der oben mit $\varepsilon$ bezeichneten Reduction auf den Erdmittelpunkt.

Behandeln wir die Reste $R = V - V_1$ als zufällige Beobachtungsfehler, so wird der m. F. einer Beobachtuug $= \pm 7''48$, so dass also diese Messungen den besten Contactbeobachtungen an die Seite zu stellen sind. Interessant ist die sehr deutlich ausgesprochene Wellenform in den Werthen von $R$, die auf eine gleichmässige Schwankung in der Auffassung des Beobachters oder in der Durchsichtigkeit der Luft schliessen lässt. Der m. F. des Endresultates $V = 77''6$ ergiebt sich zu $\pm 2''37$; schlagen wir hierzu noch eine Unsicherheit des Mondortes von etwa $1''6$, so dürfen wir obigen Werth als auf etwa $4''$ sicher bestimmt ansehen. Auf alle Fälle bleibt somit das Resultat bestehen, dass bei dieser sehr kleinen Finsterniss der Schattenradius um fast $30''$ grösser erschien, als es sonst der Fall ist, eine Erscheinung, die nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen vollkommen erklärlich ist.

Nur wenig grösser, als die soeben besprochene war die partielle Mondfinsterniss am 22. Mai 1872, bei welcher Schmidt die Breite des Schattensegmentes auf der Mondscheibe genau in der gleichen Weise wie Mädler maass. Die zwanzig Beobachtungen sind in dem zu Potsdam befindlichen Manuscript gleichzeitig mit den daraus berechneten $V$ zusammengestellt. Eine Neureduction dieser Messungen war für unseren Zweck weder nöthig, noch auch ausführbar, da der Schraubenwerth des Mikrometers nicht mit genügender Sicherheit ermittelt werden konnte. Schmidt hat, genau wie bei seinen Kraterbeobachtungen, jedenfalls Mädler's Formeln für seine Rechnung benutzt, so dass wir an seinem Resultate hauptsächlich noch die parallaktische Libration $\varepsilon$ anzubringen haben, welche, wie eine kurze Rechnung ergiebt, zur Zeit der Mitte der Finsterniss die gemessene Pfeilhöhe, also auch den Schattenhalbmesser um $9''3$ zu klein erscheinen liess.

Die nach Newcomb berechnete Verbesserung der Hansen'schen Mondbreite beträgt $+ 1''0$, und da der südliche Rand des Mondes vom Schatten getroffen wurde, so haben wir auch noch um diesen Betrag den von Schmidt berechneten Schattenradius zu vergrössern. Schmidt fand die folgenden Werthe von $V$, neben die ich gleich die entsprechenden $R$ setze:

| M. Z. | V | R | M. Z. | V | R |
|---|---|---|---|---|---|
| 12h40m9 | + 44″3 | — 4″0 | 12h55m4 | + 48″9 | + 0″6 |
| 43.5 | 42.1 | — 6.2 | 56.5 | 44.5 | — 3.8 |
| 45.2 | 43.4 | — 4.9 | 58.2 | 51.2 | + 2.9 |
| 47.5 | 44.0 | — 4.3 | 59.0 | 42.9 | — 5.4 |
| 49.2 | 43.3 | — 5.0 | 13 0.4 | 44.9 | — 3.4 |
| 50.4 | 44.2 | — 4.1 | 2.3 | 49.8 | + 1.5 |
| 51.7 | 50.7 | + 2.4 | 3.9 | 50.8 | + 2.5 |
| 52.6 | 48.9 | + 0.6 | 11.0 | 60.6 | + 12.3 |
| 53.6 | 45.2 | — 3.1 | 11.9 | 57.9 | + 9.6 |
| 54.6 | 49.8 | + 1.5 | 12.8 | 59.3 | + 11.0 |

Mittel $V_1 = + 48.3$

Verbesserung $+ 10.3$

mithin beobachtete Vergrösserung $V_1 = + 58.6$ .

Es ergiebt sich $\Sigma R^2 = 593.61$, also der m. F. einer Beobachtung $\pm$ 5″59. Auch diese Reihe liefert also einen Beweis für die Schärfe dieser Beobachtungsart, jedoch zeigt sich auch hier wieder eine starke Schwankung in der Auffassung des Beobachters: die drei letzten Einstellungen, welche durch eine etwas grössere Zwischenzeit von den übrigen getrennt sind, ergeben plötzlich einen über 10″ grösseren Schattenradius. Der Mittelwerth $V_1 = 58''6$ ist auch hier wieder erheblich grösser, als die sonst von Schmidt beobachtete Vergrösserung (46″44 im Mittel aus 948 Beobachtungen) und bildet somit eine Bestätigung des oben gefundenen Resultates.

## 13.

## Heliometer-Sichelbreiten.

Die nun folgenden Messungen wurden sämmtlich während der nahezu totalen Finsterniss am 11. Mai 1892 ausgeführt, weshalb ich zunächst die allgemeinen Reductionselemente vorausschicke.

Aus den Ephemeriden des Nautical Almanac folgen die beiden Örter:

| | | |
|---|---|---|
| $\vartheta$ | 1892 Mai 11.420 | 11.490 |
| $l$ | 231° 12′ 17″.9 | 232° 2′ 34″.2 |
| $b$ | — 23 24.3 | — 28 2.7 |
| $\pi$ | 54 21.6 | 54 22.6 |
| $h$ | 14 49.0 | 14 49.3 |
| $A$ | 231 37 9.3 | 231 41 12.3 |
| $\Pi$ | 8.8 | 8.8 |
| $H$ | 15 51.0 | 15 51.0 |

und hieraus die Finsternisselemente:

$$t_0 = 10^h 53^m 23^s.8$$
$$\log e = 3.189274\ n$$
$$\log dS = 9.663568$$
$$\nu = -\ 5° 43'.9$$
$$q = -\ 15\ 4.0$$
$$\omega_{a_2} = 38' 39''.8$$
$$f = 14.1$$
$$u = 9.92$$

Für den Beobachtungsort Leipzig wurden nun die folgenden Grössen tabellarisch gerechnet:

| $\vartheta$ | $\alpha - \alpha_0$ | $\delta$ | $\log h$ | $g - g_0$ | $\log \mu$ | $z$ | $\eta = g_0$ | $\log \varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $9^h 20^m$ | +15′ 44″.5 | −19° 8′ 59″.6 | 2.95080 | −4′.9 | 3.4951 | 74° 5′ 31″.7 | −16° 34′.6 | 6.4200 |
| 36 | 13 30.6 | 12 8.2 | 093 | 4.2 | 930 | 73 9 34.1 | 14 14.3 | 23 |
| 52 | 11 12.7 | 15 13.8 | 104 | 3.5 | 911 | 72 22 31.1 | 11 49.6 | 41 |
| 10 8 | 8 51.6 | 18 16.2 | 113 | 2.8 | 896 | 71 44 42.7 | 9 21.1 | 54 |
| 24 | 6 28.0 | 21 15.2 | 121 | 2.1 | 884 | 71 16 26.0 | 6 49.6 | 62 |
| 40 | 4 2.4 | 24 10.9 | 127 | 1.3 | 876 | 70 57 54.1 | 4 15.9 | 68 |
| 56 | + 1 35.5 | 27 3.2 | 131 | − 0.5 | 873 | 70 49 15.7 | − 1 40.8 | 70 |
| 11 12 | − 0 51.9 | 29 52.0 | 133 | + 0.3 | 874 | 70 50 35.2 | + 0 54.7 | 70 |
| 28 | 3 19.1 | 32 37.3 | 133 | 1.1 | 879 | 71 1 52.2 | 3 29.8 | 67 |
| 44 | 5 45.5 | 35 19.2 | 131 | 1.8 | 888 | 71 23 1.7 | 6 3.7 | 60 |
| 12 0 | 8 10.3 | 37 57.5 | 127 | 2.6 | 901 | 71 53 54.1 | 8 35.5 | 51 |
| 16 | 10 32.9 | 40 32.3 | 122 | 3.4 | 918 | 72 34 15.7 | 11 4.3 | 37 |

Die Grössen $z$, $\eta$ und $\varkappa$ dienen zur Berechnung der Refraction nach den Formeln

$$R = -\varkappa\, \mathrm{tg}^2 z\, \mathrm{cosec}\, 1'\, \sin(P' + J - \eta)\, \cos(P' + J - \eta)$$
$$\lambda = 1 + \varkappa + \varkappa\, \mathrm{tg}^2 z\, \cos^2(P' + J - \eta)\,.$$

$\varkappa$ ist gerechnet für $B = 756.2$ mm, $T = + 14.^\circ 0$ C. Die Instrumentalverbesserung $J$ bestimmt sich nach der Formel

$$J = - P_0 + c \operatorname{tg} \delta - n \sec \delta - s \sec \delta \cos(\tau - \tau_0)\,,$$

worin nach der am 9. Mai ausgeführten Aufstellungsbeobachtung zu setzen ist

$$c = + 1.'31 \qquad n = - 0.'63 \qquad s = + 1.'40 \qquad \tau_0 = - 72^\circ 5'\,,$$

während sich für den Nullpunkt des Positionskreises aus der Beobachtung des Normalbogens 4 Virginis — 6 Virginis am 11. Mai kurz vor der Finsterniss ergab:

$$P_0 = 88^\circ 58.'04\,.$$

Aus Dr. PETER's Messungen des Perseusbogens ergab sich der Scalenwerth

$$\log \sigma = 1.3369714$$

(berechnet für Säulenthermometer $= + 13.^\circ 0$,
Kopfthermometer $= + 13.6$,
Ocularscala $= 10.10$)

und aus dessen Parallaxenmessungen am 8. und 9. Mai der Coincidenzpunkt

$$b = + 0.^p 53\,.$$

Die Theilung geht, wie hier nur kurz bemerkt werden soll, auf der einen Scala (A) von 0 bis 400, auf der anderen (B) von 400 bis 800 und es wird immer ein Strich von A zwischen zwei Striche von B eingemessen, resp. bei den vorliegenden Beobachtungen zur Beschleunigung der Messungen auf 0.1 Pars eingeschätzt. Steht bei Coincidenz der beiden Brennpunkte dann der Strich A $= 0$ über B $= 400 + b$, so hat man bei Messung irgend einer Distanz $D$ stets

$$\pm D = B - (A + 400) - b\,.$$

In der folgenden Tafel sind unter $\Delta$ die gemessenen Werthe von $B - (A + 400)$ aufgeführt, unter $K$ sind die Zeiten des Sternzeit-Chronometers »Kessels«, unter $P'$ die abgelesenen Positionswinkel gegeben. Die Chronometercorrection war

$$12^h 39^m \text{ Corr.} = - 51.^s 80$$
$$17 \;\; 4 \qquad = - 53.10\,.$$

Die Messungen wurden von den beiden Beobachtern Prof. Bruns und Dr. Peter abwechselnd in der Weise ausgeführt, dass jeder Beobachter hintereinander acht Einstellungen machte, während der andere nachschrieb und die Zeiten notirte; hierauf wurden die Rollen vertauscht. Nach der zweiten und sechsten Einstellung wurden die Schieber durchgeschraubt. Die Messungen erfolgten immer längere Zeit bei fest eingestelltem Positionskreis und der Positionswinkel wurde erst geändert, wenn die Schnittlinie eine merkliche Neigung gegen die Pfeilhöhe annahm. Bei einem Theile der Messungen wurde das im § 8 mit (2) bezeichnete, innen liegende Mondbild durch eines der drei Blendgitter abgedämpft, von denen das erste aus einer, das zweite aus zwei und das dritte aus drei Lagen Drahtgaze besteht; 0 habe ich in die mit *G* überschriebene Columne gesetzt, wenn kein Gitter benutzt wurde. Die vor und zwischen diesen Sichelbreiten gemessenen Sehnen folgen in genau gleicher Anordnung im nächsten Paragraphen.

| Beobachter | $P'$ | $G$ | $K$ | $\Delta$ | Beobachter | $P'$ | $G$ | $K$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P. | 331° 0.′2 | 3 | $14^h 17^m 28^s$ | $-23^{p}.85$ [1] | B. | 331° 0.2 | 0 | $14^h 39^m 20^s$ | $-9^{p}.2$ |
| | | | 17 49 | −23.8 | | | | 39 39 | − 8.9 |
| | | | 18 20 | +24.6 | | | | 39 57.5 | + 9.3 |
| | | | 18 38 | +24.05 | | | | 40 16 | + 8.9 |
| | | | 18 57 | +23.1 | | | | 40 38 | + 9.4 |
| | | | 19 27 | +23.3 | | | | 40 54.5 | + 9.1 |
| | | | 19 59.5 | −22.1 | | | | 41 9.5 | − 8.3 |
| | | | 20 25.5 | −21.95 | | | | 41 29 | − 8.4 |
| B. | 331 0.2 | 3 | 14 20 56.5 | −21.4 | P. | 313 0.0 | 2 | 14 47 29 | + 7.3 |
| | | | 21 37 | −21.4 | | | | 47 54 | + 6.9 |
| | | | 24 10.5 | +19.9 | | | | 48 26 | − 5.9 |
| | | | 24 30.5 | +19.7 | | | | 48 40 | − 5.95 |
| | | | 24 57 | +18.8 | | | | 48 56 | − 5.5 |
| | | | 25 33 | +18.0 | | | | 49 9 | − 5.6 |
| | | | 26 38 | −16.5 | | | | 49 43 | + 6.9 |
| | | | 27 6 | −17.1 [2] | | | | 49 59.5 | + 6.95 |
| P. | 331 0.2 | 0 | 14 35 46 | −11.5 | B. | 313 0.0 | 2 | 14 50 50 | + 5.9 |
| | | | 36 7 | −11.2 | | | | 51 25 | + 6.0 |
| | | | 36 35 | +12.95 | | | | 52 22.5 | − 4.8 |
| | | | 37 0 | +12.6 | | | | 52 42.5 | − 5.0 |
| | | | 37 22 | +11.9 | | | | 53 23 | − 4.5 |
| | | | 37 39 | +11.05 | | | | 53 39 | − 4.0 |
| | | | 38 9 | −10.5 | | | | 54 28 | + 4.8 |
| | | | 38 28 | −10.5 | | | | 54 47.5 | + 5.0 [3] |

| Beob-achter | P′ | G | K | Δ | Beob-achter | P′ | G | K | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P. | 313° 0.′0 | 0 | 14$^{h}$57$^{m}$42$^{s}$ | + 4$^{p}$5 | P. | 294° 0.′0 | 0 | 15$^{h}$24$^{m}$58$^{s}$ | − 7$^{p}$95 |
| | | | 57 57 | + 4.8 | | | | 25 17 | − 8.3 |
| | | | 58 13 | − 3.9 | | | | 25 39.5 | +10.3 |
| | | | 58 30 | − 3.3 | | | | 26 5 | +10.0 |
| | | | 58 46 | − 3.3 | | | | 26 26 | +10.8 |
| | | | 59 1 | − 3.4 | | | | 26 46 | +11.05 |
| | | | 59 17 | + 4.9 | | | | 27 6 | − 9.8 |
| | | | 59 31 | + 5.0 | | | | 27 25 | −10.2 |
| B. | 313 0.0 | 0 | 15 0 29 | + 3.5 | B. | 280 0.0 | 3 | 15 30 16.5 | + 9.8 |
| | | | 0 45.5 | + 3.2 | | | | 30 35.5 | +10.0 |
| | | | 1 5.5 | − 2.1 | | | | 31 3 | −11.1 |
| | | | 1 25 | − 2.3 | | | | 31 17 | −11.0 |
| | | | 1 42.5 | − 2.1 | | | | 31 34 | −11.0 |
| | | | 1 57.5 | − 2.3 | | | | 31 48.5 | −11.2 |
| | | | 2 20.5 | + 3.8 | | | | 32 16.5 | +12.0 |
| | | | 2 36 | + 3.5 [4] | | | | 32 33 | +11.7 [6] |
| P. | 305 30.0 | 0 | 15 9 37 | − 3.7 | P. | 245 0.0 | 3 | 16 8 21 | −38.9 |
| | | | 9 56 | − 3.9 | | | | 8 40.5 | −39.1 |
| | | | 10 13 | + 5.0 | | | | 9 17 | +40.2 |
| | | | 10 31 | + 4.8 | | | | 9 33 | +39.9 |
| | | | 10 46 | + 5.2 | | | | 9 51 | +39.7 |
| | | | 11 2 | + 5.1 | | | | 10 6 | +40.6 |
| | | | 11 21 | − 4.2 | | | | 10 45.5 | −40.9 |
| | | | 11 36.5 | − 4.0 | | | | 11 3 | −41.1 |
| B. | 305 30.0 | 0 | 15 12 17 | − 2.8 | B. | 234 30.0 | 3 | 16 12 34 | −42.8 |
| | | | 13 5.5 | − 3.1 | | | | 13 0 | −43.2 |
| | | | 13 41.5 | + 4.9 | | | | 13 56 | +44.3 |
| | | | 13 57.5 | + 5.0 | | | | 14 15 | +44.8 |
| | | | 14 18.5 | + 5.0 | | | | 14 39 | +45.4 |
| | | | 14 33 | + 4.9 | | | | 14 56.5 | +45.8 |
| | | | 14 44.5 | − 3.8 | | | | 15 29.5 | −45.9 |
| | | | 15 3 | − 4.2 | | | | 15 54.5 | −46.7 |
| P. | 294 0.0 | 0 | 15 17 23 | − 4.9 | P. | 234 30.0 | 3 | 16 17 7 | −47.5 |
| | | | 17 41 | − 5.4 | | | | 17 28 | −46.9 |
| | | | 17 58 | + 6.5 | | | | 18 4 | +47.7 |
| | | | 18 19 | + 6.3 | | | | 18 22 | +48.8 |
| | | | 18 35 | + 6.8 | | | | 18 52 | +49.3 |
| | | | 18 50 | + 7.0 | | | | 19 6 | +49.6 |
| | | | 19 8 | − 5.9 | | | | 19 44.5 | −49.7 |
| | | | 19 21.5 | − 5.7 | | | | 20 1.5 | −49.1 |
| B. | 294 0.0 | 0 | 15 20 37 | − 5.1 | B. | 234 30.0 | 3 | 16 21 33 | −51.7 |
| | | | 20 51 | − 5.3 | | | | 21 56.5 | −52.0 |
| | | | 21 50 | + 7.3 | | | | 22 37.5 | +53.2 |
| | | | 22 7.5 | + 7.2 | | | | 22 56 | +53.8 |
| | | | 22 20.5 | + 7.5 | | | | 23 11 | +53.8 |
| | | | 22 35 | + 7.5 | | | | 23 26 | +53.4 |
| | | | 22 47 | − 6.5 | | | | 24 2.5 | −53.8 |
| | | | 23 13.5 | − 6.5 [5] | | | | 24 25.5 | −54.9 |

| Beobachter | $P'$ | $G$ | $K$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| P. | 234°30.′0 | 3 | $16^h25^m38^s.5$ | − 54.″9 |
| | | | 25 55 | − 54.6 |
| | | | 26 30 | + 56.5 |
| | | | 26 47 | + 57.0 |
| | | | 27 4 | + 56.3 |
| | | | 27 17.5 | + 57.0 |
| | | | 27 51.5 | − 57.0 |
| | | | 28 7 | − 56.8 [7]) |

Anmerkungen der Beobachter: 1) Die Einstellung bei Gitter 3 so, dass der Helligkeitsunterschied an der Contactstelle verschwand. 2) Die Nordhälfte heller als die Südhälfte der Mondscheibe. 3) Längs der Sichel ausgesprochen graublau. 4) Mondscheibe im Osten und Westen aschroth, West heller als Ost, im Süden längs der Sichel graublau. 5) Hörner verwaschen, Rand im Erdschatten sehr hell. 6) Hörner besser (es folgt nun wieder eine Reihe Sehnenmessungen). 7) Der Schatten merklich schärfer, als bei der entsprechenden Phase des Beginns.

Zur weiteren Vereinfachung der Rechnung konnten nun noch diejenigen Grössen tabellarisch gerechnet werden, welche neben der Zeit noch vom eingestellten Positionswinkel $P'$ abhängen; es sind dies die folgenden:

| $\vartheta$ | $W$ | lg $A$ | $\varepsilon$ | $\chi$ | $\omega$ | $\vartheta$ | $W$ | lg $A$ | $\varepsilon$ | $\chi$ | $\omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^h\ 6^m$ | 221° 6.′5 | 1.33497 | −5.″3 | 240.°0 | 38′50.″3 | $10^h58^m$ | 195°37.′9 | 1.33536 | −5.″8 | 194.°8 | 38′36.″7 |
| 10 | 6.5 | 97 | 5.3 | 236.8 | 49.0 | 11 4 | 38.6 | 37 | − 6.0 | 188.4 | 36.5 |
| 14 | 6.6 | 96 | 5.4 | 233.6 | 47.7 | | | | | | |
| 18 | 6.6 | 96 | 5.4 | 230.5 | 46.5 | 11 6 | 184 9.5 | 1.33555 | − 6.7 | 186.7 | 38 37.2 |
| 22 | 6.7 | 95 | 5.5 | 227.3 | 45.2 | 11 | 10.0 | 57 | 7.8 | 180.8 | 38.4 |
| 26 | 6.7 | 94 | 5.6 | 224.1 | 43.9 | 16 | 10.6 | 58 | 8.9 | 174.9 | 39.6 |
| 30 | 6.8 | 94 | 5.6 | 220.9 | 42.6 | | | | | | |
| 34 | 6.8 | 93 | 5.7 | 217.7 | 41.3 | 11 20 | 170 12.5 | 1.33573 | − 9.0 | 172.8 | 38 39.8 |
| 36 | 203 5.7 | 1.33520 | 5.3 | 217.5 | 38 41.0 | 11 58 | 135 20.2 | 1.33564 | −10.3 | 149.1 | 38 47.1 |
| 40 | 6.0 | 21 | 5.2 | 213.4 | 39.9 | | | | | | |
| 44 | 6.4 | 21 | 5.0 | 209.4 | 38.7 | 12 1 | 124 50.5 | 1.33546 | −10.9 | 153.4 | 38 46.5 |
| 48 | 6.8 | 22 | 4.8 | 205.3 | 37.6 | 9 | 51.1 | 50 | 9.6 | 148.6 | 46.8 |
| 52 | 7.1 | 22 | 4.7 | 201.3 | 36.4 | 17 | 51.7 | 54 | 8.3 | 143.7 | 47.1 |

Schon ein Blick auf die vorstehenden Messungen zeigt, dass dieselben keine sehr grosse Genauigkeit besitzen und es wurden daher für die weitere Rechnung je zwei auf einander folgende Einstellungen zu Mittelwerthen vereinigt, für welche sich dann die folgenden Werthe der beobachteten Vergrösserung $V$ ergaben:

| PETER | | | | | | BRUNS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vartheta$ | $G$ | $D'$ | $V$ | $R$ | $R_1$ | $\vartheta$ | $G$ | $D'$ | $V$ | $R$ | $R'$ |
| $10^{h}\ 6^{m}37^{s}.0$ | 3 | $24^{p}.35$ | +43″.2 | + 4″.5 | − 1″.2 | $10^{h}10^{m}14^{s}.7$ | 3 | $21^{p}.93$ | +34″.7 | − 9″.6 | −12″.2 |
| 7 27.4 | | 23.79 | 42.7 | + 4.0 | − 1.7 | 13 17.9 | | 19.27 | 44.0 | − 0.3 | − 2.9 |
| 8 10.2 | | 22.67 | 52.9 | +14.2 | + 8.5 | 14 12.2 | | 17.87 | 60.5 | +16.2 | +13.6 |
| 9 10.6 | | 22.55 | 38.8 | + 0.1 | − 5.6 | 15 48.9 | | 17.33 | 48.3 | + 4.0 | + 1.4 |
| 24 51.9 | 0 | 11.88 | 47.3 | +12.6 | + 5.7 | 28 24.3 | 0 | 9.58 | 57.0 | + 1.3 | − 4.5 |
| 25 42.7 | | 12.25 | 30.3 | − 4.4 | −11.3 | 29 1.5 | | 8.57 | 71.7 | +16.0 | +10.2 |
| 26 25.6 | | 10.95 | 49.4 | +14.7 | + 7.8 | 29 40.8 | | 8.72 | 62.2 | + 6.5 | + 0.7 |
| 27 13.5 | | 11.03 | 39.4 | + 4.7 | − 2.2 | 30 13.7 | | 8.83 | 55.0 | − 0.7 | − 6.5 |
| 36 34.9 | 2 | 6.57 | 36.3 | − 2.4 | + 3.3 | 40 0.3 | 2 | 5.42 | 38.4 | − 5.9 | + 0.3 |
| 37 26.2 | | 6.45 | 32.9 | − 5.8 | − 0.1 | 41 25.1 | | 5.43 | 30.6 | −13.7 | − 7.5 |
| 37 55.7 | | 6.08 | 37.4 | − 1.3 | + 4.4 | 42 23.4 | | 4.78 | 39.7 | − 4.6 | + 1.6 |
| 38 44.2 | | 6.39 | 25.4 | −13.3 | − 7.6 | 43 30.0 | | 4.37 | 43.6 | − 0.7 | + 5.5 |
| 46 41.2 | 0 | 4.12 | 38.0 | + 3.3 | + 2.1 | 49 28.4 | 0 | 2.82 | 59.6 | + 3.9 | + 1.4 |
| 47 13.1 | | 4.13 | 36.7 | + 2.0 | + 0.8 | 50 6.3 | | 2.73 | 60.8 | + 5.1 | + 2.6 |
| 47 45.0 | | 3.88 | 40.6 | + 5.9 | + 4.7 | 50 41.0 | | 2.73 | 60.3 | + 4.6 | + 2.1 |
| 48 15.4 | | 4.43 | 28.5 | − 6.2 | − 7.4 | 51 19.1 | | 3.12 | 52.3 | − 3.4 | − 5.9 |
| 58 36.1 | 0 | 4.33 | 32.5 | − 2.2 | + 0.1 | 11 1 30.3 | 0 | 3.48 | 60.6 | + 4.9 | + 7.9 |
| 59 11.5 | | 4.37 | 33.6 | − 1.1 | + 1.2 | 2 38.4 | | 4.42 | 47.8 | − 7.9 | − 4.9 |
| 59 43.4 | | 4.62 | 30.6 | − 4.1 | − 1.8 | 3 14.6 | | 4.42 | 51.0 | − 4.7 | − 1.7 |
| 11 0 18.1 | | 4.63 | 32.8 | − 1.9 | + 0.4 | 3 42.6 | | 4.53 | 51.5 | − 4.2 | − 1.2 |
| 6 20.3 | 0 | 5.68 | 35.4 | + 0.7 | + 1.9 | 9 31.8 | 0 | 5.73 | 57.1 | + 1.4 | + 6.7 |
| 6 56.7 | | 5.87 | 35.4 | + 0.7 | + 1.9 | 10 46.4 | | 6.72 | 47.9 | − 7.8 | − 2.5 |
| 7 30.6 | | 6.37 | 29.1 | − 5.6 | − 4.4 | 11 15.3 | | 6.97 | 47.2 | − 8.5 | − 3.2 |
| 8 2.8 | | 6.33 | 34.0 | − 0.7 | + 0.5 | 11 47.6 | | 7.03 | 49.6 | − 6.1 | − 0.8 |
| 13 54.5 | 0 | 8.65 | 39.9 | + 5.2 | + 9.9 | 19 12.2 | 3 | 9.37 | 68.2 | +23.9 | +20.4 |
| 14 39.1 | | 9.62 | 29.5 | − 5.2 | − 0.5 | 19 56.1 | | 11.58 | 31.8 | −12.5 | −16.0 |
| 15 22.8 | | 10.39 | 22.7 | −12.0 | − 7.3 | 20 27.2 | | 11.63 | 37.7 | − 6.6 | −10.1 |
| 16 2.2 | | 10.53 | 27.9 | − 6.8 | − 2.1 | 21 10.7 | | 11.32 | 53.7 | + 9.4 | + 5.9 |
| 11 57 10.6 | 3 | 39.53 | 44.6 | −23.9 | −14.6 | 12 1 26.0 | 3 | 43.53 | 49.5 | − 6.2 | − 3.7 |
| 58 4.6 | | 39.52 | 64.2 | − 4.3 | + 5.0 | 2 44.3 | | 44.02 | 65.9 | +10.2 | +12.7 |
| 58 38.0 | | 39.62 | 74.3 | + 5.8 | +15.1 | 3 26.5 | | 45.07 | 58.2 | + 2.5 | + 5.0 |
| 59 33.5 | | 41.53 | 53.6 | −14.9 | − 5.6 | 4 20.5 | | 46.83 | 39.4 | −16.3 | −13.8 |
| 12 5 55.8 | 3 | 47.73 | 53.7 | −14.8 | − 9.9 | 10 22.3 | 3 | 52.38 | 50.2 | − 5.5 | − 8.0 |
| 6 51.1 | | 47.72 | 73.9 | + 5.4 | +10.3 | 11 24.1 | | 52.97 | 60.6 | + 4.9 | + 2.4 |
| 7 37.0 | | 48.92 | 64.6 | − 3.9 | + 1.0 | 11 55.7 | | 53.07 | 70.2 | +14.5 | +12.0 |
| 8 30.8 | | 49.93 | 62.1 | − 6.4 | − 1.5 | 12 51.1 | | 54.88 | 51.9 | − 3.8 | − 6.3 |
| 14 23.6 | 3 | 55.28 | 78.3 | + 9.8 | − 4.4 | | | | | | |
| 15 15.2 | | 56.22 | 77.7 | + 9.2 | − 5.0 | | | | | | |
| 15 47.4 | | 56.12 | 92.3 | +23.8 | + 9.6 | | | | | | |
| 16 35.6 | | 57.43 | 82.5 | +14.0 | − 0.2 | | | | | | |

Nach dem früher Gesagten vereinigen sich naturgemäss je vier dieser Resultate zu einem Satze, innerhalb dessen man das Aussehen des Schattens sowie die Auffassung des Beobachters als einigermaassen constant annehmen darf. Die also auf je acht Einstellungen beruhenden Satzmittel ergeben sich wie folgt:

| Peter | | | Bruns | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vartheta$ | $G$ | $V$ | $\vartheta$ | $G$ | $V$ |
| $10^h\ 8^m$ | 3 | + 44″.4 | $10^h\ 14^m$ | 3 | + 46″.9 |
| 26 | 0 | 41.6 | 29 | 0 | 61.5 |
| 38 | 2 | 33.0 | 42 | 2 | 38.1 |
| 48 | 0 | 35.9 | 50 | 0 | 58.2 |
| 59 | 0 | 32.4 | 11 3 | 0 | 52.7 |
| 11 7 | 0 | 33.5 | 11 | 0 | 50.4 |
| 15 | 0 | 30.0 | 20 | 3 | 47.8 |
| 58 | 3 | 59.2 | 12 3 | 3 | 53.2 |
| 12 7 | 3 | 63.6 | 12 | 3 | 58.2 |
| 16 | 3 | 82.7 | | | |

Die Resultate sind so neben einander gestellt, wie sie zeitlich auf einander folgten und man sieht hier deutlich, wie verschieden die Auffassung der Schattengrenze, selbst bei Benutzung des gleichen Instrumentes, für zwei Beobachter sein kann. Leider wurde durch die wechselnde Anwendung der verschiedenen Blenden die Gleichmässigkeit der Beobachtungsart so gestört, dass die einzelnen Zahlen nur noch schwer mit einander zu vergleichen sind.

Da durch die Heranbringung des hellen Mondrandes an die verwaschene Schattengrenze die ruhige Auffassung der letzteren sehr beeinträchtigt werden musste, so konnte man sich allerdings von der Abblendung des inneren Mondbildes eine Steigerung der Genauigkeit der Einstellungen versprechen; allein die vorliegenden Messungen liefern den Beweis, dass durch Anwendung des Gitters sicher nicht viel gewonnen wird.

Zunächst zeigt sich, wenigstens beim Beobachter P., ein wesentlicher Unterschied zwischen den Messungen bei geringer und bei grosser Sichelbreite, so dass wir beide Gruppen nicht zusammenziehen können.

Innerhalb der ersten Gruppe (von $10^h\ 8^m$ bis $11^h\ 20^m$) fand

| | Peter | Bruns |
|---|---|---|
| ohne Blende | 34.″7 | 55.″7 |
| mit » | 38.7 | 44.3 |

Zwischen Blende 2 und 3 wurde hier wegen des spärlichen Materials kein Unterschied gemacht. Hiernach scheint B. bei Benutzung der Gitter den Schatten etwa 11″ kleiner geschätzt zu haben, während bei P. die Gitter umgekehrt den Schatten um 4″ vergrösserten. Man sieht, dass die Wirkung der Blenden bei den zwei Beobachtern zufällig eine gerade entgegengesetzte war; jedenfalls wirkt das Gitter also nicht systematisch auf die Grösse des Schattens ein. Dürften wir hiernach von der Berücksichtigung der Blenden ganz absehen, so wollen wir doch, nur um für die scheinbare Genauigkeit der vorliegenden Messungen noch ein möglichst günstiges Resultat zu erzielen, die berechneten kleinen Unterschiede als reell betrachten und die Beobachtungsfehler unter Annahme der folgenden Mittelwerthe berechnen:

| | Peter | Bruns |
|---|---|---|
| bei schmaler Sichel ohne Blende | 34.″7 | 55.″7 |
| mit » | 38.7 | 44.3 |
| bei breiter Sichel mit » | 68.5 | 55.7. |

Die so gefundenen Fehler sind auf Seite 426 unter *R* angegeben und es folgen daraus als m. F. eines Mittels aus zwei Einstellungen:

| | Peter | Bruns |
|---|---|---|
| bei schmaler Sichel ohne Blende | ± 6.″52 | ± 6.″76 |
| mit » | 8.07 | 11.58 |
| bei breiter Sichel mit » | 13.79 | 9.95. |

Zunächst erkennt man bei beiden Beobachtern, dass durch Anwendung des Blendgitters die Schärfe der Einstellungen keineswegs gesteigert wurde. Am besten sind die Messungen der schmalen Sichel ohne Gitter.

Vergleichen wir die unter gleichen Bedingungen, also nur mit Blende, ausgeführten Messungen, so zeigt es sich, dass bei halb erleuchteter Mondscheibe P. den Schatten um ganze 30″ grösser gemessen hat, als bei schmaler Sichel, während bei B. der Unterschied

im gleichen Sinne nur 11″ beträgt; ja, beide Beobachter finden sogar übereinstimmend in ihren letzten Messungen eine schnelle Zunahme des Schattendurchmessers, welche der schnellen Zunahme der erleuchteten Mondsichel parallel läuft. Wiederum sehen wir also die schon oft erwähnte Erscheinung vor uns, dass der Schattendurchmesser mit zunehmender Finsterniss kleiner wird, doch können wir auch hier nicht entscheiden, ob dieser Vorgang objectiv oder physiologisch ist.

Da durch diese Schwankung von $V$ die oben berechneten Fehler möglicherweise (in der letzten Gruppe sicher) nachtheilig beeinflusst sind, so berechnen wir die Einstellungsfehler nun noch aus der Übereinstimmung innerhalb der einzelnen Sätze. Zieht man die Seite 427 zusammengestellten Mittel von den vier Zahlen jedes Satzes ab, so bleiben die Seite 426 mit $R_1$ bezeichneten Reste übrig, aus denen wir nun folgende m. F. des Mittels aus zwei Einstellungen finden:

| | PETER | BRUNS |
|---|---|---|
| bei schmaler Sichel ohne Blende | ± 5″75 | ± 5″54 |
| mit » | 5.72 | 11.75 |
| bei breiter Sichel mit » | 9.67 | 10.36 |
| im Mittel aus allen Messungen | ± 8″15 | |

Diese Fehler stellen, mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, die Unsicherheit schnell aufeinander folgender Einstellungen auf denselben Punkt des Schattens dar, die also im günstigsten Falle noch 7″84, im Mittel aus allen Messungen 11″53 beträgt. Also selbst bei dieser günstigen Behandlung erreichen diese Messungen erst die Schärfe mässig guter Contactbeobachtungen, deren Fehler jedoch noch wesentlich kleiner ausfallen würden, wenn man die Aenderungen des Schattenhalbmessers — seien sie nun reell oder nur scheinbar — eben so sorgfältig, wie hier, eliminiren wollte. Durch diese am Leipziger Heliometer ausgeführte Versuchsreihe ist somit der Beweis erbracht, dass durch Anwendung der eben besprochenen Beobachtungsmethode kaum eine schärfere Messuug der Schattenradien zu erzielen sein wird, als durch die Beobachtung der Kraterantritte. Es bestätigt sich also auch hier, dass bei der Durchmesserbestimmung derartig

unscharf begrenzter Objecte die Verwendung von Doppelbildmikrometern nicht zu empfehlen ist.

Noch auf einen Umstand, der sich im Laufe der Rechnung ergab, soll hier hingewiesen werden. Der Winkel zwischen der Messungsrichtung und der wahren Richtung der Pfeilhöhe, den wir oben mit $W - \gamma$ bezeichnet haben, hat recht erhebliche Beträge erreicht. Bei den verschiedenen Einstellungen des Positionskreises waren seine Grenzwerthe:

18°6, 21°0, 26°1, 26°2, 16°6, 5°1, 4°6.

Da die von diesem Winkel abhängigen Correctionsglieder schon recht gross sind (hier bis zu 27″), so ist die Unterlassung der Ablesung des Positionswinkels, wie bei den Beobachtungsreihen von MÄDLER und SCHMIDT, durchaus unstatthaft.

## 14.

## Heliometer-Sehnen.

Bei den Sehnenmessungen war der Positionskreis fest auf $P' = 9° 0'$ eingestellt. Im Anfange konnten beide Hörnerspitzen gemessen werden, später nur die südliche; in der Columne $H$ der folgenden Tafel sind dieselben durch $n$ und $s$ bezeichnet. Ein Blendgitter wurde nicht benutzt.

| Beob-achter | $H$ | $P'$ | $K$ | $\varDelta$ | Beob-achter | $H$ | $P'$ | $K$ | $\varDelta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P. | s | 189°0 | 13$^h$29$^m$34$^s$ | −78$^p$3 | P. | s | 189°0 | 13$^h$39$^m$15$^s$ | −71$^p$5 |
| | | | 30 0 | −77.7 | | | | 39 39 | −69.1 |
| | | | 30 29.5 | +78.7 | | | | 40 6.5 | +70.5 |
| | | | 30 48 | +78.1 | | | | 40 22 | +70.6 |
| | n | 9.0 | 31 17.5 | −48.6 | | n | 9.0 | 40 57 | −23.8 |
| | | | 31 35.5 | −44.6 | | | | 41 20 | −20.1 |
| | | | 32 2 | +42.0 | | | | 41 52 | +20.6 |
| | | | 32 22 | +41.6 | | | | 42 14 | +18.2 |
| B. | n | 9.0 | 13 33 40.5 | +43.3 | B. | n | 9.0 | 13 42 54.5 | +18.4 |
| | | | 34 10 | +38.4 | | | | 43 17.5 | +17.8 |
| | | | 34 51.5 | −35.1 | | | | 43 55 | −14.3 |
| | | | 35 23 | −32.9 | | | | 44 15 | −14.3 |
| | s | 189.0 | 36 13 | +72.3 | | s | 189.0 | 44 54 | +66.7 |
| | | | 36 32.5 | +74.2 | | | | 45 15 | +66.9 |
| | | | 37 8 | −71.9 | | | | 45 44 | −64.4 |
| | | | 37 44 | −69.8 | | | | 46 5 | −64.9 |

| Beobachter | $H$ | $P'$ | $K$ | $\Delta$ | Beobachter | $H$ | $P'$ | $K$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P. | s | 189°0 | 13h 47m 32s | −63°4 | P. | s | 189°0 | 14h 10m 7s | −42°0 |
| | | | 47 56.5 | −64.5 | | | | 10 28 | −41.8 |
| | | | 48 25.5 | +66.2 | | | | 10 55 | +45.6 |
| | | | 48 44.5 | +64.0 | | | | 11 18 | +43.6 |
| | | | 49 13.5 | +61.2 | | | | 11 41 | +43.5 |
| | | | 49 34.5 | +62.5 | | | | 11 57 | +41.8 |
| | | | 50 6 | −59.5 | | | | 12 18 | −42.9 |
| | | | 50 28 | −59.8 | | | | 12 36 | −40.9[2]) |
| B. | s | 189.0 | 13 50 59 | −60.1 | P. | s | 189.0 | 15 36 59 | −55.8 |
| | | | 51 18 | −60.1 | | | | 37 22 | −54.8 |
| | | | 51 43 | +60.7 | | | | 37 54 | +52.9 |
| | | | 51 58.5 | +60.4 | | | | 38 16.5 | +53.1 |
| | | | 52 13 | +59.6 | | | | 38 41 | +53.4 |
| | | | 52 34 | +59.7 | | | | 39 4 | +51.1 |
| | | | 53 0 | −58.2 | | | | 39 31 | −54.2 |
| | | | 53 22 | −56.9 | | | | 39 48 | −53.6 |
| P. | s | 189.0 | 13 55 10 | −58.5[1]) | B. | s | 189.0 | 15 40 54.5 | −56.6 |
| | | | 55 33 | −57.95 | | | | 41 16 | −55.5 |
| | | | 56 5.5 | +56.5 | | | | 41 39.5 | +57.1 |
| | | | 56 29 | +55.6 | | | | 41 55 | +56.9 |
| | | | 56 55 | +55.7 | | | | 42 7 | +56.2 |
| | | | 57 18.5 | +54.9 | | | | 42 20 | +55.2 |
| | | | 57 48 | −55.5 | | | | 42 40 | −57.7 |
| | | | 58 9 | −52.5 | | | | 42 54.5 | −57.7 |
| B. | s | 189.0 | 13 59 32 | −52.9 | P. | s | 189.0 | 15 43 43 | −55.9 |
| | | | 59 52 | −50.6 | | | | 43 56.5 | −56.0 |
| | | | 14 0 15.5 | +52.1 | | | | 44 23.5 | +56.1 |
| | | | 0 31 | +48.7 | | | | 44 39 | +56.5 |
| | | | 0 47.5 | +51.6 | | | | 44 55 | +56.4 |
| | | | 1 1.5 | +49.5 | | | | 45 7.5 | +56.4 |
| | | | 1 22.5 | −48.9 | | | | 45 27.5 | −57.05 |
| | | | 1 36 | −48.7 | | | | 45 42 | −57.6 |
| P. | s | 189.0 | 14 3 11 | −48.8 | B. | s | 189.0 | 15 46 38.5 | −59.8 |
| | | | 3 27 | −48.2 | | | | 46 51.5 | −58.8 |
| | | | 3 50 | +49.2 | | | | 47 12.5 | +59.6 |
| | | | 4 9 | +48.9 | | | | 47 29 | +59.7 |
| | | | 4 27 | +48.6 | | | | 47 41.5 | +59.4 |
| | | | 4 47 | +48.1 | | | | 47 53.5 | +58.9 |
| | | | 5 13.5 | −46.6 | | | | 48 17 | −60.9 |
| | | | 5 32 | −45.05 | | | | 48 32 | −60.5 |
| B. | s | 189.0 | 14 7 8 | −41.4 | P. | s | 189.0 | 15 49 0 | −60.8 |
| | | | 7 31.5 | −42.2 | | | | 49 11 | −60.0 |
| | | | 8 0 | +40.7 | | | | 49 28.5 | +60.1 |
| | | | 8 17 | +41.2 | | | | 49 41 | +59.8 |
| | | | 8 31.5 | +42.0 | | | | 49 53.5 | +59.7 |
| | | | 8 49 | +41.4 | | | | 50 4 | +60.9 |
| | | | 9 16.5 | −42.0 | | | | 50 26 | −62.5 |
| | | | 9 34 | −40.7 | | | | 50 39 | −60.3 |

| Beobachter | H | P' | K | Δ | Beobachter | H | P' | K | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B. | s | 189°.0 | $15^h 51^m 1^s$ | −62°.3 | P. | s | 189°.0 | $15^h 58^m 5^s.5$ | −66°.1 |
| | | | 51 17 | −63.1 | | | | 58 29 | −68.0 |
| | | | 51 39 | +61.3 | | | | 58 51 | +65.6 |
| | | | 51 56.5 | +60.9 | | | | 59 4 | +65.7 |
| | | | 52 10 | +61.6 | | | | 59 17 | +66.0 |
| | | | 52 24 | +61.2 | | | | 59 31 | +66.3 |
| | | | 52 44 | −64.6 | | | | 59 53 | −67.5 |
| | | | 52 58.5 | −64.0 | | | | 16 0 7 | −67.5 |
| P. | s | 189.0 | 15 53 19 | −63.3 | B. | s | 189.0 | 16 0 31.5 | −68.3 |
| | | | 53 32 | −63.1 | | | | 0 48 | −68.7 |
| | | | 53 51 | +62.4 | | | | 1 11 | +67.7 |
| | | | 54 6 | +63.1 | | | | 1 26 | +67.7 |
| | | | 54 19 | +63.05 | | | | 1 39.5 | +68.1 |
| | | | 54 31.5 | +63.4 | | | | 1 49.5 | +68.2 |
| | | | 54 51 | −64.9 | | | | 2 9 | −69.1 |
| | | | 55 6 | −64.6 | | | | 2 23 | −68.9 |
| B. | s | 189.0 | 15 55 49 | −65.0 | | | | | |
| | | | 56 3.5 | −65.6 | | | | | |
| | | | 56 22.5 | +64.9 | | | | | |
| | | | 56 34.5 | +64.6 | | | | | |
| | | | 56 46.5 | +64.6 | | | | | |
| | | | 56 58.5 | +65.0 | | | | | |
| | | | 57 18 | −66.9 | | | | | |
| | | | 57 37 | −66.8 | | | | | |

Anm. 1) Schlecht begrenzt. 2) Hiernach folgen die Sichelbreiten.

In der folgenden Tafel sind die Werthe der Grössen

$$W = P' + J + R + 180° + (\alpha_0 - \alpha)\sin\delta + n + \nu + q_1$$

$$A = \frac{\lambda\sigma}{2h}$$

$$\omega = \omega_{a2} + (\vartheta - t_0)\,d\pi - u\cos^2\chi$$

und des Winkels $\chi$ zusammengestellt.

Nördliches Horn.

| $\vartheta$ | lg $A$ | $W$ | $\chi$ | $\omega$ |
|---|---|---|---|---|
| $9^h 20^m$ | 8.08554 | 79° 5'.7 | 272°.3 | 38' 38".9 |
| 24 | 49 | 5.9 | 273.0 | 38.9 |
| 28 | 44 | 6.2 | 273.6 | 38.9 |
| 32 | 39 | 6.5 | 274.2 | 38.9 |
| 36 | 34 | 6.8 | 274.8 | 38.9 |

Südliches Horn.

| $\vartheta$ | lg $A$ | $W$ | $\chi$ | $\omega$ | $\vartheta$ | lg $A$ | $W$ | $\chi$ | $\omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $9^h 20^m$ | 8.08554 | 259° 4.′6 | 246°.3 | 38′ 37.″2 | $11^h 24^m$ | 8.08474 | 259° 14.′5 | 190°.0 | 38′ 30.″5 |
| 24 | 49 | 4.7 | 243.2 | 36.8 | 28 | 74 | 14.9 | 188.1 | 30.5 |
| 28 | 44 | 4.9 | 240.3 | 36.5 | 32 | 74 | 15.3 | 186.2 | 30.4 |
| 32 | 39 | 5.1 | 237.7 | 36.1 | 36 | 75 | 15.7 | 184.3 | 30.4 |
| 36 | 34 | 5.3 | 235.3 | 35.8 | 40 | 75 | 16.1 | 182.3 | 30.4 |
| 40 | 29 | 5.5 | 233.1 | 35.4 | 44 | 76 | 16.6 | 180.3 | 30.5 |
| 44 | 25 | 5.8 | 231.0 | 35.1 | 48 | 76 | 17.0 | 178.2 | 30.6 |
| 48 | 21 | 6.1 | 228.9 | 34.8 | 52 | 77 | 17.5 | 176.1 | 30.7 |
| 52 | 17 | 6.4 | 226.8 | 34.5 | 56 | 78 | 17.9 | 174.0 | 30.8 |
| 56 | 13 | 6.7 | 224.7 | 34.1 | 12 0 | 79 | 18.4 | 171.8 | 30.9 |
| 10 0 | 10 | 7.0 | 222.5 | 33.8 | | | | | |
| 4 | 07 | 7.3 | 220.3 | 33.5 | | | | | |
| 8 | 04 | 7.7 | 218.1 | 33.2 | | | | | |

Für die weitere, nach den Formeln des § 7 durchgeführte Rechnung wurden wieder je zwei Einstellungen zu Mittelwerthen vereinigt, welche nebst den daraus abgeleiteten Resultaten in der folgenden Tafel aufgeführt sind.

| Peter | | | | | | Bruns | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vartheta$ | $H$ | $D'$ | $V$ | $R$ | $R_1$ | $\vartheta$ | $H$ | $D$ | $V$ | $R$ | $R_1$ |
| $9^h 20^m 32^s.8$ | n | −46°.07 | +14.″9 | − 0.″3 | − 0.″3 | $9^h 23^m 1^s.0$ | n | −41°.38 | − 3.″6 | −14.″6 | −14.″6 |
| 21 18.1 | | 42.33 | +32.2 | +17.0 | +17.0 | 24 12.8 | | 33.47 | +45.1 | +34.1 | +34.1 |
| 30 13.1 | | 21.42 | +11.0 | − 4.2 | − 4.2 | 32 10.3 | | 18.63 | −11.4 | −22.4 | −22.4 |
| 31 7.5 | | 19.93 | + 2.7 | −12.5 | −12.5 | 33 9.1 | | 13.77 | +13.9 | + 2.9 | + 2.9 |
| 9 18 53.5 | s | +78.53 | +66.2 | + 4.3 | − 0.6 | 9 25 28.2 | s | +72.72 | +80.7 | − 0.7 | + 7.4 |
| 19 45.2 | | 77.87 | 67.4 | + 5.5 | + 0.6 | 26 31.2 | | 71.38 | 89.7 | + 8.6 | +16.4 |
| 28 31.9 | | 70.83 | 65.4 | + 3.5 | − 1.4 | 34 8.4 | | 66.27 | 58.4 | −22.7 | −14.9 |
| 29 19.0 | | 70.02 | 68.0 | + 6.1 | + 1.2 | 34 58.3 | | 65.18 | 64.5 | −16.6 | − 8.8 |
| 36 47.7 | | 64.48 | 48.2 | −13.7 | −11.7 | 40 11.4 | | 60.63 | 61.4 | −19.7 | − 4.0 |
| 37 38.3 | | 64.57 | 33.8 | −28.1 | −26.1 | 40 53.6 | | 60.02 | 61.0 | −20.1 | − 4.4 |
| 38 27.2 | | 61.32 | 76.3 | +14.4 | +16.4 | 41 26.2 | | 59.12 | 67.3 | −13.8 | + 1.9 |
| 39 20.1 | | 60.18 | 81.2 | +19.3 | +21.3 | 42 13.6 | | 58.08 | 72.1 | − 9.0 | + 6.7 |
| 44 23.7 | | 58.76 | 31.5 | −30.4 | −25.0 | 48 43.5 | | 52.28 | 68.9 | −12.2 | −14.0 |
| 45 19.2 | | 55.52 | 67.6 | + 5.7 | +11.1 | 49 24.5 | | 49.87 | 92.5 | +11.4 | + 9.6 |
| 46 8.7 | | 54.77 | 67.4 | + 5.5 | +10.9 | 49 55.7 | | 50.02 | 84.1 | + 3.0 | + 1.2 |
| 47 0.2 | | 54.53 | 59.5 | − 2.4 | + 3.0 | 50 30.3 | | 49.33 | 86.1 | + 5.0 | + 3.2 |
| 52 19.8 | | 49.03 | 67.8 | + 5.9 | − 2.2 | 56 20.0 | | 42.33 | 104.2 | +23.2 | + 1.5 |
| 53 0.2 | | 48.52 | 66.4 | + 4.5 | − 3.6 | 57 8.5 | | 40.42 | 117.2 | +36.1 | +14.4 |
| 53 37.6 | | 47.82 | 68.0 | + 6.1 | − 2.0 | 57 40.2 | | 41.17 | 102.8 | +21.7 | 0.0 |
| 54 23.3 | | 46.35 | 77.6 | +15.7 | + 7.6 | 58 25.1 | | 41.88 | 86.8 | + 5.7 | −16.0 |
| 59 17.3 | | 42.43 | 71.4 | + 9.5 | +15.2 | | | | | | |
| 10 0 6.1 | | 44.07 | 44.3 | −17.6 | −11.9 | | | | | | |
| 0 48.5 | | 42.13 | 59.5 | − 2.4 | + 3.3 | | | | | | |
| 1 26.4 | | 42.43 | 49.8 | −12.1 | − 6.4 | | | | | | |

| Peter | | | | | | Bruns | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ϑ | $H$ | $D'$ | $V$ | $R$ | $R_1$ | ϑ | $H$ | $D'$ | $V$ | $R$ | $R_1$ |
| 11$^h$25$^m$55$^s$.6 | s | −54$^p$.77 | +40''.0 | −21''.0 | −18''.1 | 11$^h$29$^m$49$^s$.6 | s | −55$^p$.52 | +54''.9 | + 2''.6 | + 5''.9 |
| 26 50.1 | | 53.53 | 56.7 | − 4.3 | − 1.4 | 30 31.5 | | 57.53 | 37.9 | −14.4 | −11.1 |
| 27 37.3 | | 52.78 | 68.3 | + 7.3 | +10.2 | 30 57.7 | | 56.23 | 54.8 | + 2.5 | + 5.8 |
| 28 24.2 | | 53.37 | 67.5 | + 6.5 | + 9.4 | 31 31.3 | | 57.17 | 48.3 | − 4.0 | − 0.7 |
| 32 33.7 | | 55.42 | 74.4 | +13.4 | + 5.1 | 35 28.5 | | 58.77 | 58.0 | + 5.7 | + 5.0 |
| 33 15.0 | | 56.83 | 64.0 | + 3.0 | − 5.3 | 36 4.2 | | 60.18 | 45.3 | − 7.0 | − 7.7 |
| 33 44.9 | | 56.93 | 66.5 | + 5.5 | − 2.8 | 36 30.8 | | 59.68 | 55.0 | + 2.7 | + 2.0 |
| 34 18.5 | | 56.79 | 72.2 | +11.2 | + 2.9 | 37 7.7 | | 60.17 | 53.5 | + 1.2 | + 0.5 |
| 37 48.6 | | 59.87 | 63.0 | + 2.0 | + 2.4 | 39 51.7 | | 62.17 | 49.9 | − 2.4 | − 4.4 |
| 38 17.8 | | 60.48 | 59.2 | − 1.8 | − 1.4 | 40 30.4 | | 61.63 | 62.9 | +10.6 | + 8.6 |
| 38 41.7 | | 60.83 | 58.0 | − 3.0 | − 2.6 | 40 59.5 | | 61.93 | 63.1 | +10.8 | + 8.8 |
| 39 15.3 | | 60.87 | 62.2 | + 1.2 | + 1.6 | 41 33.6 | | 63.77 | 41.3 | −11.0 | −13.0 |
| 42 7.8 | | 62.67 | 62.9 | + 1.9 | + 4.5 | 44 38.1 | | 64.77 | 55.5 | + 3.2 | + 3.1 |
| 42 40.7 | | 63.28 | 59.5 | − 1.5 | + 1.1 | 45 10.3 | | 65.28 | 52.7 | + 0.4 | + 0.3 |
| 43 7.3 | | 63.75 | 56.5 | − 4.5 | − 1.9 | 45 34.2 | | 65.33 | 55.8 | + 3.5 | + 3.4 |
| 43 40.6 | | 64.22 | 54.7 | − 6.3 | − 3.7 | 46 9.1 | | 66.32 | 45.5 | − 6.8 | − 6.9 |
| 46 58.7 | | 66.52 | 50.6 | −10.4 | − 8.1 | 49 20.9 | | 67.97 | 50.4 | − 1.9 | − 2.3 |
| 47 38.9 | | 66.18 | 63.1 | + 2.1 | + 4.4 | 49 59.5 | | 68.23 | 52.7 | + 0.4 | 0.0 |
| 48 5.3 | | 66.68 | 59.4 | − 1.6 | + 0.7 | 50 25.4 | | 68.68 | 49.1 | − 3.2 | − 3.6 |
| 48 41.2 | | 66.92 | 61.7 | + 0.7 | + 3.0 | 50 56.8 | | 68.47 | 58.8 | + 6.5 | + 6.1 |

Zur besseren Uebersicht bilden wir zunächst wieder die Satzmittel:

| | Peter | | Bruns | |
|---|---|---|---|---|
| | ϑ | $V$ | ϑ | $V$ |
| I | 9$^h$26$^m$ | +15''.2 | 9$^h$28$^m$ | +11''.0 |
| II | 9 24 | 66.8 | 9 30 | 73.3 |
| | 38 | 59.9 | 41 | 65.4 |
| | 46 | 56.5 | 50 | 82.9 |
| | 53 | 70.0 | 57 | 102.8 |
| | 10 1 | 56.2 | | |
| III | 11 27 | 58.1 | 11 31 | 49.0 |
| | 33 | 69.3 | 36 | 53.0 |
| | 38 | 60.6 | 41 | 54.3 |
| | 43 | 58.4 | 45 | 52.4 |
| | 48 | 58.7 | 50 | 52.7 |

Mit I, II, III sind hier die drei Gruppen bezeichnet:

I nördliches Horn bei zunehmender Finsterniss,
II südliches » » » » ,
III südliches » » abnehmender » .

Zunächst muss es auffallen, dass beide Beobachter den Schatten am nördlichen Horne ganz erheblich kleiner gemessen haben, als am südlichen. Falls sich diese Erscheinung nicht etwa durch die Lage der ziemlich kurzen Sehne auf der Mondscheibe erklärt, so würden wir hier schon einen Beweis für eine Abweichung der Schattencurve von der theoretischen elliptischen Form vor uns haben. Leider kann man auch hier nicht mit Sicherheit entscheiden, ob dieser Unterschied reell ist oder ob er physiologisch zu erklären ist. Die Messungen am südlichen Horne ergaben einen während der ganzen Dauer der Reihen II und III constanten und ziemlich grossen Werth von $V$. Bemerkenswerth ist nur die plötzliche starke Zunahme von $V$ um $9^h\ 57^m$ namentlich beim Beobachter B. Doch scheint diese Veränderung wenigstens zum Theil reell gewesen zu sein, da sie sich, wenn auch viel schwächer, auch in der Messungsreihe des anderen Beobachters angedeutet findet.

Als Mittelwerthe von $V$ für die einzelnen Gruppen finden wir:

| | Peter | Bruns |
|---|---|---|
| I | + 15″2 | + 11″0 |
| II | 61.9 | 81.1 |
| III | 61.0 | 52.3 |

und mit diesen Zahlen ergeben sich die m. F. eines Mittels aus zwei Einstellungen:

| | | |
|---|---|---|
| I | ± 12″42 | ± 19″88 |
| II | 13.49 | 17.48 |
| III | 7.59 | 6.51 |

Benutzen wir dagegen zur Berechnung der Fehler (oben wieder mit $R_1$ bezeichnet) die einzelnen Satzmittel, so finden wir, da nur an einer Stelle eine systematische Veränderung von $V$ ausgesprochen ist, in naher Uebereinstimmung:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | ± 12″42 | ± 19″88 | ± 13″53 |
| II | 13.95 | 11.08 | |
| III | 7.04 | 7.05 | |

Also selbst wenn man jede zeitliche Schwankung in der Grösse des scheinbaren Schattens eliminirt, bleibt bei den Gruppen I und II noch ein m. F. einer Einstellung von 19″1 übrig, wie er nur bei ganz mittelmässigen Kraterantritten vorkommt. Die Messungen der Gruppe III sind erheblich besser und den Sichelbreiten etwa gleichwerthig.

Auch hier sind wieder für gleichzeitige Messungen die Unterschiede zwischen den beiden Beobachtern recht beträchtlich und schwankend: B. maass in Gruppe II den Schattenradius um 19″ grösser, später um 9″ kleiner als P., dessen Auffassung ziemlich constant geblieben ist. Aus all dem Gesagten müssen wir den Schluss ziehen, dass auch diese Methode für eine scharfe und stets gleichmässige Auffassung der Schattengrenze keine Gewähr bietet.

## 15.

## Positionswinkel.

Während derselben Mondfinsterniss wurde noch eine dritte Beobachtungsmethode auf ihre praktische Anwendbarkeit untersucht, indem von Dr. Hayn am Fadenmikrometer des 30 cm Refractors die Positionswinkel der Sehne zwischen den Hörnerspitzen gemessen wurden. Der Positionskreis ist in Zehntelgrade getheilt und giebt durch Schätzung 0°01. Aus den Ablesungen an den beiden Mikroskopen gebe ich unter $P'$ in der folgenden Tafel schon das Mittel. Die Correction des Nullpunktes $J$ wurde zwischen den Messungen an zwei benachbarten Sternen bestimmt und ergab sich zu — 0°22. Die Zeiten sind unter $K$ nach der Sternzeit-Taschenuhr »Knoblich« angegeben, deren Correction

| | |
|---|---|
| $12^h\ 32^m$ | — 7ˢ0 |
| 17 1 | — 2.1 |

betrug. Um Raum zu ersparen ist auch die Ableitung der einzelnen Resultate mit in die nächste Tafel aufgenommen.

| $K$ | $P'$ | $\gamma$ | $M$ | $\varphi - \varphi_0$ | $m$ | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $13^h 36^m\ 0^s$ | 349°32 | 237°43 | −111°20 | +0°69 | −28 | +0°696 | +0°767 |
| 37 45 | 348.09 | 236.90 | 20 | −0.01 | 29 | − 004 | + 070 |
| 38 55 | 347.48 | 236.55 | 20 | −0.27 | 30 | − 263 | − 187 |
| 40 3 | 347.06 | 236.19 | 19 | −0.32 | 31 | − 313 | − 234 |
| 41 12 | 347.00 | 235.82 | 19 | −0.01 | 32 | − 003 | + 078 |
| 42 27 | 346.42 | 235.41 | 19 | −0.18 | 33 | − 173 | − 109 |
| 46 35 | 344.89 | 234.01 | 18 | −0.30 | 37 | − 292 | − 198 |
| 47 55 | 344.51 | 233.53 | 18 | −0.20 | 39 | − 191 | − 092 |
| 49 8 | 344.06 | 233.08 | 18 | −0.20 | 40 | − 191 | − 090 |
| 50 55 | 343.44 | 232.42 | 17 | −0.15 | 42 | − 141 | − 034 |
| 52 10 | 342.91 | 231.94 | 17 | −0.20 | 44 | − 190 | − 079 |
| 52 53 | 342.40 | 231.46 | 17 | −0.23 | 45 | − 220 | − 106 |
| 14 10 30 | 334.47 | 223.53 | 14 | −0.20 | 70 | − 185 | − 007 |
| 12 5 | 334.02 | 222.67 | 13 | +0.22 | 72 | + 236 | + 419 |
| 13 31 | 333.11 | 221.87 | 13 | +0.11 | 75 | + 127 | + 318 |
| 15 11 | 331.85 | 220.90 | 13 | −0.18 | 78 | − 163 | + 035 |
| 16 22 | 331.34 | 220.21 | 12 | +0.01 | 81 | + 028 | + 234 |
| 17 18 | 330.91 | 219.64 | 12 | +0.15 | 83 | + 168 | + 379 |
| 24 30 | 326.36 | 214.99 | 11 | +0.26 | 96 | + 281 | + 525 |
| 25 35 | 325.40 | 214.25 | 11 | +0.04 | 97 | + 061 | + 308 |
| 26 50 | 325.20 | 213.37 | 10 | +0.73 | 100 | + 752 | + 1.006 |
| 28 15 | 322.73 | 212.35 | 10 | −0.72 | 102 | − 698 | − 442 |
| 15 22 0 | 272.74 | 161.97 | −111.03 | −0.26 | −12 | − 0.258 | − 0.227 |
| 23 25 | 271.60 | 160.66 | 03 | −0.09 | − 6 | − 089 | − 073 |
| 24 36 | 270.31 | 159.59 | 03 | −0.31 | − 1 | − 310 | − 307 |
| 26 0 | 268.93 | 158.34 | 03 | −0.44 | + 4 | − 441 | − 451 |
| 27 5 | 268.32 | 157.41 | 03 | −0.12 | 7 | − 121 | − 139 |
| 28 17 | 267.07 | 156.36 | 03 | −0.32 | 12 | − 322 | − 353 |
| 34 28 | 261.36 | 151.15 | 02 | −0.81 | 31 | − 816 | − 896 |
| 36 0 | 261.12 | 150.09 | 02 | +0.01 | 34 | + 003 | − 084 |
| 37 0 | 260.35 | 149.32 | 02 | +0.01 | 37 | + 003 | − 092 |
| 41 8 | 257.26 | 146.30 | 02 | −0.06 | 45 | − 069 | − 184 |
| 42 40 | 256.02 | 145.23 | 02 | −0.23 | 48 | − 240 | − 362 |
| 43 48 | 255.57 | 144.45 | 02 | +0.10 | 50 | + 090 | − 038 |
| 45 6 | 254.52 | 143.58 | 02 | −0.08 | 52 | − 090 | − 224 |
| 46 27 | 253.33 | 142.70 | 02 | −0.39 | 54 | − 401 | − 539 |
| 47 54 | 252.38 | 141.78 | 02 | −0.42 | 56 | − 431 | − 575 |
| 57 40 | 247.70 | 136.11 | 02 | +0.57 | 64 | + 557 | + 393 |
| 58 46 | 246.59 | 135.53 | 02 | +0.04 | 65 | + 027 | − 139 |
| 16 0 26 | 245.91 | 134.68 | 01 | +0.22 | 66 | + 207 | + 038 |
| 1 25 | 245.46 | 134.19 | 01 | +0.26 | 66 | + 247 | + 078 |
| 6 56 | 242.56 | 131.58 | 01 | −0.03 | 67 | − 043 | − 188 |
| 8 31 | 241.76 | 130.88 | 01 | −0.13 | 68 | − 144 | − 318 |
| 9 30 | 241.40 | 130.45 | 01 | −0.06 | 68 | − 074 | − 248 |
| 10 51 | 241.46 | 129.87 | 01 | +0.58 | 68 | + 566 | + 392 |

Der Winkel $\gamma$ ist wegen seiner schnellen Veränderlichkeit für jede Messung direct berechnet; die Hülfsgrössen $M$ und $m$ wurden

in Intervallen von $8^m$ gerechnet und sind aus der folgenden Tafel zu entnehmen:

| $\vartheta$ | $M$ | $m$ | $\vartheta$ | $M$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $9^h\,20^m$ | 111°215 | −23.1 | $11^h\,12^m$ | 111°028 | −10.2 |
| 24 | 207 | 26.1 | 16 | 026 | + 5.2 |
| 28 | 199 | 29.4 | 20 | 024 | 18.6 |
| 32 | 190 | 33.0 | 24 | 022 | 30.2 |
| 36 | 181 | 36.9 | 28 | 021 | 39.9 |
| 40 | 174 | 41.2 | 32 | 020 | 47.8 |
| 44 | 166 | 46.0 | 36 | 019 | 54.0 |
| 48 | 159 | 51.2 | 40 | 018 | 58.7 |
| 52 | 151 | 56.9 | 44 | 016 | 62.2 |
| 56 | 144 | 63.0 | 48 | 015 | 64.7 |
| 10 0 | 137 | 69.5 | 52 | 014 | 66.4 |
| 4 | 129 | 76.5 | 56 | 013 | 67.4 |
| 8 | 121 | 83.7 | 12 0 | 011 | 68.0 |
| 12 | 113 | 91.0 | | | |
| 16 | 105 | 98.4 | | | |

Der Factor $m$, von dessen Grösse die Brauchbarkeit dieser Messungen abhängt, erreichte sein Maximum = 115 um $10^h\,34^m$. Leider wurden die Beobachtungen schon um $10^h\,18^m$ unterbrochen, so dass gerade während der günstigsten Zeit keine Messungen ausgeführt wurden.

Schon ein Blick auf die Werthe von $\varphi - \varphi_0$ zeigt, dass dieselben den Charakter zufälliger Beobachtungsfehler besitzen, wenigstens in keiner Beziehung zu der Grösse $m$ stehen. Es wird sich also aus diesen Messungen $u$ sehr nahe gleich Null ergeben. Führen wir die Auflösung der beiden durch eine Stunde von einander getrennten Beobachtungsreihen nach der Methode der kleinsten Quadrate aus, so ergeben sich die Normalgleichungen

$$\text{I.}\quad +\,19°89 = 90086\,u$$
$$\text{II.}\quad +\,10.92 = 54855\,u\,,$$

aus denen folgt

$$\text{I.}\quad u = +\,0''79 \pm 3''92 \text{ (m. F.)}$$
$$\text{II.}\quad u = +\,0.72 \pm 5.01\,,$$

während sich der m. F. einer Positionswinkelmessung für die beiden Reihen zu ± 0°327 resp. ± 0°326 ergiebt[1]).

1) Da die Sicherheit einer Positionswinkelmessung der Länge der Distanz etwa proportional ist, so hätte man den gemessenen $\varphi - \varphi_0$ der jedesmaligen Sehnen-

Die ausserordentlich gute Uebereinstimmung der beiden Werthe für $u$ ist, wie man schon an ihren mittleren Fehlern erkennt, zwar rein zufällig, immerhin berechtigen uns aber die gefundenen Resultate zu folgenden wichtigen Schlüssen:

1) Durch Messungen des Positionswinkels der Sehne zwischen den Hörnerspitzen kann der Unterschied $u$ zwischen den beiden Axen der Schattenellipse leicht bis auf wenige Bogensecunden genau bestimmt werden. Da die vorliegenden Messungen, wie schon bemerkt, keineswegs unter den günstigsten Umständen angestellt wurden (während II ging $m$ sogar durch 0 hindurch!), so wird eine Fehlergrenze von 3″ sicher leicht inne zu halten sein.

2) Bei der Mondfinsterniss am 11. Mai 1892 war der Schattenquerschnitt nicht elliptisch, sondern kreisrund; jedenfalls unterschieden sich die beiden Axen der Schattenellipse um weniger als etwa 4″ von einander, wobei unentschieden bleibt, welche von beiden Axen überhaupt die grössere gewesen ist.

Für den geometrischen Schatten des festen Erdellipsoides (nach Bessel) ergiebt sich der Werth $u = + 9''92$. Um zu zeigen, dass die vorstehenden Messungen mit diesem theoretischen Werthe kaum vereinbar sind, habe ich oben unter $R_2$ noch die Beobachtungsfehler angesetzt, welche sich bei der Annahme $u = + 9''92$ ergeben. Während die Summe der Fehlerquadrate bei obigem Werthe $u = + 0''7$ 4°58 betrug, steigt dieselbe bei $u = + 9''92$ auf 5°52.

Da durch diese Messungsreihe wenn auch nicht ein sicherer Beweis, so doch einige Wahrscheinlichkeit dafür erbracht ist, dass die Form des Schattenquerschnittes nicht mit der theoretischen Ellipse zusammenfällt, speciell, dass die Polaraxe der Schattenellipse zu gross erscheint, so will ich nunmehr noch an einige früher besprochene Erscheinungen erinnern, welche zu einem ähnlichen Schlusse führen.

Schon bei der Statistik der Kraterbedeckungen, dann aber auch bei allen oben berechneten Mikrometermessungen ergab sich für die

---

länge entsprechende Gewichte geben können. Dies wurde jedoch absichtlich unterlassen, weil gerade bei diesen Messungen die gleiche Helligkeit der an beiden Hörnern eingestellten Punkte um so schärfer beurtheilt werden kann, je kürzer die Sehne ist. Auch obige Zahlen zeigen an, dass hier die Genauigkeit der Winkelmessung unabhängig von der Länge der Sehne ist.

partiellen Finsternisse ein grösserer Werth von $V$, als für die totalen. Da nun bei den ersteren hauptsächlich die Polargegenden, bei den letzteren die Aequatorialgegenden des Schattens beobachtet werden, so würde sich diese Erscheinung ebenfalls durch eine Verlängerung der Polaraxe der Schattenellipse erklären lassen.

Ferner fanden bei den Sehnenmessungen am Heliometer gegen $9^h\ 27^m$ beide Beobachter übereinstimmend den Schattenradius am nördlichen Horne erheblich kleiner, als am südlichen. Im Mittel aus beiden Beobachtern ist:

| | | Nördliches Horn | Südliches Horn |
|---|---|---|---|
| die beobachtete Vergrösserung | $V$ | + 0′13″ | + 1′10″ |
| nach der pag. 432 gegebenen Tafel ist theoretisch | $\omega$ | 38 39 | 38 37 |
| also der beobachtete Schattenhalbmesser | $\omega'$ | 38 52 | 39 47 |
| mit der Polaraxe bildet $\omega'$ den Winkel | $\chi$ | 273° | 240° |

Das nördliche Horn lag also fast genau auf der Aequatorialaxe der Ellipse und an dieser Stelle war $\omega$ um 55″ kleiner, als 30° weiter nach dem Pole zu. Wollte man durch diese beiden Punkte eine Ellipse legen, so würde dieselbe eine enorme Verlängerung der polaren Schattenradien ergeben. Falls aber thatsächlich diese Abweichung von der theoretischen Schattenform bestanden hat, sind wir überhaupt nicht mehr berechtigt, eine Ellipse als Querschnitt des beobachteten Schattenkegels anzunehmen. Denn Unterschiede von solchem Betrage könnten nicht mehr durch die Form der Niveauflächen der Atmosphäre und eine dadurch bedingte Abhängigkeit der Refraction von der geographischen Breite, sondern nur durch Unregelmässigkeit der Absorption erklärt werden, wie sie etwa durch Bewölkung einzelner Gegenden entstehen würde. Vielleicht ist es auch nicht ohne Einfluss auf die Höhe des Schattens gewesen, dass für das südliche Horn die Andenkette nahe beim Aconcagua, für das nördliche dagegen das Tiefland von Guyana nahe am Ocean den schattenwerfenden Erdrand bildete. Durch diese Niveaudifferenz des festen Erdkörpers würde allerdings der geometrische Schattenrand nur um 1″ verschoben, doch ist es nicht unmöglich, dass gerade durch die Abschneidung derjenigen Sonnenstrahlen, welche in etwa den unteren sieben Kilometern die Atmosphäre durchsetzen und sich

sonst als rothes Licht über die Mondscheibe ausbreiten, die scheinbare Schattengrenze um grössere Beträge verschoben wird[1]).

Sollte sich diese unregelmässige Form des Schattens jedoch bestätigen, so ergiebt sich daraus ein schwerwiegender Einwurf gegen die zuletzt besprochene Methode der Positionswinkelmessung, da die ganze Berechnung auf der Voraussetzung eines elliptischen Schattenquerschnittes basirt ist. Lässt man diese Annahme fallen, so ist die alleinige Messung von Positionswinkeln ganz werthlos. Man wird also diese Methode nur so lange in Anwendung bringen, als man noch hoffen darf, in einer etwaigen abweichenden Form des Schattenquerschnittes nur das Spiegelbild von der Gestalt der Niveauflächen der Erdatmosphäre zu erblicken.

## 16.

### Photographische Aufnahmen.

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen muss es wünschenswerth erscheinen, genauere Messungen über die Gestalt der Curven gleicher Helligkeit im Schattenquerschnitt anzustellen. Da bei allen den bisher besprochenen directen Messungen immer nur einzelne Punkte des Schattenrandes nach einander eingestellt werden können, so ist es einerseits unmöglich, auf diese Art auch nur eine dieser Curven in ihrer augenblicklichen Form festzulegen, anderseits ist es unvermeidlich, dass sich, sei es durch die Ermüdung des Auges, sei es in Folge der wechselnden Helligkeit des ganzen innerhalb des Gesichtsfeldes befindlichen Mondbildes, die Auffassung des Beobachters verändert, so dass die hinter einander beobachteten Punkte keineswegs immer einer Curve gleicher Helligkeit angehören werden. Alle diese Schwierigkeiten kommen durch die Anwendung der Photographie in Wegfall, da man auf der Platte das momentane Bild des ganzen Schattens festhalten und nachher unter Beobachtung beliebiger

1) Herr SEELIGER liefert ($S_2$ pg. 59) den wichtigen Nachweis, dass aus den unteren 6.8 km unserer Atmosphäre überhaupt kein Licht in die Gegend der Schattengrenze gelangt; jedoch ist zu beachten, dass bei der physiologischen Entstehung der Schattengrenze auch die Helligkeit des weiter entfernten, aber noch im Gesichtsfelde befindlichen Kernschattens sicher nicht ohne Einfluss ist.

Vorsichtsmaassregeln ausmessen kann. Aus diesem Grunde hat der Verfasser auf die Ausbildung des photographischen Verfahrens ganz besonderen Fleiss verwendet, und wenn es ihm trotzdem nicht möglich ist, schon jetzt über definitive Resultate zu berichten, so hat dies seinen Grund darin, dass die ersten photographischen Aufnahmen — wie sich erst später herausstellte — für exacte Messungen noch nicht geeignet waren, die an denselben gewonnenen Erfahrungen aber seither noch nicht praktisch erprobt werden konnten, da ungünstiges Wetter die Beobachtung der beiden letzten Mondfinsternisse verhinderte. Gleichwohl hält der Verfasser eine kurze Mittheilung der bisherigen Ergebnisse für angezeigt, da vielleicht nun auch andere Beobachter, denen geeignetere Hülfsmittel zur Verfügung stehen, diesem Gebiete ihre Aufmerksamkeit zuwenden.

Den ersten Versuch einer photographischen Aufnahme machte der Verfasser bei der partiellen Mondfinsterniss am 3. August 1887. Er erhielt damals mittelst eines Fernrohrobjectives von etwa 70 cm Brennweite auf einer Platte neben einander 14 Bilder des Mondes, welche den Verlauf der Finsterniss sehr anschaulich zeigten. Zu Messungen waren diese Aufnahmen wegen ihrer Kleinheit und geringen Schärfe nicht geeignet. Auf die in den Astr. Nachr. 2821 veröffentlichte Aufforderung des Herrn BRUNS machte sodann Herr WOLF in Heidelberg von den Finsternissen am 28. Januar 1888 und 16. Januar 1889 eine grosse Anzahl Aufnahmen, die er dem Verfasser zur Bearbeitung freundlichst überliess. In Leipzig war inzwischen der Schröder'sche Kometensucher (13,5 cm Oeffn., 165 cm Brennw.) mit Cassettenvorrichtung versehen worden, so dass der Verfasser am 15. November 1891 43 und am 11. Mai 1892 62 Finsternissaufnahmen machen konnte. Auch bei diesen Aufnahmen ist jedoch der Maassstab so klein, dass die Schärfe der Messungen nur eine sehr geringe ist. Am brauchbarsten erwiesen sich noch die WOLF'schen Aufnahmen vom Jahre 1889, weshalb wir uns im Wesentlichen darauf beschränken wollen, die an dieser Beobachtungsreihe vorgenommenen Untersuchungen im Folgenden kurz zu besprechen.

In Ermangelung eines Coordinaten-Messapparates wurde zur Ausmessung der Platten das in § 4 beschriebene photographische Verfahren angewandt. Ueber die Platte wurde ein rechtwinkliges

Gitter gelegt, dessen Durchschnittspunkte $\xi\,\eta$[1]) mit dem Mond- resp. Schattenrande abgelesen wurden. Die erste Aufgabe war nun die Ermittelung der Coordinaten $\xi_0\,\eta_0$ des Mondmittelpunktes aus den Ablesungen am Mondrande. Das Nächstliegende war, aus den Gleichungen

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 - \varrho^2 = 0,$$

wo $\varrho$ der Radius des Mondbildes ist, $\xi_0\,\eta_0$ und $\varrho$ nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Einige Versuche zeigten jedoch bald, dass die hierzu nöthige Arbeit in keinem Verhältniss zur Sicherheit der gewonnenen Resultate stand; es waren z. B. für die erste Aufnahme 67 Gleichungen mit drei Unbekannten aufzulösen und eine solche Rechnung wäre für jede der 50 Aufnahmen durchzuführen gewesen.

Um die Rechnung erheblich einfacher und gleichzeitig durchsichtiger zu gestalten, wurde zunächst der folgende Weg eingeschlagen:

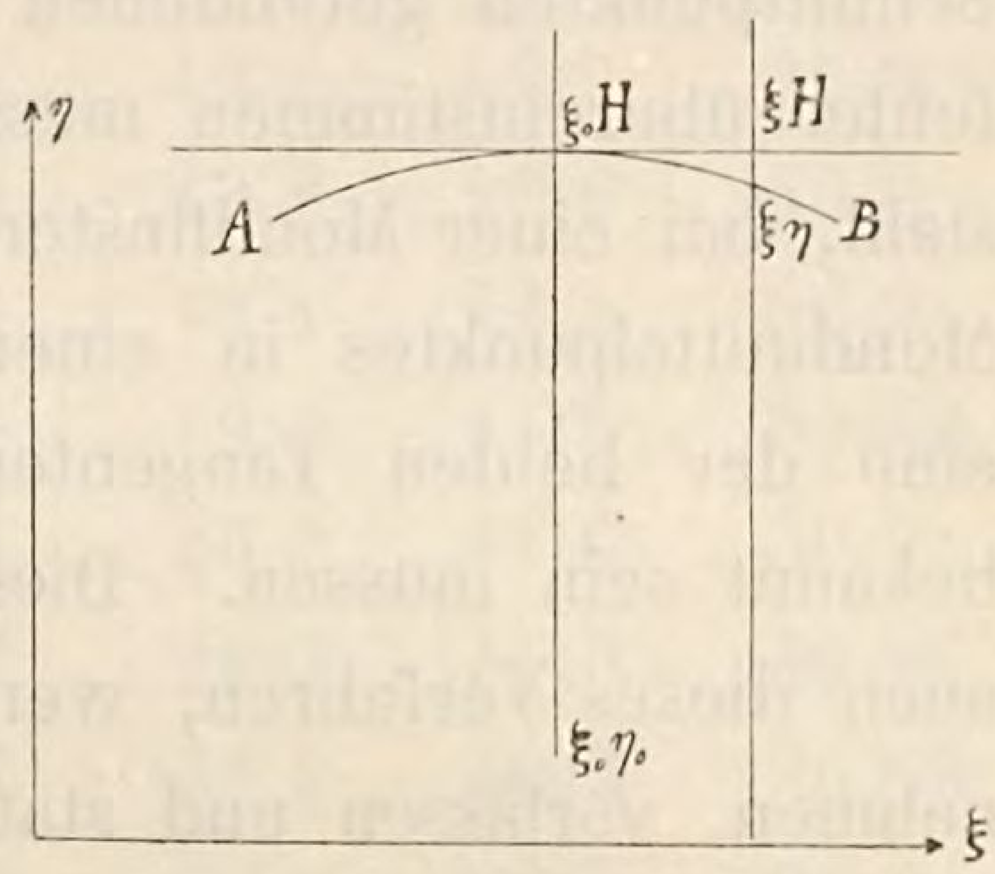


Fig. 4.

Die schärfste Ablesung von $\eta$ auf den Strichen $\xi = \text{const.}$ findet offenbar statt, wenn letztere den Mondrand $AB$ möglichst senkrecht durchschneiden, was in der Nähe des Berührungspunktes $\xi_0 H$ der Tangente $\eta = H$ stattfindet. Ist nun $\xi\,\eta$ einer dieser Durchschnittspunkte, so hat man

$$H - \eta = \varrho - \sqrt{\varrho^2 - (\xi - \xi_0)^2},$$

oder

$$H - \eta = \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\varrho} + \frac{(\xi - \xi_0)^4}{8\varrho^3} + \cdots$$

So lange nun $\xi - \xi_0$ klein gegen $\varrho$ ist, ergiebt dieser Ausdruck schon bei genäherter Kenntniss von $\xi_0$ und $\varrho$ einen scharfen Werth der kleinen Correction $H - \eta$, die man am abgelesenen $\eta$ anzubringen hat, um den Ort der Tangente $\eta = H$ zu erhalten. Beim Vollmonde findet man auf diese Weise vier Tangenten $H_1, H_2, \Xi_1, \Xi_2$, aus denen sich dann sofort ergiebt

1) Um Uebereinstimmung mit den Formeln in § 10 herzustellen ist $\xi = -y'$, $\eta = x'$ zu setzen.

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(\Xi_2 - \Xi_1) = \tfrac{1}{2}(H_2 - H_1)$$
$$\xi_0 = \tfrac{1}{2}(\Xi_1 + \Xi_2)$$
$$\eta_0 = \tfrac{1}{2}(H_1 + H_2)\,.$$

Während der Verfinsterung fallen nach und nach einzelne dieser vier Tangenten fort, so dass man umgekehrt die Gleichungen

$$\xi_0 = \Xi \pm \varrho$$
$$\eta_0 = H \pm \varrho$$

benutzen muss, um aus der Tangente und dem Radius, der hierzu aber nun scharf bekannt sein muss, den Mittelpunkt zu finden.

Entnimmt man die Reductionen $H - \eta$ aus einer mit dem Argumente $\xi - \xi_0$ berechneten Tafel, so ist obiges Verfahren ausserordentlich einfach und dabei sehr durchsichtig, da die aus den verschiedenen Schnittpunkten gefundenen Orte der Tangenten innerhalb der Ablesefehler übereinstimmen müssen. Da es jedoch, wie man leicht einsieht, bei einer Mondfinsterniss gerade darauf ankommt, den Ort des Mondmittelpunktes in einer Richtung festzulegen, in welcher stets eine der beiden Tangenten fehlt, so hätte nach Obigem $\varrho$ genau bekannt sein müssen. Dies war aber nicht der Fall und so wurde auch dieses Verfahren, wenigstens bei dem grössten Theile der Aufnahmen, verlassen und statt dessen das folgende angewendet.

Sind $\xi_1$ und $\xi_2$ die beiden Schnittpunkte des Striches $\eta =$ const. mit dem Mondrande, so ist die einfachste Bestimmung des Mittelpunktes offenbar

$$\xi_0 = \tfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)\,.$$

Jeder den Mondrand zweimal schneidende Gitterstrich liefert so eine Mittelpunktscoordinate, aus deren Uebereinstimmung man wieder auf die erreichte Genauigkeit schliessen kann. Sind auf diese Weise $\xi_0$ und $\eta_0$ bestimmt, so benutzt man nun die Gleichungen

$$\xi_0 = \Xi \pm \varrho \qquad \eta_0 = H \pm \varrho$$

um $\varrho$ zu ermitteln. Erst wenn bei fortschreitender Verfinsterung keine vollständigen Sehnen mehr vorhanden sind, wird man $\varrho$ aus den anderen Aufnahmen herüber nehmen und $\xi_0$ und $\eta_0$ aus den Tangenten berechnen müssen.

Zur Erläuterung diene die um $16^h\,41^m\,26^s$ gemachte dritte Aufnahme (bei den zwei ersten ist der Rand wegen dunstigen Himmels

noch zu unscharf). Es wurden folgende Schnittpunkte am Mondrande abgelesen:

| $\eta$ | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_0$ | $\xi$ | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\eta_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 4.3 | 17.3 | 10.8 | 2 | 23.2 | 38.6 | 30.9 |
| 22 | 3.1 | 18.7 | 10.9 | 3 | 22.1 | 39.7 | 30.9 |
| 23 | 2.1 | 19.7 | 10.9 | 4 | 21.3 | 40.5 | 30.9 |
| 24 | | 20.4 | | 5 | 20.6 | 41.1 | 30.85 |
| 25 | | 21.0 | | 6 | 20.0 | 41.6 | 30.8 |
| 26 | | 21.6 | | 7 | 19.7 | 42.0 | 30.85 |
| 27 | | 21.9 | | 8 | 19.4 | 42.4 | 30.9 |
| 28 | | 22.2 | | 9 | 19.2 | 42.6 | 30.9 |
| 29 | | 22.6 | | 10 | 19.0 | 42.7 | 30.85 |
| 30 | | 22.7 | | 11 | 19.0 | 42.7 | 30.85 |
| 31 | | 22.7 | | 12 | 19.1 | 42.7 | 30.9 |
| 32 | | 22.6 | | 13 | 19.2 | 42.6 | 30.9 |
| 33 | | 22.5 | | 14 | 19.4 | 42.4 | 30.9 |
| 34 | | 22.2 | | 15 | 19.8 | 41.9 | 30.85 |
| 35 | | 21.9 | | 16 | 20.2 | 41.6 | 30.9 |
| 36 | | 21.4 | | 17 | 20.7 | 41.0 | 30.85 |
| 37 | 1.0 | 20.9 | 10.95 | 18 | 21.4 | 40.3 | 30.85 |
| 38 | 1.6 | 20.2 | 10.9 | 19 | 22.2 | 39.4 | 30.8 |
| 39 | 2.4 | 19.3 | 10.85 | 20 | 23.4 | 38.5 | 30.95 |
| 40 | 3.4 | 18.3 | 10.85 | | | | |
| 41 | 5.0 | 16.9 | 10.95 | | | | |

Die einzelnen Werthe von $\xi_0$ und $\eta_0$ stimmen sehr gut untereinander, im Mittel folgt daraus

$$\xi_0 = 10.89 \quad (8)$$
$$\eta_0 = 30.87 \quad (19)$$

Die Einheit ist immer 1 mm = 79″. Die von $\eta = 24$ bis $\eta = 36$ fehlenden $\xi_1$ liegen am Schattenrande und werden weiter unten mitgetheilt.

Zur Bestimmung der Tangenten wurden stets die acht mittelsten Durchschnittspunkte verwendet, so dass wir mit obigen Zahlen die folgende Rechnung haben:

| $\eta$ | $\eta - \eta_0$ | $\Xi - \xi$ | $\xi$ | $\Xi_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 27 | 3.87 | 0.65 | 21.9 | 22.55 |
| 28 | 2.87 | 0.35 | 22.2 | 55 |
| 29 | 1.87 | 0.15 | 22.6 | 75 |
| 30 | 0.87 | 0.03 | 22.7 | 73 |
| 31 | 0.13 | 0.00 | 22.7 | 70 |
| 32 | 1.13 | 0.05 | 22.6 | 65 |
| 33 | 2.13 | 0.19 | 22.5 | 69 |
| 34 | 3.13 | 0.42 | 22.2 | 62 |

| $\xi$ | $\xi - \xi_0$ | $H - \eta$ | $\eta$ | | $H_1$ | $H_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3.89 | 0.66 | 19.7 | 42.0 | 19.04 | 42.66 |
| 8 | 2.89 | 0.36 | 19.4 | 42.4 | 04 | 76 |
| 9 | 1.89 | 0.15 | 19.2 | 42.6 | 05 | 75 |
| 10 | 0.89 | 0.03 | 19.0 | 42.7 | 18.97 | 73 |
| 11 | 0.11 | 0.00 | 19.0 | 42.7 | 19.00 | 70 |
| 12 | 1.11 | 0.05 | 19.1 | 42.7 | 05 | 75 |
| 13 | 2.11 | 0.19 | 19.2 | 42.6 | 01 | 79 |
| 14 | 3.11 | 0.41 | 19.4 | 42.4 | 18.99 | 81 |

Im Mittel folgt
$$\Xi_2 = 22.66$$
$$H_1 = 19.02$$
$$H_2 = 42.74$$

und auch diese Zahlen dürften auf wenige Hundertstel Millimeter sicher sein.

Bilden wir nun aber die aus obigen Zahlen folgenden Werthe von $\varrho$:

$$\varrho(\Xi_2) = \Xi_2 - \xi_0 = 11.77$$
$$\varrho(H_1) = \eta_0 - H_1 = 11.85$$
$$\varrho(H_2) = H_2 - \eta_0 = 11.87$$

so stimmen zwar die beiden $\varrho\,(H)$ überein, $\varrho\,(\Xi)$ weicht aber davon merklich ab und diese Erscheinung wiederholt sich bei allen Aufnahmen. Für diejenigen Platten, welche eine Bestimmung von $\varrho$ noch zulassen, ergaben sich nämlich die folgenden Zahlen:

| Nr. | $\xi_0$ | $n$ | $\eta_0$ | $n$ | $\varrho(\Xi)$ | $\varrho(H)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 10.89 | 8 | 30.87 | 19 | 11.77 | 11.86 |
| 4 | 29.55 | 5 | 13.00 | 15 | 11.71 | 11.90 |
| 5 | 10.71 | 8 | 32.23 | 15 | 11.76 | 11.91 |
| 6 | 29.74 | 7 | 13.67 | 17 | 11.72 | 11.91 |
| 7 | 10.38 | 7 | 31.63 | 17 | 11.73 | 11.87 |
| 8 | 29.20 | 5 | 13.20 | 15 | 11.74 | 11.84 |
| 9 | 9.17 | 5 | 32.28 | 15 | 11.69 | 11.88 |
| 10 | 28.36 | 4 | 13.67 | 15 | 11.64 | 11.82 |
| 11 | 8.33 | 3 | 30.71 | 16 | 11.56 | 11.63 |
| 12 | 27.17 | 3 | 12.85 | 14 | 11.60 | 11.65 |
| 13 | 8.93 | 3 | 29.90 | 14 | 11.60 | 11.77 |
| 14 | 27.80 | 2 | 12.47 | 13 | 11.59 | 11.77 |
| 15 | 7.65 | 2 | 30.81 | 13 | 11.50 | 11.70 |
| 16 | 26.02 | 2 | 12.57 | 13 | 11.59 | 11.70 |
| 17 | 6.60 | 1 | 31.48 | 13 | 11.51 | 11.70 |
| 18 | 23.90 | 1 | 12.43 | 12 | 11.50 | 11.68 |
| 19 | 6.84 | 2 | 30.07 | 11 | 11.51 | 11.62 |
| 20 | 25.18 | 2 | 12.06 | 9 | 11.41 | 11.57 |
| 21 | 6.58 | 1 | 30.48 | 7 | 11.55 | 11.61 |
| 22 | 26.10 | 2 | 12.26 | 8 | 11.46 | 11.59 |
| 23 | 6.15 | 2 | 27.59 | 8 | 11.49 | 11.58 |
| 24 | 22.86 | 2 | 11.76 | 5 | 11.44 | 11.55 |
| 25 | 6.24 | 2 | 32.92 | 4 | 11.43 | 11.62 |
| 26 | 30.42 | 1 | 10.43 | 3 | 11.32 | 11.54 |
| 27 | 6.11 | 2 | 24.75 | 3 | 11.42 | 11.47 |
| 28 | 22.90 | 1 | 9.23 | 3 | 11.43 | 11.46 |
| 29 | 6.42 | 2 | 25.79 | 3 | 11.41 | 11.57 |
| 30 | 25.22 | 1 | 8.57 | 3 | 11.44 | 11.47 |
| 31 | 6.98 | 1 | 24.94 | 2 | 11.46 | 11.48 |
| 32 | 25.15 | 1 | 7.80 | 2 | 11.39 | 11.43 |
| 33 | 7.39 | 2 | 25.35 | 2 | 11.41 | 11.40 |
| 34 | 26.68 | 2 | 6.75 | 1 | 11.36 | 11.47 |

In dieser Zusammenstellung muss ausser dem constanten Unterschiede zwischen $\varrho\,(\Xi)$ und $\varrho\,(H)$ noch das gleichmässige Abnehmen beider $\varrho$ auffallen. Bevor man in der Rechnung weiter fortfahren

konnte, mussten diese beiden Erscheinungen aufgeklärt werden. Das Nächstliegende war, in dem Unterschiede der beiden $\varrho$ eine Wirkung der Refraction und in der Abnahme eine wirkliche Veränderung des scheinbaren Monddurchmessers zu suchen. Es ist nämlich ein weiterer Vorzug des hier angewandten Rechnungsverfahrens, dass man bei demselben auf die Refraction gar keine Rücksicht zu nehmen hat. Denn legt man, wie es in § 4 gefordert wird, das Gitter so, dass $\eta$ in die Verticale fällt, so wird in Folge der Refraction das Mondbild (mit hier stets ausreichender Annäherung) eine Ellipse, deren grosse Axe in der $\xi$-Richtung liegt. Für diese Ellipse bleibt aber sowohl die oben ausgeführte Mittelpunktsbestimmung als auch die Ermittelung der Tangenten richtig, nur wird $\varrho\,(H)$ der durch Refraction verkürzte Mondradius sein. Wie man sieht, ergaben die Messungen umgekehrt $\varrho\,(H) > \varrho\,(\Xi)$ und eben so wenig reichte die thatsächliche Veränderung des scheinbaren Monddurchmessers zur Erklärung des anderen Unterschiedes aus. Verbessert man $\varrho\,(H)$ wegen Refraction und reducirt alle Werthe auf denselben scheinbaren Monddurchmesser, so ändern sich obige Zahlen im äussersten Falle nur um 0.02 mm, so dass also ihr Verlauf fast unverändert bleibt. Die so verbesserten Zahlen werden weiter unten (pag. 453) mitgetheilt.

Weiter konnte man vermuthen, dass die in Rede stehenden Unterschiede vielleicht durch die Fortbewegung des Bildes auf der Platte verursacht seien, welche während der $1^s$ dauernden Belichtung ja $15'' = 0.2$ mm betrug. Doch die angestellten Berechnungen zeigten, dass die hierdurch entstehende Verlängerung des Mondbildes in der Richtung der täglichen Bewegung die gemessenen Unterschiede ebenfalls nicht erklären konnte.

Die vollständige Erklärung sowohl der Form des einzelnen Bildes, als auch des Unterschiedes der verschiedenen Bilder gelang erst durch die Einführung einer mit der Helligkeit des Mondrandes stark variirenden photographischen Irradiation. Jeder leuchtende Punkt bildet sich ja auf der Platte als ein Scheibchen ab, dessen Durchmesser mit der Helligkeit des Punktes zunimmt; der gemessene Rand des photographischen Bildes ist die Enveloppe aller dieser Scheibchen.

Zunächst galt es nun den Durchmesser der Irradiationsscheibchen als Function der Helligkeit in einer geeigneten Form darzustellen. Nach mehreren Versuchen blieb der Verfasser bei der Function

$$r = \tfrac{1}{2}(a \operatorname{Log} b J + c)^2$$

stehen, wobei $r$ der Radius des Scheibchens und $J$ die in Theilen der Vollmondshelligkeit ausgedrückte, ohne Berücksichtigung der Erdatmosphäre berechnete Helligkeit innerhalb des Schattens ist; $a$, $b$ und $c$ sind Constanten.

Zur Berechnung von $J$ erhält man die folgenden Formeln:

Es sei vom Mondmittelpunkte aus gesehen $S$ der Sonnenradius, $E$ der Erdradius und $A$ der Abstand Erde — Sonne; dann ist

$$\pi J = \frac{AE}{S^2} \sin\varphi - \frac{E^2}{S^2}\varphi + \psi,$$

wobei
$$\cos\varphi = \frac{E^2 - S^2 + A^2}{2AE}$$

$$\cos\psi = \frac{E^2 - S^2 - A^2}{2AS}$$

ist. Die Pfeilhöhe $x$ der vom betreffenden Punkte des Mondes aus sichtbaren Sonnensichel ist

$$x = S + A - E$$

und dieser Winkel ist, wie sich geometrisch leicht zeigen lässt, gleich dem vom Erdmittelpunkte aus gesehenen Abstande des beobachteten Punktes vom Rande des Kernschattens. Die theoretischen Halbmesser des Kern- und Halbschattens sind

$$\omega = \pi + \Pi - H,$$
$$\Omega = \pi + \Pi + H.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\sigma = \frac{x}{\Omega - \omega},$$

so ist $\sigma$ der Abstand des beobachteten Punktes vom Kernschatten ausgedrückt in Theilen der Breite des Halbschattens.

Da es in manchen Fällen angenehm sein kann, einen einfacheren Ausdruck für $J$ zu besitzen, so will ich hier nur erwähnen, das $J$ sehr gut, namentlich in der Nähe der beobachteten Schattengrenze, dargestellt wird durch den Ausdruck

$$J = 2\sigma^{\frac{3}{2}} - \sigma^{\frac{5}{2}}.$$

In der folgenden Tabelle sind unter $J$ die strengen, unter $J'$ die nach dieser Näherungsformel berechneten Werthe der Helligkeiten im Halbschatten zusammengestellt.

| $\sigma$ | $J$ | $J'$ |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 0.05 | 0.022 | 0.022 |
| 0.10 | 0.060 | 0.060 |
| 0.20 | 0.160 | 0.161 |
| 0.30 | 0.277 | 0.279 |
| 0.40 | 0.403 | 0.405 |
| 0.50 | 0.530 | 0.530 |
| 0.60 | 0.653 | 0.651 |
| 0.70 | 0.769 | 0.761 |
| 0.80 | 0.871 | 0.859 |
| 0.90 | 0.953 | 0.939 |
| 0.95 | 0.983 | 0.972 |
| 1.00 | 1.000 | 1.000 |

Diese theoretischen Werthe von $J$ werden jedoch durch die Refraction in einer vorläufig nicht berechenbaren Weise beeinflusst, so dass es nöthig war, eine directe Beziehung zwischen $r$ und $\sigma$ aufzustellen und es wurde daher später stets der Ausdruck

$$r = a \log b \sigma$$

benutzt, welcher durch Veränderung der beiden Constanten $a$ und $b$ sich jeder Form des Mondrandes anschmiegen lässt.

Um die durch Irradiation und Fortbewegung während der Belichtung bewirkte Veränderung der Gestalt des Mondrandes nun genauer zu bestimmen, wurden einige der WOLF'schen Negative einer schärferen Ausmessung unterworfen, wozu sich dem Verfasser während seines Aufenthaltes auf der Kuffner'schen Sternwarte in Wien Gelegenheit bot. Mittelst des dortigen Repsold'schen Messapparates wurden die Polarcoordinaten des Mondrandes in der folgenden Weise gemessen. Auf der Platte wurde durch einen feinen Nadelstich eine feste Marke angebracht. Bei der Positionskreiseinstellung $\alpha$ wurde nun der Faden des Mikrometers erst auf diese Marke, dann tangential an den Mondrand eingestellt. Der Unterschied $L$ zwischen beiden Einstellungen ist der Abstand der Marke von der betreffenden Tangente und hat den Werth

$$L = A \sin \alpha + B \cos \alpha + \varrho + r + f\,.$$

Für die Irradiation wurde hier gesetzt

$$r = \tfrac{1}{2}(0.1 \log \text{nat}\, 100\, J + C)^2$$

und für die Fortbewegung

$$f = D \cos^2 (\alpha - \beta),$$

wobei durch Drehung der Platte noch $\beta = 90^\circ$ gemacht wurde.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergaben sich aus den unten mitgetheilten Werthen von $L$, für die Aufnahme 3, die folgenden Werthe der fünf Unbekannten:

$$A = +\ 13.071 \text{ mm}$$
$$B = -\ \ 8.882 \ »$$
$$\varrho = +\ 11.351 \ »$$
$$C = +\ \ 0.403 \ »$$
$$D = +\ \ 0.043 \ »$$

Um zu zeigen, welchen Einfluss die Anbringung von $r$ und $f$ hat, sind in der folgenden Tabelle neben $L$ die Beobachtungsfehler $\Delta_1$, $\Delta_2$ und $\Delta_3$ gesetzt. $\Delta_1$ bleibt in der Darstellung der gemessenen $L$ übrig, wenn man $r$ und $f$, $\Delta_2$ wenn man $f$ allein vernachlässigt, während $\Delta_3$ die nach Anbringung aller Correctionen verbleibenden Fehler sind. Wegen der geringen Schärfe der Bilder sind die Messungen auf mehrere Hundertstel Millimeter unsicher. Die Werthe von $L$ sind schon wegen Refraction verbessert, die Hörnerspitzen liegen bei $\alpha = 105^\circ$ und $\alpha = 165^\circ$.

| $\alpha$ | $L$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | + 2.757 | − 0.013 | − 0.091 | − 0.070 |
| 15 | + 6.481 | + 0.025 | − 0.044 | − 0.026 |
| 30 | + 10.593 | + 0.098 | + 0.044 | + 0.054 |
| 45 | + 14.664 | + 0.050 | + 0.016 | + 0.015 |
| 60 | + 18.523 | − 0.008 | − 0.014 | − 0.025 |
| 75 | + 12.951 | − 0.028 | + 0.009 | − 0.010 |
| 90 | + 24.677 | − 0.046 | + 0.055 | + 0.033 |
| 105 | + 26.334 | − 0.243 | + 0.037 | + 0.018 |
| 165 | + 23.334 | − 0.280 | 0.000 | + 0.018 |
| 180 | + 20.367 | − 0.167 | − 0.034 | − 0.013 |
| 195 | + 16.781 | − 0.067 | − 0.018 | 0.000 |

| $\alpha$ | $L$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 210 | + 12.843 | + 0.034 | + 0.038 | + 0.048 |
| 225 | + 8.704 | + 0.014 | — 0.015 | — 0.016 |
| 240 | + 4.783 | + 0.010 | — 0.040 | — 0.051 |
| 255 | + 1.381 | + 0.056 | — 0.010 | — 0.029 |
| 270 | — 1.303 | + 0.116 | + 0.042 | + 0.020 |
| 285 | — 3.176 | + 0.097 | + 0.016 | — 0.003 |
| 300 | — 3.999 | + 0.110 | + 0.026 | + 0.015 |
| 315 | — 3.770 | + 0.102 | + 0.016 | + 0.015 |
| 330 | — 2.499 | + 0.076 | — 0.009 | + 0.001 |
| 345 | — 0.246 | + 0.064 | — 0.018 | 0.000 |

Die Werthe $\Delta_1$ haben einen stark ausgesprochenen zur Lage der Hörnerspitzen symmetrischen Gang, während schon die $\Delta_2$ das Verhalten zufälliger Beobachtungsfehler zeigen, woran durch die Anbringung von $f$ nicht mehr viel geändert wird. Da die Gitterablesungen sich nur auf 0.1 mm erstrecken, so ist für diese der im Maximum 0.04 mm betragende Einfluss der Fortbewegung unmerklich, während die bis zu 0.4 mm ansteigende Irradiation die Form des Bildes erheblich verändert. Es wurde daher nunmehr eine nochmalige Bestimmung der Mittelpunkte und Radien der ersten, hierzu noch brauchbaren Aufnahmen ausgeführt unter der, obigen Messungen entsprechenden Annahme, dass die Irradiation durch den Ausdruck

$$r = 0.4 \log \text{vulg. } 100\,\sigma$$

darstellbar sei. Die Constante 0.4, welche nach dem oben gefundenen Werthe von $C$ nur 0.2 betragen würde, ist aus den Gittermessungen selbst genähert bestimmt worden, da letztere wegen der nochmaligen photographischen Copirung die Irradiation in noch höherem Grade als die Originalplatten zeigten. In die folgende Zusammenstellung sind auch die oben ohne Irradiation berechneten Mittelpunktscoordinaten und Radien nochmals mit aufgenommen, nur sind jetzt alle Zahlen wegen Refraction und Aenderung der Mondparallaxe corrigirt, also streng vergleichbar.

| | Ohne Irradiation. | | | | Mit Irradiation. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nr. | $\xi_0$ | $\eta_0$ | $\varrho(\Xi)$ | $\varrho(H)$ | $\xi_0$ | $\eta_0$ | $\varrho(\Xi)$ | $\varrho(H)$ | $d\xi_0$ | $d\eta_0$ |
| 3 | 10.89 | 30.87 | 11.75 | 11.85 | 10.64 | 30.86 | 11.23 | 11.20 | −0.25 | −0.01 |
| 4 | 29.55 | 13.00 | 69 | 89 | 29.29 | 12.98 | 20 | 24 | 26 | 2 |
| 5 | 10.71 | 32.23 | 74 | 90 | 10.44 | 32.19 | 26 | 26 | 27 | 4 |
| 6 | 29.74 | 13.67 | 70 | 90 | 29.48 | 13.65 | 22 | 30 | 26 | 2 |
| 7 | 10.38 | 31.63 | 71 | 87 | 10.10 | 31.61 | 26 | 27 | 28 | 2 |
| 8 | 29.20 | 13.20 | 72 | 84 | 28.90 | 13.17 | 27 | 25 | 30 | 3 |
| 9 | 9.17 | 32.28 | 67 | 88 | 8.85 | 32.26 | 27 | 30 | 32 | 2 |
| 10 | 28.36 | 13.67 | 62 | 82 | 28.03 | 13.63 | 22 | 26 | 33 | 4 |
| 11 | 8.33 | 30.71 | 55 | 63 | 8.06 | 30.68 | 10 | 10 | 27 | 3 |
| 12 | 27.17 | 12.85 | 59 | 65 | 26.91 | 12.80 | 12 | 10 | 26 | 5 |
| 13 | 8.93 | 29.90 | 59 | 77 | 8.63 | 29.83 | 17 | 25 | 30 | 7 |
| 14 | 27.80 | 12.47 | 58 | 78 | 27.48 | 12.40 | 20 | 27 | 32 | 7 |
| 15 | 7.65 | 30.81 | 49 | 71 | 7.32 | 30.75 | 12 | 22 | 33 | 6 |
| 16 | 26.02 | 12.57 | 58 | 71 | 25.72 | 12.51 | 18 | 23 | 30 | 6 |
| 17 | 6.60 | 31.48 | 50 | 71 | 6.22 | 31.42 | 19 | 25 | 38 | 6 |
| 18 | 23.90 | 12.43 | 49 | 69 | 32.52 | 12.36 | 19 | 25 | 38 | 7 |
| 19 | 6.84 | 30.07 | 50 | 63 | 6.45 | 29.98 | 20 | 19 | 39 | 9 |
| 20 | 25.18 | 12.06 | 40 | 58 | 24.82 | 11.97 | 10 | 16 | 36 | 9 |
| 21 | 6.58 | 30.48 | 54 | 63 | 6.26 | 30.39 | 21 | 21 | 32 | 9 |
| 22 | 26.10 | 12.26 | 46 | 61 | 25.73 | 12.15 | 19 | 21 | 37 | 11 |
| 23 | 6.15 | 27.59 | 49 | 60 | 5.72 | 27.48 | 29 | 22 | 43 | 11 |
| 24 | 22.86 | 11.76 | 44 | 57 | 22.54 | 11.62 | 14 | 19 | 32 | 14 |

Diese Zahlen zeigen zunächst, dass durch Einführung der Irradiation sowohl der systematische Unterschied zwischen den beiden $\varrho$, als auch die Abnahme beider $\varrho$ fast vollständig verschwunden ist. Man hätte dies in noch höherem Grade erreichen können durch schärfere Bestimmung der beiden in der Function $r$ disponibelen Constanten, doch würde diese Arbeit ganz nutzlos gewesen sein. Man sieht nämlich weiter, dass durch die etwas geänderte Behandlung der Messungen die Mittelpunktscoordinaten $\xi_0$ $\eta_0$ um ganz enorme Beträge verändert werden. Diese, durch Einführung der Irradiation eintretenden Verschiebungen sind unter $d\xi_0$ und $d\eta_0$ angegeben und steigen bis auf 0.43 mm oder 33″. Man kann, ohne die Darstellung des Mondrandes wesentlich zu verschlechtern, die Irradiation ziemlich stark variiren, wobei sich dann der errechnete Mittelpunkt längs der Centralen Mond — Schattenmittelpunkt um Beträge von derselben Ordnung verschiebt, und eine solche Verschiebung geht mit ihrem vollen Betrage in den gesuchten Schattenhalbmesser ein.

Um dieses allerdings wenig erfreuliche Resultat vollkommen zu sichern, wurde noch der Versuch gemacht, durch strenge Auflösung für jede einzelne Aufnahme die vier Unbekannten: Mondradius, zwei Mittelpunktscoordinaten und Irradiationsconstante zu bestimmen. Doch wie zu erwarten war, zeigte es sich auch hierbei, dass die Irradiation sich nicht vom Mondradius und von der in die Richtung der Centralen fallenden Mittelpunktscoordinate trennen liess. Hieraus folgt, dass es unmöglich ist, aus diesen Messungen an einer Aufnahme gleichzeitig die vier Unbekannten zu bestimmen, so dass man also genöthigt ist, wenigstens eine dieser Grössen auf anderem Wege zu ermitteln. Auf welchem Wege dies geschehen kann, werden wir weiter unten noch sehen.

Da die Unsicherheit der Mittelpunktsbestimmungen nur in der Richtung der Centralen besteht, so geht dieselbe fast nur in den absoluten Werth des Schattenhalbmessers ein, während Schwankungen seiner Grösse, d. h. also Abweichungen von der theoretischen Form des Schattenquerschnittes, ziemlich fehlerfrei gefunden werden. Leider stellte sich nun aber noch ein zweites Hinderniss der exacten Berechnung dieser Aufnahmen entgegen. Man hatte nämlich geglaubt, der Scalenwerth würde sich aus dem Abstande der beiden, bei unverrücktem Fernrohr aufgenommenen Mondbilder und der Zwischenzeit bestimmen lassen. Die Genauigkeit dieser Methode ist jedoch nicht ausreichend. Falls die Belichtung aus freier Hand ohne besondere Vorsichtsmaassregeln vorgenommen wird, ist ein Versehen um eine Secunde leicht erklärlich. Da nun die Zeit zwischen zwei Aufnahmen etwa $2^m$ betrug, so brauchte bei jeder Belichtung nur ein solcher Fehler begangen zu werden, um den Scalenwerth schon um $\frac{1}{60}$ seines Betrages falsch zu ergeben. In Wirklichkeit sind jedoch noch grössere Versehen vorgekommen, wie man an den folgenden aus den ersten 12 Platten berechneten Scalenwerthen erkennt:

| | |
|---|---|
| 1 mm = 77."9 | 1 mm = 79."1 |
| 78.2 | 78.6 |
| 76.4 | 79.7 |
| 78.8 | 78.3 |
| 73.2 | 75.1 |
| 78.3 | 71.1 |

Da der hieraus gebildete Mittelwerth $\sigma = 77.''1$ noch gar zu unsicher war, wandte sich der Verfasser an Herrn Prof. WOLF in der Hoffnung, vielleicht aus Sternaufnahmen mit demselben Instrumente einen genaueren Scalenwerth zu erhalten. Doch auch auf diesem Wege liess sich nicht jeder Zweifel beseitigen. Es waren nämlich aus dem oben angegebenen Grunde über die Focusirung keine Notizen gemacht worden und die einzigen verwendbaren Sternaufnahmen lagen Monate von der Mondfinsterniss entfernt. Immerhin dürfte dem aus diesen Platten in leidlicher Uebereinstimmung gefundenen Scalenwerthe noch der Vorzug zu geben sein. Es ergaben sich folgende Zahlen:

1) Sternhaufen im Perseus, aufgenommen am 11. Sept. 1888

| | |
|---|---|
| Bogen 5—12 in KRUEGERS Vermessung (*A* — *Z* Persei) | $\sigma = 78.''614$ (3) |
| 31—34 » » » | 78.632 (2) |
| 2054—2177 in KRUEGERS A. G. Zonen | 78.672 (1) |
| 2061—2190 » » » | 78.647 (1) |
| | Mittel $\sigma = 78.632$ |

2) Sternhaufen G. C. 1360 bei $\eta$ Geminorum, am 27. Febr. 1889 (Bilder sehr unscharf)

| | |
|---|---|
| Bogen 22—27 nach REBEUR-PASCHWITZ (Karlsruhe III) | $\sigma = 78.''659$ |
| 43—87 » » » | 78.763 |
| 2212—2231 in BECKERS A. G. Zonen | 78.732 |
| | Mittel $\sigma = 78.718$ |

Nehmen wir im Mittel 1 mm = 78.''65 an, so kann diese Zahl kaum 0.''2 fehlerhaft sein. Denn wäre bei der Finsterniss um 5 mm anders focusirt gewesen, so würde sich $\sigma$ um 0.''15 ändern, gleichzeitig würden aber, abgesehen von einem etwaigen Wärmecoefficienten des Objectives, die Zerstreuungsbildchen etwa $\frac{1}{3}$ mm Durchmesser haben, sodass an dieser Stelle kaum ein scharfes Bild zu erhalten wäre. Wir werden daher diesen Scalenwerth, obwohl er 1.''5 von dem oben gefundenen abweicht, zur Reduction der Finsternissaufnahmen verwenden.

Da die immerhin bleibende Unsicherheit des Scalenwerthes und des Mondmittelpunktes eine Quelle systematischer Fehler ist, so hielt der Verfasser die ziemlich zeitraubende, erschöpfende Berechnung

dieser Beobachtungsreihe nicht für angebracht. Nur um eine Vorstellung von der Genauigkeit der photographischen Beobachtungsmethode zu geben, theile ich die folgenden Berechnungen mit.

Auf die im § 4 beschriebene Weise wurde der Schattenrand von den fünf Beobachtern BRUNS, PETER, HAYN, HARTMANN und HÄNIG ausgemessen und schon die gute Uebereinstimmung aller Angaben ist ein Beweis für die Sicherheit dieser Messungen. Bei der oben besprochenen Aufnahme 3 ergaben sich z. B. folgende Coordinaten der Schattencurve:

| | B | P | Hy | Hm | Hg | Mittel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta = 24$ | $\xi = 1.6$ | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.6 | 1.42 |
| 25 | 2.0 | 1.7 | 2.0 | 1.9 | 2.0 | 1.92 |
| 26 | 2.2 | 2.0 | 2.2 | 2.2 | 2.2 | 2.16 |
| 27 | 2.3 | 2.3 | 2.4 | 2.3 | 2.4 | 2.34 |
| 28 | 2.5 | 2.4 | 2.7 | 2.4 | 2.6 | 2.52 |
| 29 | 2.5 | 2.6 | 2.9 | 2.4 | 2.7 | 2.62 |
| 30 | 2.4 | 2.5 | 2.9 | 2.4 | 2.9 | 2.62 |
| 31 | 2.3 | 2.4 | 2.8 | 2.4 | 2.8 | 2.54 |
| 32 | 2.2 | 2.4 | 2.7 | 2.3 | 2.6 | 2.44 |
| 33 | 2.1 | 2.3 | 2.6 | 2.1 | 2.4 | 2.30 |
| 34 | 2.0 | 2.1 | 2.3 | 1.9 | 2.2 | 2.10 |
| 35 | 1.8 | 1.8 | 2.0 | 1.6 | 2.0 | 1.84 |
| 36 | 1.3 | 1.3 | 1.6 | 1.4 | 1.5 | 1.44 |

Aus der Uebereinstimmung der fünf Beobachter ergiebt sich der m. F. einer einzelnen Ablesung ± 0.174 mm und der des Mittels ± 0.078 mm = ± 6″.0. Bei dieser Messungsmethode sind also selbst die Unterschiede zwischen verschiedenen Beobachtern nur so gross, wie bei directen Messungen die Unsicherheit auf einander folgender Einstellungen desselben Beobachters ist und dabei ist die vorliegende Aufnahme noch lange keine der schärfsten.

Zur weiteren Berechnung wurden acht über die ganze Finsterniss vertheilte Aufnahmen ausgewählt, die jedoch paarweise dicht zusammenliegen und sich so gegenseitig controliren; es sind die Aufnahmen Nr. 3, 4; 9, 10; 19, 20; 33 und 34. Um zunächst den Einfluss der Unsicherheit des Mondmittelpunktes auf die berechneten Schattenradien numerisch zu bestimmen, wurde für je drei Punkte

(beide Hörnerspitzen und ein Punkt mitten dazwischen) der Aufnahmen 3, 9, 20 und 33 die Rechnung sowohl ohne als auch mit Berücksichtigung der Irradiation durchgeführt. Es ergab sich, dass durch Einführung der Irradiation die beobachteten Schattenhalbmesser um folgende Beträge vergrössert wurden:

| | Nr. 3 | 9 | 20 | 33 |
|---|---|---|---|---|
| unteres Horn | + 19″1 | 24″2 | 27″8 | 34″4 |
| Mitte | + 19.5 | 25.0 | 29.1 | 35.8 |
| oberes Horn | + 19.1 | 24.1 | 27.2 | 32.9 |

Es bestätigt sich also, dass die Irradiation am Mondrande alle Schattenradien um nahezu constante Beträge ändert, auf die Form des Schattenrandes aber fast keinen Einfluss hat. Aus diesem Grunde wurde die weitere Rechnung ohne Berücksichtigung der Irradiation durchgeführt. Da für die etwa erwünschte Berechnung eines Controlbeispieles die oben über Aufnahme 3 gemachten Angaben genügen, so theile ich im Folgenden nur die gefundenen Endwerthe der Vergrösserung $V$, sowie $F$ und $\chi$ mit ($F$ ist der selenocentrische Abstand des beobachteten Punktes von der scheinbaren Mitte der Mondscheibe, $\chi$ der Positionswinkel des Schattenhalbmessers). Die Finsternisselemente sind schon in I, pag. 401 gegeben.

| Nr. 3. $V$ | $F$ | $\chi$ | Nr. 4. $V$ | $F$ | $\chi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| + 72″8 | 89°45′ | 303°52′ | + 60″1 | 75°26′ | 304°45′ |
| 93.1 | 67 53 | 305 57 | 70.7 | 63 3 | 306 43 |
| 100.5 | 59 43 | 307 50 | 76.2 | 56 2 | 308 37 |
| 106.4 | 54 11 | 309 43 | 85.0 | 50 33 | 310 31 |
| 115.4 | 49 52 | 311 34 | 93.6 | 46 16 | 312 23 |
| 121.0 | 47 5 | 313 23 | 103.4 | 43 22 | 314 13 |
| 121.6 | 45 55 | 315 9 | 109.6 | 41 41 | 316 2 |
| 118.6 | 46 14 | 317 1 | 109.5 | 41 39 | 317 51 |
| 116.8 | 47 25 | 318 50 | 107.6 | 42 53 | 319 41 |
| 114.7 | 49 52 | 320 39 | 100.2 | 45 40 | 321 32 |
| 110.7 | 53 44 | 322 30 | 101.8 | 48 47 | 323 21 |
| 104.9 | 59 15 | 324 20 | 95.4 | 53 43 | 325 14 |
| 91.8 | 68 14 | 326 15 | 83.1 | 61 28 | 327 8 |
| | | | 60.1 | 75 20 | 329 9 |

Nr. 9.

| V | F | χ |
|---|---|---|
| + 11″.0 | 74°27′ | 304°58′ |
| 10.6 | 62 4 | 306 58 |
| 15.7 | 53 32 | 308 56 |
| 25.8 | 46 32 | 310 52 |
| 33.7 | 40 55 | 312 47 |
| 37.6 | 36 20 | 314 41 |
| 42.5 | 32 40 | 316 33 |
| 46.9 | 29 58 | 318 26 |
| 46.3 | 28 44 | 320 19 |
| 51.3 | 28 16 | 322 10 |
| 56.0 | 29 3 | 324 2 |
| 57.4 | 31 16 | 325 55 |
| 59.9 | 34 27 | 327 48 |
| 66.6 | 38 19 | 329 40 |
| 71.6 | 43 16 | 331 33 |
| 63.3 | 50 22 | 333 33 |
| 66.8 | 58 10 | 335 28 |
| 53.9 | 71 29 | 337 35 |

Nr. 10.

| V | F | χ |
|---|---|---|
| + 51″.6 | 72°27′ | 305°31′ |
| 53.8 | 60 25 | 307 29 |
| 58.3 | 51 59 | 309 24 |
| 65.8 | 45 2 | 311 18 |
| 74.2 | 39 9 | 313 11 |
| 80.4 | 34 6 | 315 3 |
| 85.7 | 29 57 | 316 54 |
| 82.6 | 27 11 | 318 44 |
| 84.1 | 25 14 | 320 36 |
| 83.3 | 24 40 | 322 26 |
| 85.3 | 25 14 | 324 18 |
| 85.2 | 27 13 | 326 9 |
| 89.7 | 30 2 | 328 1 |
| 95.2 | 33 46 | 329 52 |
| 88.4 | 39 16 | 331 49 |
| 87.9 | 45 19 | 333 44 |
| 88.6 | 52 29 | 335 41 |
| 75.7 | 63 7 | 337 46 |
| 57.1 | 89 45 | 339 56 |

Nr. 19.

| V | F | χ |
|---|---|---|
| + 43″.2 | 73°37′ | 310°45′ |
| 49.5 | 60 59 | 312 43 |
| 51.6 | 52 5 | 314 37 |
| 55.8 | 44 40 | 316 31 |
| 56.0 | 38 4 | 318 24 |
| 50.1 | 32 0 | 320 18 |
| 50.0 | 26 16 | 322 12 |
| 51.1 | 20 49 | 324 5 |
| 52.1 | 15 31 | 326 0 |
| 57.0 | 10 23 | 327 52 |
| 61.7 | 5 19 | 329 47 |
| 60.3 | 1 26 | 311 44 |
| 55.9 | 5 43 | 333 43 |
| 61.5 | 10 46 | 335 39 |
| 61.6 | 16 18 | 337 39 |
| 60.4 | 22 7 | 339 41 |
| 59.6 | 28 18 | 341 47 |
| 68.9 | 34 36 | 343 45 |
| 72.1 | 41 48 | 345 52 |
| 75.9 | 50 6 | 347 59 |
| 74.6 | 60 51 | 350 15 |

Nr. 20.

| V | F | χ |
|---|---|---|
| + 50″.7 | 75° 8′ | 311°54′ |
| 55.4 | 61 58 | 313 51 |
| 54.5 | 52 54 | 315 45 |
| 53.6 | 45 25 | 317 38 |
| 55.8 | 38 50 | 319 32 |
| 54.4 | 32 44 | 321 26 |
| 54.3 | 27 0 | 323 19 |
| 52.4 | 21 28 | 325 14 |
| 51.9 | 16 8 | 327 8 |
| 58.4 | 11 3 | 329 2 |
| 61.9 | 6 0 | 330 56 |
| 57.7 | 1 2 | 332 56 |
| 65.2 | 4 40 | 334 50 |
| 63.4 | 9 58 | 336 51 |
| 54.4 | 15 41 | 338 57 |
| 63.5 | 21 14 | 340 55 |
| 57.8 | 27 31 | 343 5 |
| 67.8 | 33 49 | 345 5 |
| 67.6 | 41 9 | 347 15 |
| 73.7 | 49 18 | 349 24 |
| 79.2 | 59 23 | 351 22 |
| 77.8 | 76 16 | 353 57 |

| Nr. 33. V | F | χ | Nr. 34. V | F | χ |
|---|---|---|---|---|---|
| + 45″.4 | 76° 9′ | 336°32′ | + 53″.5 | 75°32′ | 338°53′ |
| 57.8 | 65 2 | 338 29 | 65.3 | 64 35 | 340 51 |
| 63.8 | 56 43 | 340 31 | 73.6 | 56 38 | 342 52 |
| 73.1 | 50 21 | 342 31 | 78.5 | 49 50 | 344 58 |
| 74.6 | 44 10 | 344 39 | 80.1 | 43 59 | 347 0 |
| 73.0 | 38 28 | 346 51 | 83.9 | 38 36 | 349 20 |
| 72.6 | 33 34 | 349 7 | 86.5 | 34 4 | 351 35 |
| 63.4 | 28 38 | 351 35 | 83.3 | 29 49 | 354 2 |
| 57.6 | 25 0 | 354 5 | 81.1 | 26 45 | 356 33 |
| 48.6 | 22 34 | 356 47 | 81.3 | 25 21 | 359 6 |
| 49.4 | 25 6 | 359 22 | 83.3 | 25 52 | 1 44 |
| 46.6 | 25 0 | 2 11 | 89.7 | 28 30 | 3 23 |
| 49.7 | 29 22 | 4 59 | 99.1 | 32 57 | 7 3 |
| 51.1 | 35 35 | 8 0 | 97.4 | 39 16 | 10 17 |
| 56.0 | 43 47 | 11 7 | 100.3 | 48 10 | 13 37 |
| 60.8 | 55 4 | 14 31 | 95.2 | 62 46 | 17 43 |

An den vorstehenden Zahlen zeigt sich nun eine ganze Reihe von interessanten Erscheinungen. Zunächst sieht man, dass von Reihe zu Reihe der Werth von $V$ sich ganz erheblich ändert: es sind also auf den einzelnen Bildern ganz verschiedene Curven constanter Helligkeit aufgefasst worden, was höchst wahrscheinlich in ihrer verschiedenen Belichtungs- resp. Entwickelungsdauer seinen Grund hat. Sodann aber fällt namentlich ein ganz systematischer Gang in den Werthen jeder Reihe auf: bei den ersten Aufnahmen hat $V$ in der Mitte der Schattencurve ein stark ausgeprägtes Maximum, d. h. die Krümmung der Curve ist erheblich stärker, als sie nach der Theorie sein sollte. Man sieht dies den Bildern auch auf den ersten Blick schon an, da das auf der Mondscheibe sichtbare Stück des Schattenrandes einem Kreise anzugehören scheint, der kaum grösser ist als der Mond. Bei den späteren Aufnahmen ist dieses Maximum nicht so deutlich ausgesprochen, es findet vielmehr eine etwas ungleichförmige Zunahme von $V$ mit wachsendem $\chi$ statt. Um weitere Schlüsse über die Genauigkeit der vorliegenden Zahlen zu ermöglichen, wurde der Versuch gemacht, dieselben durch die Interpolationsformel

$$V = V_0 + C \cos F + U \cos^2 \chi$$

darzustellen. Da jedoch die Coefficienten von $C$ und $U$ ziemlich

parallel verlaufen, so lassen sich diese beiden Unbekannten nicht sehr sicher bestimmen; ganz unsicher wurde die Auflösung bei den zwei letzten Platten, welche deshalb nur linear ausgeglichen wurden. Die übrigen ergaben nach der Methode der kleinsten Quadrate folgende Werthe der Unbekannten:

| Nr. | $V_0$ | $C$ | $U$ |
|---|---|---|---|
| 3 | + 68″7 | + 71″3 | − 0″7 |
| 4 | + 21.6 | + 96.3 | + 21.8 |
| 9 | − 37.6 | + 27.6 | + 105.9 |
| 10 | + 24.6 | + 42.6 | + 37.0 |
| 19 | + 32.9 | − 11.3 | + 47.6 |
| 20 | + 40.0 | − 16.1 | + 43.6 |

Einigermassen sicher ist noch $C$ bestimmt; die dicht auf einander folgenden Werthe stimmen gut überein, aber ihr systematisches Abnehmen beweist, dass die Abhängigkeit von $F$ nicht die oben angenommene Form hat. Die m. F. der einzelnen Werthe von $U$ sind der Reihe nach ± 8″5, 10″0, 5″9, 6″0, 5″4 und 4″6, so dass namentlich das positive Vorzeichen von $U$ unzweifelhaft erwiesen ist. Nehmen wir im Mittel etwa $U = + 40''$ an, so besagt dies, dass die Polaraxe der Schattenellipse 40″ grösser, als nach der Theorie folgen würde, erschien; da sie nach dieser 9″8 kleiner, als die Aequatorialaxe sein sollte, so ergeben also obige Zahlen den Schatten über den Erdpolen noch 30″ grösser, als über dem Aequator. Zu dem gleichen Resultate waren wir schon in § 15 auf Grund der anderen Beobachtungen gelangt. Doch diese Bemerkungen nur nebenbei; wichtiger ist für uns jetzt die Vergleichung der aus obiger Interpolationsformel berechneten $V$ mit den beobachteten Werthen, da uns hierdurch die überraschende Schärfe der photographischen Messungen vor Augen geführt wird. Im Sinne Beobachtung minus Rechnung bleiben nämlich die folgenden Fehler übrig:

| 3. | 4. | 9. | 10. | 19. | 20. | 33. | 34. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + 7″ | | + 2″ | | − 4″ | − 26″ | − 15″ |
| + 4″ | − 2 | + 5″ | − 5 | − 7″ | + 2 | − 11 | − 6 |
| − 3 | − 8 | − 3 | − 8 | 0 | + 1 | − 4 | + 1 |
| − 4 | − 7 | − 5 | − 5 | + 3 | + 2 | + 7 | + 4 |
| − 4 | − 4 | − 1 | − 1 | + 6 | + 3 | + 10 | + 4 |
| + 1 | + 1 | + 1 | + 1 | + 5 | + 1 | + 10 | + 6 |
| + 4 | + 5 | 0 | + 5 | − 1 | 0 | + 12 | + 6 |
| + 4 | + 4 | 0 | 0 | − 2 | − 3 | + 3 | + 1 |
| + 1 | + 3 | + 1 | − 1 | − 2 | − 4 | 0 | − 3 |
| 0 | − 2 | − 5 | − 4 | − 3 | + 1 | − 8 | − 5 |
| + 1 | + 3 | − 2 | − 2 | + 1 | + 5 | − 6 | − 5 |
| + 1 | + 2 | 0 | − 3 | + 5 | 0 | − 6 | 0 |
| 0 | 0 | − 3 | + 2 | + 1 | + 5 | − 2 | + 7 |
| − 3 | − 2 | − 2 | + 7 | − 4 | + 2 | + 1 | + 4 |
| | | + 3 | + 2 | 0 | − 8 | + 7 | + 5 |
| | | + 7 | + 4 | − 1 | − 1 | + 14 | − 2 |
| | | − 2 | + 8 | − 4 | 7 | | |
| | | + 3 | 0 | − 6 | + 1 | | |
| | | − 8 | 0 | + 2 | − 1 | | |
| | | | | + 3 | + 2 | | |
| | | | | + 5 | + 4 | | |
| | | | | + 1 | − 1 | | |

Obwohl schon alle diese Zahlen den Fehlern der anderen Beobachtungsmethoden gegenüber sehr klein sind, so geben dieselben noch nicht einmal den wahren Werth der zufälligen Messungsfehler an. Denn wie man aus dem vollkommenen Parallelgehen der Vorzeichen in je zwei benachbarten Reihen schliessen muss, entsprechen diese Zahlen noch thatsächlichen Biegungen der Schattencurve[1]). Und in der That lassen sich die Gründe der letzteren auch sofort finden. Obwohl sich nämlich sämmtliche Beobachter bemüht haben, den mittleren Verlauf des Schattenrandes unabhängig von den durch die verschiedene Albedo der einzelnen Mondgegenden verursachten Auszackungen abzulesen, so sind sie doch unbewusst in ganz ge-

1) Namentlich ist dies bei den etwas grösseren Fehlern der letzten beiden Aufnahmen zu berücksichtigen.

ringem Grade diesen Wellenlinien gefolgt. So liegen z. B. bei den beiden ersten Platten die negativen Anfangswerthe auf der hellen Südpolargegend bei Tycho; während der Schatten über das dunklere Mare humorum hinwegsetzt, ergeben sich vier positive Reste. Der hierauf folgende einzelne negative Fehler liegt auf dem hellen Gebiete bei Gassendi, während die weiteren positiven Werthe in den dunkleren Oceanus procellarum fallen. Man erkennt hieran, dass es zur strengen Bearbeitung derartiger Aufnahmen unbedingt erforderlich ist, auch die verschiedene Helligkeit der einzelnen Mondlandschaften, die man ja ebenfalls auf photographischem Wege ermitteln kann, in Rechnung zu ziehen. Hat man dies in aller Strenge ausgeführt, so würden dann noch übrig bleibende systematische Schwankungen im Verlaufe der Fehler auf Unebenheiten im schattenwerfenden Erdrande hinweisen. Für jetzt ist die Anbringung dieser kleinen Correctionen noch nicht möglich; doch selbst wenn wir alle diese Fehler als rein zufällige betrachten, übertreffen diese Messungen alle früheren schon bei Weitem an Genauigkeit. Es ergeben sich nämlich für die acht Aufnahmen die folgenden mittleren Fehler eines gemessenen Schattenhalbmessers:

$$\pm 3''\!.2,\quad 4''\!.8,\quad 4''\!.0,\quad 4''\!.4,\quad 3''\!.9,\quad 3''\!.6,\quad 10''\!.3,\quad 5''\!.9,$$

und dabei muss noch erwähnt werden, dass die vorliegenden Aufnahmen noch ziemlich klein und nicht vollkommen scharf sind. Bei Anwendung einer grösseren Brennweite und passender Belichtungszeit wird sich die Schärfe der Messungen noch erheblich weiter treiben lassen.

Ganz belanglos ist hier, dass die oben reducirten Zahlen ja nicht einzelne Messungen, sondern Mittelwerthe aus fünf Beobachtern sind; denn es wurde ja gerade als ein Vorzug dieser Methode hervorgehoben, dass sie die zufälligen Messungsfehler durch das Zusammenwirken mehrerer Beobachter bei demselben Plattenmaterial herabzudrücken erlaubt.

## 17.

Ueberblicken wir die im Vorhergehenden gefundenen Resultate nochmals, so lassen sich dieselben etwa in den folgenden Sätzen zusammenfassen:

1) Die zur Vorausberechnung künftiger Mondfinsternisse nöthige Vergrösserung des Erdschattens ist mit der überhaupt erreichbaren Schärfe bestimmt. Und so haben denn auch

| | | | |
|---|---|---|---|
| das Berliner Jahrbuch | seit 1895 | den Factor | $\frac{1}{50}$, |
| die Connaissance des temps | » 1895 | » » | $\frac{1}{50.8}$, |
| der Nautical Almanac | » 1896 | » » | $\frac{1}{50}$ |

zur Berechnung der Finsternissephemeriden angenommen.

Die Beobachtung künftiger Mondfinsternisse sollte daher nur noch die Bestimmung der Curven gleicher Helligkeit und die photometrische Messung der Lichtvertheilung im ganzen Schattenbereiche zum Ziele haben.

2) Zur Bestimmung der Form der Schattencurve sind vorzugsweise die photographischen Aufnahmen geeignet, da diese allein von den systematischen Fehlern frei sind, welche man bei allen directen Messungen befürchten muss, und ausserdem eine erheblich grössere Schärfe, als alle Ocularbeobachtungen besitzen. Um die bei diesen Aufnahmen sehr störende photographische Irradiation streng in Rechnung ziehen zu können, schlägt man folgenden Weg ein: Sind alle Platten gleich empfindlich und genau gleich lange belichtet und entwickelt, so hat man nur an jeder Aufnahme den zur Verbindungslinie Mondmittelpunkt — Schattenmittelpunkt senkrechten Monddurchmesser zu messen, um direct den Betrag der Irradiation in den betreffenden Abständen vom Schattenmittelpunkte zu erhalten. Man kann dann sowohl die Irradiation als auch den durch directe Messungen gefundenen Mondhalbmesser als bekannte Grössen annehmen, so dass die Bestimmung der Bildmittelpunkte keinerlei Schwierigkeit hat. Sind obige Bedingungen nicht erfüllt, so haben besondere Untersuchungen über die Irradiation in der § 5 beschriebenen Weise vorauszugehen.

Wie die Durchmessung der bis jetzt vorliegenden Finsternissaufnahmen ergeben hat, ist bei denselben die erwähnte Gleichmässigkeit in keiner Weise vorhanden (z. B. hatte Herr WOLF für die oben berechneten Aufnahmen drei verschiedene Plattensorten benutzt), so dass eine exacte Berechnung derselben nicht möglich ist.

Schon jetzt sind jedoch genügende Anzeichen vorhanden, dass der beobachtete Schattenrand nicht die theoretische elliptische Form hat.

3) Um die Mondfinsternisse für die theoretische Behandlung nutzbar zu machen und eventuelle Rückschlüsse auf unsere Atmosphäre zu ermöglichen, sind photometrische Messungen anzustellen, und es ist sehr erfreulich, dass vor kurzer Zeit, wie soeben noch bekannt wird, bereits eine derartige Messungsreihe ausgeführt worden ist. Herr FRANK W. VERY am Allegheny-Observatory maass bei der Finsterniss am 3. September 1895 die Helligkeit an verschiedenen Stellen des Schattens. Wenn diese Messungen auch nicht ganz einwurfsfrei sind, so vermögen sie uns doch eine erste Vorstellung von den starken Helligkeitsunterschieden im Schatten zu geben, weshalb ich die von diesem Beobachter gefundenen Zahlen hier mittheile. Bezeichnen wir wie bisher den Radius des Kernschattens mit $\omega$, die Breite des Halbschattens mit $\eta$, den Abstand des beobachteten Punktes vom Schattenmittelpunkte mit $r$ und seine Helligkeit in Theilen der Vollmondshelligkeit mit $J$, so ergaben sich folgende Werthe:

| $r$ | $J$ |
|---|---|
| $\omega + 1.5\ \eta$ (?) | 0.977 |
| 1.1 (?) | 0.942 |
| 0.50 | 0.316 |
| 0.30 | 0.173 |
| 0.15 | 0.0965 |
| 0.10 | 0.0385 |
| 0.08 | 0.0131 |
| $1.00\ \omega + 0.00\ \eta$ | 0.00565 |
| 0.95 | 0.00147 |
| 0.85 | 0.00112 |
| 0.80 | 0.000427 |
| 0.74 | 0.000250 |
| 0.58 | 0.0000508 |
| 0.21 | 0.0000000042 |
| 0.37 | 0.0000000129 |
| 0.49 | 0.0000000131 |
| 0.81 | 0.000257 |
| 0.83 | 0.000264 |
| 0.92 | 0.00235 |
| $1.00\ \omega + 0.10\ \eta$ | 0.0348 |
| 0.35 | 0.635 |
| 0.55 | 0.685 |

Um diese Zahlen verständlicher zu machen, nehmen wir zunächst die Logarithmen der Helligkeiten und setzen daneben unter $\log J'$ die nach den Formeln von Seite 449 berechneten theoretischen Werthe. Hieraus ergeben sich dann mit $\omega = 38' \, 13''\!.1$, $\eta = 31' \, 48''\!.2$ die in den beiden letzten Columnen beigefügten Aenderungen von $\log J$ für $dr = 1'$. Dicht zusammenliegende Werthe sind hier zusammengezogen worden und im zweiten Theile ist die Beobachtung des Schattenrandes nochmals hinzugefügt.

| $r$ | $\log J$ | $\log J'$ | $\frac{d \log J}{dr}$ | $\frac{d \log J'}{dr}$ |
|---|---|---|---|---|
| $1.00\,\omega + 1.5\,\eta$ | 9.990 | 1.000 | 0.001 | 0.000 |
| 1.1 | 9.974 | 1.000 | 0.025 | 0.014 |
| 0.50 | 9.500 | 9.724 | 0.041 | 0.044 |
| 0.30 | 9.238 | 9.445 | 0.053 | 0.086 |
| 0.15 | 8.985 | 9.031 | 0.226 | 0.192 |
| 0.09 | 8.412 | 8.664 | 0.229 | $\infty$ |
| $1.00\,\omega + 0.00\,\eta$ | 7.752 | $-\infty$ | 0.307 | |
| 0.95 | 7.167 | | 0.031 | |
| 0.85 | 7.049 | | 0.215 | |
| 0.80 | 6.630 | | 0.100 | |
| 0.74 | 6.400 | | 0.113 | |
| 0.58 | 5.706 | | 0.288 | |
| 0.21 | 1.623 | | 0.058 | |
| 0.43 | 2.114 | | 0.223 | |
| 0.82 | 6.415 | | 0.252 | |
| 0.92 | 7.371 | | 0.126 | |
| $1.00\,\omega + 0.00\,\eta$ | 7.752 | $-\infty$ | 0.248 | $\infty$ |
| 0.10 | 8.542 | 8.778 | 0.157 | 0.094 |
| 0.35 | 9.803 | 9.534 | 0.006 | 0.038 |
| 0.55 | 9.836 | 9.772 | | |

An diesen Zahlen muss zunächst auffallen, dass schon weit ausserhalb des Halbschattens eine Abnahme des Mondlichtes gemessen wurde und dass dem entsprechend zu Beginn der Finsterniss alle Helligkeiten im Halbschatten kleiner gefunden wurden, als ihre theoretischen Werthe. Würde ich diese Erscheinung gut mit der Wirkung der Atmosphäre erklären, welche das fehlende Licht zum Theil absorbirt, zum Theil in den Kernschatten ablenkt, so stimmen hiermit die beiden letzten gemessenen Zahlen gar nicht überein. Diese grossen Unterschiede rühren von der sehr verschiedenen Albedo der eingestellten Punkte her. Sehr überraschen muss es aber, dass an

der Schattengrenze keine schnellere Helligkeitsabnahme beobachtet wurde, und dass namentlich innerhalb des Kernschattens die Lichtabnahme an vielen Stellen denselben Betrag erreicht.

Jedenfalls erkennt man auch an den vorstehenden Zahlen, wie sehr eine exacte photometrische Ausmessung aller Theile des Schattens zu wünschen ist. Hat man auf diese Art zahlenmässig den Verlauf der Helligkeit längs eines Schattenhalbmessers bestimmt, so ist hierdurch nach zwei Seiten hin ein fester Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen gegeben. Einerseits wird man versuchen, die Lichtvertheilung im Erdschatten auch theoretisch unter Berücksichtigung aller Factoren — Refraction und Absorption in der Atmosphäre, Abnahme der Helligkeit nach dem Rande der Sonnenscheibe hin und wohl auch Licht der Corona — zu berechnen. Aus der Uebereinstimmung mit dem beobachteten Verlaufe würden sich dann wieder Schlüsse auf obige, uns bis jetzt ja selbst noch unvollkommen bekannte Grössen ziehen lassen. Anderseits müsste sich aus dem gemessenen Verlaufe der Helligkeit dann auch physiologisch die bisher beobachtete Lage der Schattengrenze erklären lassen und diese Erklärung wäre durch die schon früher (I, pag. 542) erwähnten Experimente im Laboratorium zu bestätigen[1]). Erst wenn alle diese Fragen gelöst sind, kann man die Untersuchung der bisher namentlich in photometrischer Hinsicht noch nicht genügend gewürdigten Mondfinsternisse für abgeschlossen erklären.

---

1) Durch Herrn SEELIGER's Untersuchungen ist in beiden Richtungen bereits ein wichtiger Schritt gethan, jedoch wird man zur vollständigen Erklärung des Finsternissphänomens sowohl noch obiges Verbindungsglied schaffen, als auch Herrn SEELIGER's Berechnungen und Experimente noch weiter ausdehnen müssen.

# BEITRÄGE

ZU EINER

# MUSKELDYNAMIK.

ZWEITE ABHANDLUNG:

## UEBER DIE WIRKUNG DER SCHWERE UND BELIEBIGER MUSKELN AUF DAS ZWEIGLIEDRIGE SYSTEM.

VON

**OTTO FISCHER,**

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

(AUS DEM ANATOMISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.)

---

Des XXIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° VI.

MIT 4 TAFELN UND 12 TEXTFIGUREN.

---

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1897.

Das Manuscript eingeliefert am 19. October 1896.
Der Abdruck vollendet am 8. Februar 1897.

# BEITRÄGE

ZU EINER

# MUSKELDYNAMIK.

ZWEITE ABHANDLUNG:

## ÜBER DIE WIRKUNG DER SCHWERE UND BELIEBIGER MUSKELN AUF DAS ZWEIGLIEDRIGE SYSTEM

VON

**OTTO FISCHER**

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

(AUS DEM ANATOMISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.)

MIT 4 TAFELN UND 12 TEXTFIGUREN.

# INHALTSVERZEICHNISS.


Seite

Einleitung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 473

I. Wirkung der Schwere bei verticaler Stellung des Oberarms . . . . . 480

II. Wirkung der Schwere bei verticaler Stellung des Unterarms und Wirkung der am Oberarm ansetzenden Muskeln . . . . . . . . . . . . . . 497

III. Wirkung der Schwere bei beliebiger Haltung des Armes und Wirkung der am Unterarm ansetzenden mehrgelenkigen Muskeln . . . . . . . 509

Rückblick . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 555

# Einleitung.

Wie die Bewegungen zweier benachbarter Glieder des menschlichen Körpers in Folge der Gelenkverbindung zwischen beiden in bestimmter Weise von einander abhängen, so werden auch die Drehungen in benachbarten Gelenken im Allgemeinen in einer gewissen Abhängigkeit zu einander stehen, da auf beide die Bewegung des dieselben verbindenden Körpertheils von Einfluss ist. Die Untersuchung der Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln[1]) hat nun thatsächlich einen sehr engen Zusammenhang zwischen den Gelenkbewegungen eines zweigliedrigen Systems ergeben. Ein zwischen Oberarm und Unterarm sich erstreckender Beuge- oder Streckmuskel des Ellbogengelenks bewirkt beispielsweise bei feststehendem Schultergürtel eine Drehung im Schultergelenk, deren Grösse für jede Ausgangsstellung des Armes in einem ganz bestimmten Verhältniss zu der Grösse der Beuge- oder Streckbewegung im Ellbogengelenk steht. Dieses Verhältniss der Gelenkdrehungen ist von der Spannung des Muskels ganz unabhängig. Das Entsprechende gilt für einen eingelenkigen Beuger oder Strecker des Kniegelenks bei feststehendem Becken, einen solchen des Fussgelenks bei fixirtem Oberschenkel oder irgend einen Muskel, welcher zwischen den beiden Abschnitten eines zweigliedrigen, um einen festen Punkt drehbaren Systems ausgespannt ist.

Es steht nun zu erwarten, dass auch für die mehrgelenkigen Muskeln eines zweigliedrigen Systems eine einfache Beziehung zwi-

---

1) Vgl. die »Beiträge zu einer Muskeldynamik. Erste Abhandlung: Über die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln«. Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Classe, Band XXII, Nr. II. 1895.

schen den Drehungen in den beiden Gelenken besteht. Die Untersuchung bestätigt diese Vermuthung; sie ergiebt das Resultat, dass z. B. jeder mehrgelenkige Muskel des Armes, wie der M. biceps brachii oder der lange Kopf des M. triceps brachii, bei seiner Contraction aus der Ruhe ebenfalls gleichzeitig im Schultergelenk und Ellbogengelenk Drehungen bewirkt, deren Grössen in einem ganz bestimmten, von der Spannung des Muskels unabhängigen Verhältniss stehen. Dies gilt streng allerdings nur für sehr kleine Drehungen, da nach einer merklichen Aenderung der Armhaltung auch im Allgemeinen die drehende Einwirkung des Muskels auf die Gelenke eine andere geworden ist. Bei grösserer oder geringerer Spannung des Muskels kann zwar die Drehung in jedem Gelenk schneller oder langsamer vor sich gehen, das Verhältniss der in gleicher Zeit beschriebenen Drehungswinkel wird aber dabei nicht geändert, sofern man nur den Zeitraum klein genug annimmt, um innerhalb desselben die Einwirkung des Muskels auf die Gelenke als constant auffassen zu können.

Die Verhältnisswerthe der kleinen Gelenkdrehungen sind bei gleicher Armhaltung für die mehrgelenkigen Muskeln nicht dieselben wie für die eingelenkigen, und sie sind ausserdem auch für die verschiedenen mehrgelenkigen Muskeln verschieden, während sich bei den verschiedenen eingelenkigen Muskeln kein Unterschied in den Drehungsverhältnissen herausgestellt hatte.

Dies erklärt sich ohne Weiteres aus folgender Thatsache. Die Untersuchung zeigt, dass das Verhältniss der kleinen Anfangsdrehungen, welche von einem beliebigen Muskel bei seiner Contraction aus der Ruhe in beiden Gelenken hervorgerufen werden, nicht von dem absoluten Werthe, sondern nur von dem Verhältniss der Drehungsmomente abhängt, mit denen der Muskel auf die beiden Abschnitte des zweigliedrigen Systems einwirkt. Das Verhältniss der Drehungsmomente wird aber allein durch die Art der Insertion des Muskels und den Verlauf seiner Fasern, dagegen nicht auch durch dessen veränderliche Spannung bestimmt. Für alle eingelenkigen Muskeln besitzt es den gleichen constanten Werth; daher rufen auch alle eingelenkigen Muskeln Gelenkbewegungen von gleichem Verhältniss hervor, sie mögen sich inseriren wo sie wollen. Unter den mehrgelenkigen Muskeln weist dagegen bei gleicher Ausgangshaltung des

Armes jeder ein anderes Verhältniss der Drehungsmomente auf; daher bewirkt auch jeder bei seiner Contraction aus der Ruhe Gelenkbewegungen von anderem Grössenverhältniss.

Diese Drehungsverhältnisse sind für einen bestimmten Muskel ebenso charakteristisch, wie beispielsweise die Stellungen des Armes, bei denen allein er der Schwere Gleichgewicht halten kann[1]). Wie letztere ein statisches, so stellen erstere ein dynamisches Charakteristicum des Muskels dar. Die Kenntniss beider ist für das Verständniss der Bedeutung und Wirkungsweise eines Muskels unerlässlich.

Das Verhältniss der kleinen, durch die Contraction eines Muskels aus der Ruhe hervorgerufenen Gelenkdrehungen, welches in Zukunft gewöhnlich kurz als »Drehungsverhältniss« bezeichnet werden soll, hängt nun nicht allein von dem Verhältniss der Drehungsmomente ab, sondern es wird auch von rein mechanischen Eigenschaften der beiden Glieder des Systems und von den Gelenkstellungen beeinflusst. So spielen vor allen Dingen die Trägheitsmomente des Systems in Bezug auf die Gelenkaxen, die Entfernungen der Hauptpunkte der beiden Glieder von den Gelenkmittelpunkten, sowie die Entfernung der Gelenkmittelpunkte von einander eine bestimmende Rolle. Es sind daher alle Schlüsse, welche man allein aus der Kenntniss der Drehungsmomente eines Muskels auf die Gelenkbewegungen des zweigliedrigen Systems ziehen würde, von vornherein als unberechtigt zu bezeichnen. Ferner geht aus der angeführten Thatsache klar hervor, dass ein Muskel in ganz anderer Weise auf ein Gelenk bewegend einwirken wird, wenn das andere Gelenk festgestellt, als wenn es vollständig frei beweglich ist; durch die Arretirung des letzteren werden nämlich sofort die in Frage kommenden Trägheitsmomente vollständig verändert. Es ist eben die Wirkung eines Muskels auf ein eingliedriges System im Allgemeinen eine ganz andere, wie die auf ein zweigliedriges. Der M. biceps brachii wirkt z. B. bei arretirtem Ellbogengelenk zweifellos beugend auf das Schultergelenk ein. Lässt man nun aber dem Ellbogengelenk freie Beweglichkeit, so stellt sich heraus (vergl. S. 536), dass für die meisten Ausgangshaltungen des Armes derselbe Muskel bei seiner Contraction

1) Vgl. die »Beiträge zur Muskelstatik. Erste Abhandlung: Über das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln am zweigliedrigen System«. Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch., math.-phys. Classe, Band XXIII, Nr. IV. 1896.

neben der Beugung des Ellbogengelenks eine Drehung des Schultergelenks in genau entgegengesetztem Sinne, also eine Streckung hervorruft. Da nun im Leben die Muskeln bei ihrer Contraction in den allermeisten Fällen freie Beweglichkeit in allen Gelenken vorfinden, so hat man also dem M. biceps brachii hauptsächlich die Bedeutung eines Streckers des Schultergelenks zuzuschreiben, trotzdem seine Sehne auf der Beugeseite dieses Gelenks über den Kopf des Humerus hinwegzieht. Daneben erfüllt er allerdings unter Umständen auch die Function eines Beugers des Schultergelenks, aber nur in den besonderen Fällen, dass entweder der Arm vor der Contraction des Muskels weit über die rechtwinklige Beugestellung des Ellbogengelenks hinaus gebeugt war, oder dass die gleichzeitige Bewegung im Ellbogengelenk durch besondere Ursachen verhindert ist. Aus diesem Beispiel, welchem noch eine grosse Anzahl ähnlicher an die Seite gestellt werden könnte, ergiebt sich wohl zur Genüge, dass alle Angaben über die Art der Gelenkbewegungen, die ein Muskel hervorbringt, nur bedingte Geltung besitzen können.

Wie schon in dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik[1]) angedeutet worden ist, lassen sich verschiedene Wege beschreiten, um das Verhältniss der Drehungen abzuleiten, welche in den beiden Gelenken eines zweigliedrigen Systems durch einen bestimmten Muskel oder durch äussere Kräfte, wie die Schwere, hervorgerufen werden.

Man kann erstens am lebenden Körper versuchen, das betreffende Gliedersystem der alleinigen Einwirkung eines Muskels, der Schwere oder anderer Kräfte zu unterwerfen. Nur muss man dafür Sorge tragen, dass sich nicht gleichzeitig mehrere Einflüsse geltend machen. Man hat demnach beispielsweise bei localer Faradisation eines bestimmten Muskels durch horizontale Lagerung des Gliedersystems die bewegende Einwirkung der Schwere auszuschliessen; oder man hat bei der Untersuchung der durch die Schwere veranlassten Gelenkbewegungen sich zu überzeugen, dass nicht gleichzeitig Muskeln durch active Contraction in die Bewegung eingreifen, was vielleicht durch Versuche an einem schlafenden Individuum bis zu einem gewissen Grade vermieden werden kann.

1) a. a. O. S. 68 ff.

Zweitens kann man die Untersuchung an einem Modell anstellen, welches den mechanischen Verhältnissen des in Frage stehenden Gliedersystems genau angepasst ist. Da die absolute Grösse der Muskelspannung, wie sich exact nachweisen lässt (vgl. Seite 511) gar keinen Einfluss auf das Verhältniss der Gelenkbewegungen ausübt, so lassen sich an einem solchen Modell die Muskeln durch ausgedehnte Gummistränge ersetzen. Wenn dieselben in gleicher Weise wie die Muskeln zwischen Punkten verschiedener Glieder ausgespannt sind, so werden sie auch mit Drehungsmomenten von demselben Verhältniss wie der Muskel auf das Gliedersystem einwirken und in Folge dessen das gleiche Verhältniss der Gelenkdrehungen hervorrufen, mag der Ablauf der Spannungen bei einem sich zusammenziehenden Gummistrange auch noch so verschieden sein von dem bei einem sich activ contrahirenden Muskel. Die in dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik beschriebenen Versuche, welche an einem derartigen Modell über die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln angestellt worden sind, bestätigen dies vollkommen.

Drittens kann man endlich die Probleme auf rein theoretischem Wege zu lösen suchen.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass der dritte Weg der einwurfsfreieste von allen ist und zu absolut sicheren Resultaten führen muss, sofern nur die für eine exacte Behandlung der Aufgaben nöthigen Unterlagen mit genügender Genauigkeit bestimmt worden sind. Es ist daher geboten, wenn irgend möglich, vor allen Dingen die Hülfsmittel der Mechanik und Mathematik zu Rathe zu ziehen und darauf erst die beiden anderen Wege zu beschreiten, um die gewonnenen Resultate durch das Experiment zu demonstriren. Man wird nur dann das Hauptgewicht auf die messende Verfolgung der Bewegungen am lebenden Körper oder am Modell zu legen haben, wenn sich der exacten Lösung eines Problems unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen.

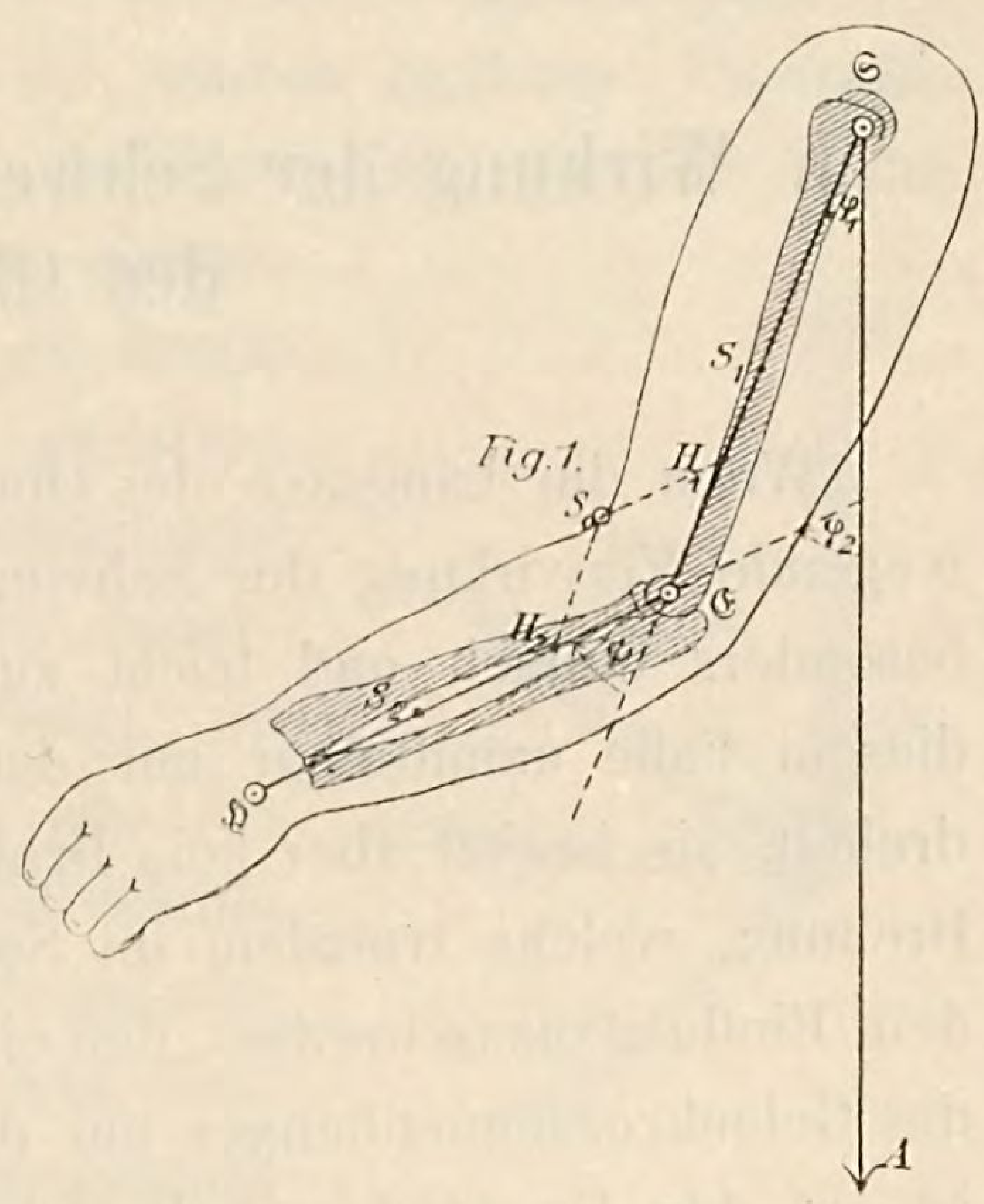
In dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik finden sich die Resultate über die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln auf alle drei Arten abgeleitet, theils um die Uebereinstimmung der Versuchsergebnisse mit den auf theoretischem Wege abgeleiteten zu erweisen, theils um einen Ueberblick über die Genauigkeit zu gewähren, welche auf den verschiedenen Wegen erreicht werden kann. Das Ueber-

gewicht des exacten Weges über die beiden anderen ist dabei unverkennbar zu Tage getreten. Ganz abgesehen von der grösseren Genauigkeit und Sicherheit der Resultate, welche die Anwendung der mechanischen und mathematischen Hülfsmittel mit sich bringt, lässt sich mit denselben die Untersuchung in viel grösserer Allgemeinheit führen. Man braucht gar nicht auf die besonderen Grössen eines bestimmten zweigliedrigen Systems Rücksicht zu nehmen, sondern kann alle Systeme derselben Art gleichzeitig behandeln, während die auf experimentellem Wege gefundenen Ergebnisse immer nur für das zum Versuch herangezogene Gliedersystem Geltung besitzen können. Wenn in den folgenden Darlegungen trotzdem zunächst wieder das specielle System des im Ellbogengelenk gegliederten Armes in Betracht gezogen wird, so geschieht dies nur im Interesse der Anschaulichkeit der Untersuchung. Bei jedem anderen System, welches den gemachten Voraussetzungen über die Beweglichkeit und mechanische Natur der das System zusammensetzenden Glieder entspricht, werden die Resultate qualitativ dieselben sein; sie werden sich nur quantitativ von den für den Arm gefundenen unterscheiden, sofern sie von den Dimensionen der Glieder und der Massenvertheilung innerhalb derselben abhängen.

Die allgemeinen Beziehungen zwischen den Gelenkbewegungen und den am zweigliedrigen System angreifenden Kräften sind schon bei der Untersuchung der eingelenkigen Muskeln aufgestellt worden. Die Ableitung des durch mehrgelenkige Muskeln, Schwere oder andere äussere Kräfte bewirkten Verhältnisses der Gelenkdrehungen könnte sich daher auf diese Beziehungen stützen. Um einen klaren Einblick in die mechanischen Vorgänge bei der Contraction mehrgelenkiger Muskeln oder der Wirkung der Schwere zu vermitteln, soll jedoch zunächst an einigen speciellen Beispielen das Zustandekommen der Gelenkbewegungen noch einmal auf möglichst anschauliche Weise erörtert werden. Da die Wirkungsweise der Schwere auf ein Körpersystem in mancher Hinsicht einfacher und durchsichtiger ist, wie die mehrgelenkiger Muskeln, so soll mit der Untersuchung der durch die Schwere hervorgebrachten Gelenkbewegungen bei bestimmten Ausgangshaltungen des Armes begonnen werden. Hat man erst die mechanischen Vorgänge in diesen besonderen Fällen klar erfasst, so ist es dann nicht schwer, auch im allgemeinsten Falle der durch

irgend welche Kräfte erzeugten Gelenkbewegungen die Erscheinungen zu verstehen.

In allen folgenden Betrachtungen sollen für das Armsystem genau dieselben Bezeichnungen verwendet werden, wie in dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik. Aus diesem Grunde mögen dieselben an der Hand der nebenstehenden Figur 1 noch einmal kurz angeführt werden.


Fig. 1.

Es bedeuten $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Mittelpunkte von Schulter-, Ellbogen- und Handgelenk; dabei ist insbesondere als Mittelpunkt des Ellbogengelenks der Punkt der Ellbogenaxe zu verstehen, an dem die durch die Einzelschwerpunkte und die Gelenkmittelpunkte $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathfrak{H}$ gezogenen Längsaxen von Ober- und Unterarm zusammentreffen. Der Mittelpunkt $\mathfrak{S}$ des Schultergelenks soll wieder im Raume fixirt angenommen sein. $S_1$ und $S_2$ seien die Schwerpunkte, $H_1$ und $H_2$ die Hauptpunkte des Oberarms und des als starr aufgefassten Systems: Unterarm plus Hand, $S_0$ der Schwerpunkt des ganzen Armes. Ferner bedeuten $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die Winkel, welche die Längsaxen des Ober- und Unterarms mit der durch den fixirten Punkt $\mathfrak{S}$ hindurchgehenden Verticalen bilden, und $\psi$ sei der Winkel zwischen der Verlängerung der Längsaxe des Oberarms und der Längsaxe des Unterarms. Für $\varphi_1$ soll wieder der Name »Drehungswinkel des Schultergelenks« und für $\psi$ der Name »Beugungswinkel des Ellbogengelenks« eingeführt sein. Ferner bedeute $m_1$ die Masse des Oberarms, $m_2$ die des starren Systems: Unterarm plus Hand und $m_0$ die Gesammtmasse des Armes, so dass also $m_0 = m_1 + m_2$ ist. Endlich sollen die in Betracht kommenden Längen wie früher in folgender Weise kurz bezeichnet sein:

$$\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{E}} = l_1\,; \quad \overline{\mathfrak{S}S_1} = r_1\,; \quad \overline{\mathfrak{S}H_1} = c_1\,; \quad \overline{\mathfrak{E}S_2} = r_2 \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{E}H_2} = c_2\,.$$

## I. Wirkung der Schwere bei verticaler Stellung des Oberarms.

Wenn die Längsaxe des Oberarms vertical steht, so ist die bewegende Einwirkung der Schwere auf Schulter- und Ellbogengelenk besonders einfach und leicht zu übersehen. Die Schwere sucht in diesem Falle unmittelbar nur den Unterarm gegen den Oberarm zu drehen, sie besitzt aber kein Drehungsmoment für den Oberarm. Die Drehung, welche trotzdem im Schultergelenk eintritt, ist dann allein dem Einfluss zuzuschreiben, den eine Bewegung des Unterarms in Folge des Gelenkzusammenhanges auf den Oberarm ausübt. Dieser Einfluss ist auf den Umstand zurückzuführen, dass der Schwerpunkt des als starr aufgefassten Systems: Unterarm plus Hand ausserhalb der Ellbogenaxe liegt. Würde dieser Schwerpunkt in die Ellbogenaxe hineinfallen, so würde sich der Unterarm gegen den Oberarm im indifferenten Gleichgewicht befinden. Da die Richtung der Ellbogenaxe zugleich die Richtung einer Hauptträgheitsaxe des starren Systems: Unterarm plus Hand darstellt[1]), so würde dann durch eine Drehung des Unterarms im Ellbogengelenk keinerlei Druck auf die Ellbogenaxe ausgeübt werden. Da nun aber der Schwerpunkt von Unterarm plus Hand ausserhalb der Ellbogenaxe fällt, so muss derselbe bei jeder Drehung um diese Axe in Bewegung gerathen. Eine jede Bewegung des Schwerpunktes verursacht aber einen Druck auf die Ellbogenaxe, dessen Richtung, wenn die Bewegung aus der Ruhe geschieht, genau entgegengesetzt der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes ist. Dieser Druck wirkt auf den Oberarm wie eine an der

---

1) Vgl. die »Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder«. Abhandl. d. Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., math.-phys. Classe, Bd. XVIII, Nr. VIII, 1892, Seite 478.

Ellbogenaxe angreifende Kraft ein. Derselbe muss also im Allgemeinen eine Drehung im Schultergelenk hervorbringen.

Befindet sich der Unterarm zwischen äusserster Streckstellung und rechtwinkliger Beugestellung, etwa in der in beifolgender Figur 2 durch I bezeichneten Stellung gegen den Oberarm, so wird bei einer kleinen durch irgend welche Kräfte verursachten Streckbewegung des Ellbogengelenks der Schwerpunkt $S_2$ des starren Systems: Unterarm plus Hand sich nach rechts unten bewegen (wie es der kleine Pfeil bei $S_2$ andeutet). In Folge dessen wird auf den Oberarm im Punkte 𝔊 ein Druck ausgeübt, welcher nach links oben gerichtet ist, wie der in Figur 2 mit I bezeichnete Pfeil andeutet. Dieser Druck wird aber seinerseits eine Beugung (Vorwärtsdrehung) im Schultergelenk verursachen, so dass also bei der Ausgangshaltung I des Armes eine Streckung des Ellbogengelenks Beugung des Schultergelenks nach sich zieht. Es ist leicht einzusehen, dass umgekehrt eine Beugung des Ellbogengelenks Streckung (Rückwärtsdrehung) des Schultergelenks zur Folge haben wird, wenn der Unterarm vor der Gelenkbewegung sich zwischen äusserster Streckstellung und rechtwinkliger Beugestellung befand.

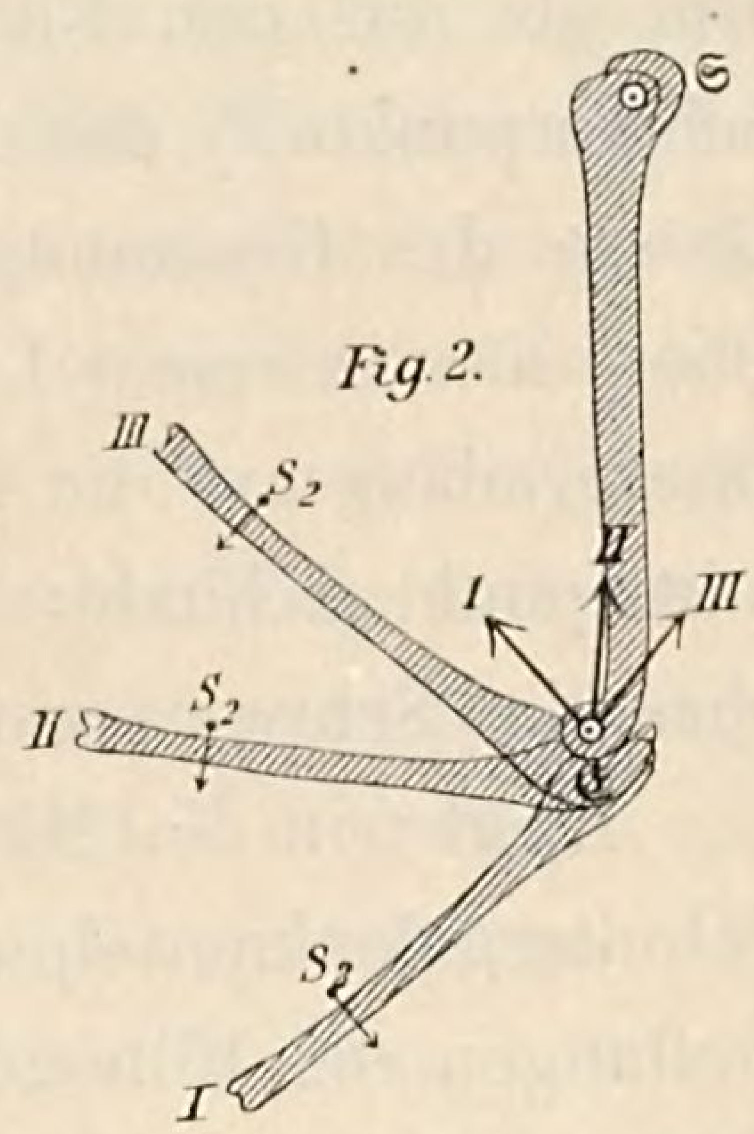


Fig. 2.

War dagegen der Unterarm beim Eintritt der Bewegung im Ellbogengelenk rechtwinklig gebeugt, wie es durch die mit II bezeichnete Haltung in Figur 2 angedeutet ist, so wird sowohl bei Streckung als auch bei Beugung des Ellbogengelenks auf den Oberarm ein Druck in verticaler Richtung, in einem Falle nach oben, im anderen Falle nach unten, ausgeübt werden. Da die Längsaxe des Oberarms selbst vertical stehen soll, so ist offenbar, dass dieser Druck das Schultergelenk nicht bewegen kann.

Befindet sich endlich der Unterarm vor der Gelenkbewegung zwischen rechtwinkliger und äusserster Beugestellung (Haltung III in Figur 2), so wird bei Streckung des Ellbogengelenks der Schwerpunkt $S_2$ sich nach links unten bewegen und in Folge dessen der Oberarm im Punkte 𝔊 in der Richtung nach rechts oben gedrückt werden. Daher wird jetzt gleichzeitig Streckung im Schultergelenk eintreten. Umgekehrt wird eine kleine Beugung des Ellbogengelenks aus der

Haltung III des Armes von Beugung des Schultergelenks begleitet sein. Es stellt sich also heraus, dass die Art der Drehung des Schultergelenks, welche durch eine Drehung des Ellbogengelenks verursacht wird, je nach der Ausgangshaltung des Armes verschieden ist; sie ist eine Function des Beugungswinkels $\psi$ des Ellbogengelenks.

Ist die Längsaxe des Oberarms vertical gerichtet, so sucht, wie schon oben auseinander gesetzt wurde, die Schwere direct nur den Unterarm zu drehen. Sie wirkt ja bekanntlich sowohl auf den Oberarm als auf den Unterarm wie eine einzige im Hauptpunkte (nicht Schwerpunkte)[1]) des betreffenden Gliedes angreifende Kraft von der Grösse des Gesammtgewichtes des Armes. Da der Hauptpunkt des Oberarmes in seiner Längsaxe liegt, so wird bei verticaler Richtung der Oberarmlängsaxe die Richtung dieser Kraft durch den Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ hindurchgehen, so dass das Drehungsmoment $D_1$, welches die Schwere auf den Oberarm ausübt, den Werth Null besitzt.

Liegt nun der Mittelpunkt des Ellbogengelenks vertical unter dem Schultergelenkmittelpunkt, so wird die Schwere von allen Beugestellungen des Ellbogengelenks aus den Unterarm strecken. In Folge dessen wird sie nach den obigen Auseinandersetzungen bei dieser bestimmten Haltung des Oberarms das Schultergelenk beugen oder strecken, je nachdem der Unterarm sich zwischen äusserster Streckstellung und rechtwinkliger Beugestellung oder zwischen letzterer und äusserster Beugestellung befindet. Davon kann man sich leicht an seinem eigenen Körper überzeugen. Man halte bei vertical nach unten hängendem Oberarm den Unterarm in einer schwachen Beugestellung des Ellbogengelenks fest; lässt man nun ohne willkürliche Contraction von Muskeln den Unterarm nach unten fallen, so wird man finden, dass dabei gleichzeitig das untere Ende des Oberarms etwas nach vorn rückt, also das Schultergelenk gebeugt wird. Diese Drehung im Schultergelenk ist so zwingend, dass es erst bei einiger Uebung gelingt, dieselbe durch willkürliche Muskelcontraction zu unterdrücken. Man bringe ferner den Unterarm bei vertical nach unten hängendem Oberarm in die rechtwinklige Beugestellung und lasse ihn dann fallen, so wird man finden, dass ganz im Anfang der Streckbewegung des Ellbogengelenks im Schultergelenk keine Drehung eintritt. Sobald

---

1) Vgl. Beiträge zur Muskelstatik I, Seite 286 und 289.

aber der Unterarm sich merklich von der rechtwinkligen Beugestellung entfernt hat, stellt sich dagegen Beugung im Schultergelenk ein, wie nach dem eben Gesagten ohne Weiteres verständlich ist. Endlich lässt sich auch leicht constatiren, dass von einer sehr starken Beugestellung des Ellbogengelenks aus die Schwere anfangs das Schultergelenk streckt.

Giebt man dem Arm eine solche Haltung, dass sich der Ellbogengelenkmittelpunkt vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte befindet, was sich am bequemsten bei horizontaler Lage des ganzen Körpers erreichen lässt, so wird man finden, dass die Schwere bei den verschiedenen Ausgangsstellungen des Unterarms jetzt genau die entgegengesetzten Drehungen im Schultergelenk hervorruft. Sie wird das Schultergelenk strecken oder beugen, je nachdem sich der Unterarm gegen den Oberarm zwischen äusserster Streckstellung und rechtwinkliger Beugestellung oder zwischen letzterer und äusserster Beugestellung befindet. Auch dies ist leicht zu verstehen, wenn man beachtet, dass die Schwere nunmehr in allen Beugestellungen des Ellbogengelenks den Unterarm gegen den Oberarm zu beugen strebt.

Die Einwirkung der Schwere auf die beiden Abschnitte des Armes ist in den bisher betrachteten Fällen insofern eine besondere, als das Drehungsmoment $D_1$, mit welchem dieselbe auf den Oberarm allein einwirkt, in Folge der verticalen Stellung der Oberarmlängsaxe den Werth Null besitzt, während das auf den Unterarm ausgeübte Drehungsmoment $D_2$ nur in der äussersten Streckstellung des Ellbogengelenks gleich Null, sonst aber von Null verschieden ist. Es sucht also die Schwere hierbei unmittelbar nur den Unterarm zu drehen; die gleichzeitige Drehung des Oberarms resultirt ausschliesslich aus dem Drucke auf das Ellbogenende des Oberarms, welchen die Drehung des Unterarms hervorruft, sie hat aber nicht ihre Ursache in einer directen Kraftwirkung der Schwere auf den Oberarm. Dies ist wohl im Auge zu behalten. Da $D_1 = 0$ ist, so wird in diesen Fällen das Verhältniss $D_1 : D_2$ der beiden Drehungsmomente mit einer einzigen Ausnahme selbst gleich Null. Zieht man an Stelle von $D_1$ das Drehungsmoment $D_0$ in Betracht, mit welchem die Schwere auf den ganzen Arm einwirken würde, wenn das Ellbogengelenk in der betreffenden Beugestellung arretirt wäre und nur dem Schultergelenk Beweglichkeit zukäme, so erkennt man nach den in dem ersten Beitrage zur

Muskelstatik niedergelegten Entwickelungen leicht, dass bei verticaler Stellung der Oberarmlängsaxe der Wert von $D_0$ mit dem von $D_2$ übereinstimmt. Es werden daher die bis jetzt in Betracht gezogenen Fälle der Einwirkung der Schwere auf den Oberarm auch dadurch charakterisirt sein, dass das Verhältniss $D_0 : D_2$ den Werth $+ 1$ besitzt.

Der specielle Fall, dass $\frac{D_1}{D_2} = 0$ oder $\frac{D_0}{D_2} = + 1$ ist, kann nun auch unter Umständen bei einem Muskel eintreten, nämlich wenn derselbe ebenfalls unmittelbar nur den Unterarm zu drehen strebt, so dass $D_1 = 0$ oder $D_0 = D_2$ ist. Dies ist jedoch nur bei einem solchen Muskel möglich, dessen Ansatz sich am Unterarm befindet und dessen Ursprung ausserhalb des Armes liegt; denn für die zwischen Oberarm und Unterarm sich erstreckenden (eingelenkigen) Muskeln[1]) ist durchweg $\frac{D_1}{D_2} = - 1$ oder $\frac{D_0}{D_2} = 0$, und die am Oberarm ansetzenden Muskeln[2]) sind durch $\frac{D_1}{D_2} = \infty$ oder $\frac{D_0}{D_2} = \infty$, bezüglich $\frac{D_2}{D_1} = 0$ oder $\frac{D_2}{D_0} = 0$ charakterisirt. Für den langen Kopf des M. biceps brachii[3]) ist nun z. B. $\frac{D_0}{D_2} = + 1$ für alle die Haltungen des Armes, in denen der Unterarm gegen den Oberarm um $33^0$ gegenüber der äussersten Streckstellung des Ellbogengelenks gebeugt ist ($\psi = 33^0$), gleichgültig welche Grösse der Drehungswinkel ($\varphi_1$) des Schultergelenks besitzt. Da der M. biceps brachii in allen Haltungen des Armes das Ellbogengelenk beugt, so wird die Wirkung desselben auf das Schultergelenk bei der $\psi = 33^0$ entsprechenden Beugestellung des Ellbogengelenks mit derjenigen übereinstimmen, welche die Schwere bei vertical nach oben gerichteter Oberarmlängsaxe und gleicher Beugestellung im Ellbogengelenk ausübt. Es muss also nach den obigen Auseinandersetzungen das Schultergelenk in diesem besonderen Falle gestreckt werden, trotzdem die Sehne des Muskels auf der Beugeseite über den Humeruskopf hinwegzieht. Wie sich die drehende Einwirkung dieses Muskels auf das Schultergelenk bei anderen Haltungen des Armes gestaltet, wird weiter unten (Seite 534 ff.) abgeleitet werden.

---

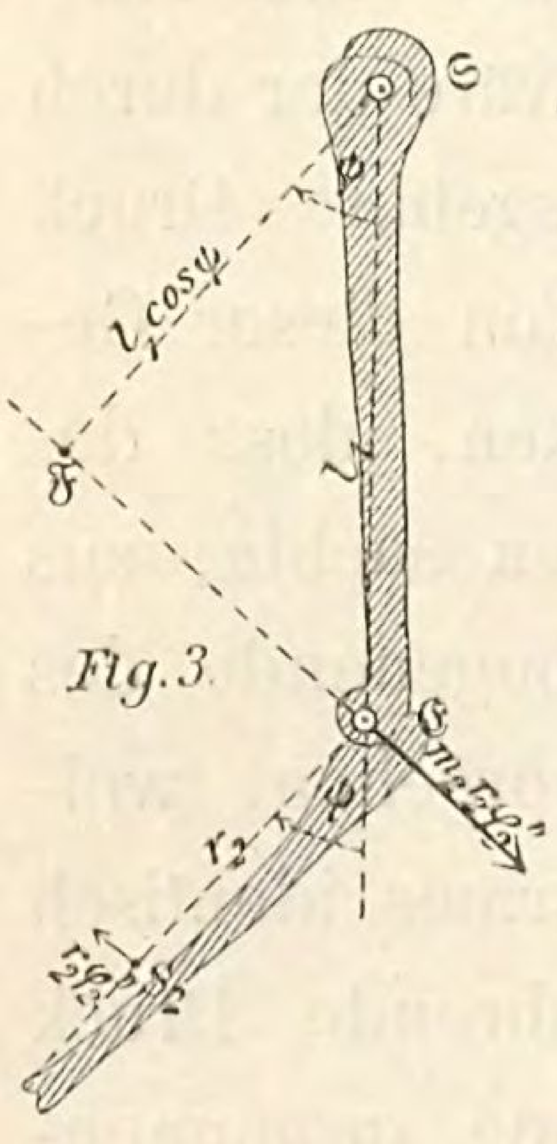
1) Beiträge zur Muskelstatik I, Seite 292, 308, 311 und 314.
2) Ebendaselbst Seite 290, 308, 311 und 314.
3) Vgl. ebendaselbst die Tabelle auf Seite 363.

Die bisherigen Resultate über die Art der Gelenkbewegungen in speciellen Fällen waren allein aus der Thatsache gewonnen, dass eine jede Drehung des Unterarms aus der Ruhe Veranlassung zu einer Druckwirkung auf das Ellbogenende des Oberarms giebt, deren Richtung der Richtung der zum Oberarm relativen Bewegung des Schwerpunktes $S_2$ von Unterarm plus Hand entgegengesetzt ist. Um nun auch die Grösse der Drehung im Schultergelenk oder wenigstens das Verhältniss dieser Gelenkdrehung zu der Drehung im Ellbogengelenk festzustellen, genügt es nicht, allein die Richtung der auf den Oberarm einwirkenden Druckkraft zu kennen, sondern man muss auch deren Grösse bestimmen. Wie in dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik[1]) ausführlich auseinandergesetzt worden ist, hängt dieselbe erstens von der linearen Beschleunigung ab, welche der Schwerpunkt $S_2$ des starren Systems: Unterarm plus Hand relativ zum Oberarm durch die auf den Unterarm einwirkenden Kräfte erfährt, und zweitens von der Masse $m_2$ von Unterarm plus Hand; und zwar ist die Drukkraft beiden Grössen proportional. Setzt man voraus, dass das Gliedersystem aus der Ruhe bewegt werde, so kann der Schwerpunkt $S_2$ unter der Einwirkung der Schwere oder der Muskelcontraction zunächst nur eine beschleunigte Bewegung annehmen. Würde dagegen der Schwerpunkt $S_2$ im Moment der Contraction eines Muskels schon eine gewisse Geschwindigkeit besitzen, so wäre der durch die Bewegung des Unterarms auf den Oberarm ausgeübte Druck ausser von der erzielten Beschleunigung auch noch von dieser Geschwindigkeit abhängig. Die letztere würde bewirken, dass der Schwerpunkt $S_2$ sich von der Ellbogenaxe zu entfernen suchte; aus diesem Bestreben würde dann ein Zug an dem Ellbogenende des Oberarms in der Richtung der Unterarmlängsaxe hervorgehen, welcher mit der Centrifugalkraft des sich drehenden Unterarmes identisch ist. Der aus der Schwerpunktsbeschleunigung herrührende Druck würde sich mit dieser Centrifugalkraft zu einer Resultante zusammensetzen, deren Richtung nicht mehr zu der Richtung der Bewegung des Schwerpunktes entgegengesetzt wäre, so dass also die bisherigen Resultate eine wesentliche Modification erfahren müssten. Es soll daher vorläufig immer nur der Fall in's Auge gefasst werden, dass

1) a. a. O. Seite 150 ff.

irgend welche Muskeln oder äussere Kräfte, wie die Schwere, das bisher in irgend welcher Haltung in Ruhe befindliche zweigliedrige System in Bewegung setzen, und die Untersuchung der Einwirkung dieser Kräfte auf ein schon bewegtes System für später vorbehalten werden. Wenn man in der Anatomie oder Physiologie von den Gelenkbewegungen redet, welche ein Muskel hervorbringt, so denkt man so wie so wohl immer nur an die Einwirkung des Muskels auf ein ruhendes Gliedersystem, wenn man nicht etwa stillschweigend der durchaus falschen Annahme huldigt, dass der Muskel auf das schon bewegte System genau so einwirkt wie auf das ruhende.

Die lineare Beschleunigung des Schwerpunktes $S_2$ von Unterarm plus Hand relativ zum Ellbogengelenkmittelpunkt hängt von seiner Entfernung $r_2$ von der Ellbogenaxe ab. Sie ist $r_2$-mal so gross als die lineare Beschleunigung eines Punktes im Unterarm, welcher von der Ellbogenaxe die Entfernung 1 besitzt, eine Grösse, welche man auch kurz die Winkelbeschleunigung der Drehung des Unterarmes nennt. Bezeichnet man die letztere mit $\varphi_2''$, so ist demnach die lineare Beschleunigung des Schwerpunktes $S_2$ gleich $r_2\varphi_2''$. Da nun die auf den Oberarm ausgeübte Druckkraft sowohl dieser Grösse als der Masse $m_2$ vom starren System: Unterarm plus Hand proportional ist, so wird dieselbe durch $m_2 r_2 \varphi_2''$ gemessen. Rechnet man die Winkelbeschleunigung $\varphi_2''$ positiv, wenn sie in nebenstehender Figur 3 einer Drehung des Unterarms im Sinne des Uhrzeigers entspricht, so sucht bei der in Figur 3 dargestellten Haltung des Armes die Druckkraft den Oberarm im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen. Rechnet man auch die dem Oberarm durch irgend welche Kräfte ertheilte Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ positiv, wenn die Drehung in der Figur 3 im Sinne des Uhrzeigers vor sich geht, so erkennt man aus der Figur leicht, dass die Druckkraft $m_2 r_2 \varphi_2''$ dem Oberarm eine negative Winkelbeschleunigung zu ertheilen strebt; ihr Drehungsmoment ist daher negativ zu rechnen. Das Drehungsmoment, mit welchem die Druckkraft auf den Oberarm einwirkt, wird gemessen durch das Product aus ihrer Intensität und der Entfernung des


Fig. 3.

Schultergelenkmittelpunktes 𝔖 von ihrer Richtung. Das Loth 𝔖𝔉 von 𝔖 auf die Richtung der Druckkraft, welches diese Entfernung angiebt, läuft nun parallel der Unterarmlängsaxe, da sowohl die zu 𝔈 relative lineare Beschleunigung von $S_2$ als auch die Druckkraft senkrecht zu der Längsaxe des Unterarms gerichtet sind. Es muss daher in dem rechtwinkligen Dreieck 𝔖𝔈𝔉 der Winkel an der Ecke 𝔖 gleich dem Winkel $\psi$ sein, welchen die Unterarmlängsaxe mit der Verlängerung der Oberarmlängsaxe bildet, und der wie bisher immer als Beugungswinkel des Ellbogengelenks bezeichnet sein soll. Ist $l_1$ die Entfernung der Mittelpunkte des Schulter- und Ellbogengelenks, welche immer kurz als »Länge des Oberarms« bezeichnet worden ist, so erhält man für das Loth 𝔖𝔉 die Länge $l_1 \cos\psi$. Es ergiebt sich daher bei der durch Figur 3 dargestellten Haltung des Armes für das Drehungsmoment, mit welchem der Unterarm bei einer Drehung mit der Winkelbeschleunigung $\varphi_2''$ auf den Oberarm einwirkt, die Grösse:

$$-m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot l_1 \cos\psi .$$

Dieser Ausdruck, welcher zunächst für die specielle durch Figur 3 veranschaulichte Haltung des Armes abgeleitet ist, gilt auch für alle anderen Haltungen. Insbesondere nimmt derselbe bei der rechtwinkligen Beugestellung im Ellbogengelenk den Werth Null an, weil für dieselbe $\psi = 90^0$ und in Folge dessen $\cos\psi = 0$ wird. Ist der Unterarm über die zum Oberarm rechtwinklige Stellung hinaus gebeugt, so wird $\psi$ grösser als $90^0$; dann nimmt aber $\cos\psi$ einen negativen Werth an, wodurch ein positiver Werth des Drehungsmomentes bedingt wird. Dies heisst aber nichts anderes, als dass zwischen der rechtwinkligen und der äussersten Beugestellung im Ellbogengelenk der Unterarm durch seine eigene Winkelbeschleunigung dem Oberarm eine positive Winkelbeschleunigung ertheilt. Es wird also eine Beugung im Ellbogengelenk in diesem Falle auch eine Beugung im Schultergelenk nach sich ziehen, wie schon oben auseinandergesetzt worden ist. Eine negative Winkelbeschleunigung des Unterarms, welche einer Streckbewegung im Ellbogengelenk entspricht, wird dann auch umgekehrt eine negative Winkelbeschleunigung im Schultergelenk, also ebenfalls eine Streckbewegung verursachen.

Die Winkelbeschleunigung des Oberarms wird nun in ihrer

Grösse noch in anderer Weise von dem starren System: Unterarm plus Hand beeinflusst. In Folge des Gelenkzusammenhanges beider Abschnitte des Armes müssen Unterarm und Hand an jeder Bewegung des Oberarms um den festen Schultergürtel theilnehmen. Zu diesem Zwecke muss der Oberarm mit seinem Ellbogenende einen Druck oder Zug in der Richtung der Bewegung des Ellbogengelenkmittelpunktes auf den Unterarm ausüben. In Folge der Gleichheit von Action und Reaction wird aber dann seinerseits der Unterarm auf das Ellbogenende des Oberarms einen gleich grossen Zug oder Druck in entgegengesetzter Richtung ausüben. Diese Zug- oder Druckkraft kann die Art der Gelenkbewegung im Schultergelenk nicht ändern, da sie erst durch diese entsteht, sie wird dieselbe aber in ihrer Grösse beeinträchtigen. Nachdem einer Drehung des Unterarms im Raume um die Ellbogenaxe, d. h. einer Richtungsänderung seiner Längsaxe schon in der auf das Ellbogenende des Oberarms einwirkenden Druckkraft Rechnung getragen ist, handelt es sich bei der Bestimmung dieses Zuges oder Druckes nur noch um die Parallelbewegung, welche das starre System: Unterarm plus Hand gemeinsam mit der Axe des Ellbogengelenks ausführt. Ein jeder Punkt der Ellbogenaxe erfährt durch die Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ des Oberarms die lineare Beschleunigung $l_1 \varphi_1''$ gegen den als feststehend angenommenen Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$. Dieselbe lineare Beschleunigung muss nun dem starren System: Unterarm plus Hand durch den Oberarm ertheilt werden, wenn der Zusammenhang im Ellbogengelenk nicht gelöst werden soll. Hierzu ist aber eine Kraft von der Grösse $m_2 l_1 \varphi_1''$ erforderlich. Mit derselben Kraft muss daher der Unterarm rückwärts auf den Oberarm drücken oder an demselben ziehen. Da die Richtung dieses Zuges oder Druckes immer senkrecht zur Längsaxe des Oberarms steht, so ist die Entfernung derselben vom Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ gleich $l_1$. Da ferner die Kraft die Winkelbeschleunigung des Oberarms zu verkleinern strebt, so ist das Drehungsmoment, mit welchem dieselbe auf den Oberarm einwirkt, negativ zu rechnen. Man hat daher für dieses Drehungsmoment die Grösse

$$- m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot l_1 .$$

Die Gesammteinwirkung des Unterarms auf die Bewegungen des Oberarms in Folge der Verbindung beider durch das Ellbogengelenk wird daher durch die Summe beider Drehungsmomente:

$$- m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot l_1 \cos\psi - m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot l_1$$

dargestellt.

Die Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ des Oberarms hängt nun bekanntlich nicht allein von den Drehungsmomenten ab, welche auf denselben einwirken, sondern sie richtet sich auch nach der Massenvertheilung im Innern desselben. Die letztere kommt jedoch nur insofern in Betracht, als sie auf die Grösse des Trägheitsmoments des Oberarms in Bezug auf die Drehungsaxe im Schultergelenk von Einfluss ist. Bezeichnet man mit $\varkappa_1$ den Trägheitsradius des Oberarms[1]) in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt des Oberarms, mit $r_1$ die Entfernung dieses Punktes vom Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ und mit $m_1$ die Masse des Oberarms, so ist die Grösse des Trägheitsmoments des Oberarms in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe im Schultergelenk:

$$m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2)\,.$$

Die Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ des Oberarms ist nun direct proportional der Summe der Drehungsmomente, dagegen umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment, so dass man hat

$$\varphi_1'' = \frac{- m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot l_1 \cos\psi - m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot l_1}{m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2)}\,.$$

Hieraus kann dann leicht der Werth für das Verhältniss der beiden Gelenkdrehungen abgeleitet werden. Multiplicirt man die Relation mit dem Nenner $m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2)$ und bringt darauf das zweite Glied auf der rechten Seite auf die linke, so erhält man zunächst

$$[m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2]\varphi_1'' = - m_2 r_2 l_1 \cos\psi \cdot \varphi_2''\,.$$

Die Ausdrücke auf beiden Seiten lassen sich nun auf einfachere Formen bringen, aus denen einerseits die mechanische Bedeutung der einzelnen Grössen besser zu erkennen ist, und welche andererseits nur die Grössen enthalten, die allein das Verhältniss der Gelenkdrehungen bestimmen.

Der in Klammer stehende Ausdruck auf der linken Seite stellt

1) Ueber die Bedeutung des Trägheitsradius vergl. die »Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder«. Abhandl. der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., math.-phys. Classe, Bd. XVIII, Nr. VIII, 1892, Seite 418.

das um $m_2 l_1^2$ vergrösserte Trägheitsmoment des Oberarms in Bezug auf die Drehungsaxe im Schultergelenk dar. Um den gleichen Betrag würde dieses Trägheitsmoment vergrössert sein, wenn man in der Ellbogenaxe oder in dem als »Mittelpunkt des Ellbogengelenks« eingeführten Schnittpunkt der Ellbogenaxe mit der Längsaxe des Oberarms die Masse $m_2$ des starren Systems: Unterarm plus Hand concentrirt annähme. Da das Zusatzglied $m_2 l_1^2$ das Maass für die Einwirkung des am Oberarm hängenden Unterarms auf die Drehungen des Oberarms darstellt, wenn man von der eignen Winkelbeschleunigung des Unterarms absieht, so erkennt man hieraus, dass der mechanische Effect des Zusammenhanges beider Abschnitte des Armes unter anderen in einer Vergrösserung des Trägheitsmomentes des Oberarms besteht. Für das starre Massensystem, welches aus dem Oberarm durch Hinzufügen der Masse $m_2$ von Unterarm und Hand im Ellbogengelenkmittelpunkte entsteht, ist in dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik der Name »reducirtes Oberarmsystem«[1]) eingeführt. Bezeichnet man den Trägheitsradius des reducirten Oberarmsystems in Bezug auf die zur Ellbogenaxe parallele Axe des Schultergelenks mit $\lambda_1$ und beachtet, dass die Masse dieses starren Systems gleich der Gesammtmasse $m_0$ des ganzen Armes ist, so kann man für die Summe $m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2$ den einfacheren Ausdruck $m_0 \lambda_1^2$ einführen. Hierbei ist nicht nur die Gesammtmasse $m_0$, sondern auch der Trägheitsradius $\lambda_1$ eine constante Grösse, welche in keiner Weise durch die Stellungen in den beiden Gelenken beeinflusst wird.

Das Product $m_2 r_2$ auf der rechten Seite lässt sich ebenfalls in anderer Form schreiben. Denkt man sich im Mittelpunkt des Ellbogengelenks einmal die Masse des Oberarms concentrirt und dem Unterarm hinzugefügt, so erhält man wiederum ein starres Massensystem von der Grösse der Gesammtmasse $m_0$ des ganzen Armes; für dieses ist schon früher der Name »reducirtes Unterarmsystem«[2]) eingeführt worden. Der Schwerpunkt dieses Massensystems liegt auf der Längsaxe des Unterarms zwischen dem Ellbogengelenkmittelpunkt und dem Schwerpunkt des starren Systems: Unterarm plus Hand und theilt die Entfernung dieser beiden Punkte im um-

1) a. a. O. Seite 111. 2) a. a. O. Seite 112.

gekehrten Verhältniss der Massen $m_1$ und $m_2$ von Oberarm und Unterarm plus Hand. Dieser feste Punkt im Unterarm ist der »Hauptpunkt $H_2$ des Unterarms«. Bezeichnet man die Entfernung des letzteren vom Ellbogengelenkmittelpunkt (Hauptstrecke) mit $c_2$, so erkennt man leicht[1]), dass

$$m_2 r_2 = m_0 c_2$$

ist. Es lässt sich daher die obige Relation in der Form schreiben:

$$m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' = - m_0 c_2 l_1 \cos \psi \cdot \varphi_2'' .$$

Man erkennt hieraus, dass das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen von Oberarm und Unterarm direct weder von den Einzelmassen der beiden Abschnitte, noch von der Gesammtmasse des Armes abhängt, denn die Grösse $m_0$ hebt sich auf beiden Seiten fort. Die Massen sind nur insofern bestimmend für das Drehungsverhältniss, als sie die Längen des Trägheitsradius $\lambda_1$ und der Hauptstrecke $c_2$ beeinflussen.

Aus der Form dieser Beziehung geht ferner hervor, dass der zuerst in Betracht gezogene Druck, welchen der Unterarm in Folge seiner Winkelbeschleunigung $\varphi_2''$ auf das Ellbogenende ausübt, allein für die Art der Drehung des Oberarms massgebend ist, während die noch ausserdem vorhandene Einwirkung des Unterarms auf die Drehungen des Oberarms nur in der Vergrösserung des Trägheitsmomentes zur Erscheinung kommt. Hierin liegt die Berechtigung, die letztere ausser Betracht zu lassen, wenn man sich nur über die Art der Drehung im Schultergelenk, d. h. also darüber, ob Beugung oder Streckung des Schultergelenks eintritt, unterrichten will.

Die obige Beziehung berücksichtigt zunächst die Winkelbeschleunigungen $\varphi_1''$ und $\varphi_2''$, welche Ober- und Unterarm bei ihrer Drehung im Raume, oder mit anderen Worten bei ihrer Drehung relativ zum festgestellten Schultergürtel erfahren. Nun ist zwar $\varphi_1''$ identisch mit der Winkelbeschleunigung im Schultergelenk, weil ja die Drehung im Schultergelenk nichts anderes ist als die relative Drehung des Oberarms gegen den Rumpf bei festgestelltem Schultergürtel. Dagegen drückt $\varphi_2''$ keineswegs die Winkelbeschleunigung im Ellbogengelenk aus. Dies ist leicht einzusehen. Würde man beispielsweise das

1) a. a. O. Seite 133.

Ellbogengelenk in irgend einer Stellung arretiren und dann dem ganzen Arm eine Drehung im Schultergelenk von der Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ ertheilen, so würde zwar die Winkelbeschleunigung der Drehung im Ellbogengelenk gleich Null sein, dagegen besässe der Unterarm relativ zum Rumpf dieselbe Winkelbeschleunigung wie der Oberarm; es wäre also $\varphi_2'' = \varphi_1''$ und keineswegs gleich Null. Würde dagegen der Unterarm bei einer Drehung des Oberarms im Schultergelenk die Richtung seiner Längsaxe im Raume, d. h. hier relativ zum Rumpf beibehalten, so würde jetzt umgedreht die Winkelbeschleunigung des Unterarms relativ zum Rumpf den Werth Null besitzen, dagegen wäre eine solche Bewegung des Armes nur möglich bei gleichzeitiger Aenderung der Stellung des Ellbogengelenks. Es ist nicht schwer, einzusehen, dass der Unterarm in diesem Falle um ebenso viel im Ellbogengelenk gebeugt werden muss, als der Oberarm im Schultergelenk gestreckt wird und umgekehrt. Die Winkelbeschleunigung im Ellbogengelenk wäre also dabei entgegengesetzt gleich derjenigen im Schultergelenk. Allgemein ist die Winkelbeschleunigung im Ellbogengelenk um die Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ der Drehung des Oberarms kleiner als die Winkelbeschleunigung $\varphi_2''$ des Unterarms relativ zum Rumpf. Bezeichnet man die Winkelbeschleunigung im Ellbogengelenk mit $\psi''$, so ist also

$$\psi'' = \varphi_2'' - \varphi_1'' .$$

Man hat daher zur Bestimmung des Verhältnisses der Gelenkdrehungen in der obigen Beziehung $\varphi_2''$ durch $\psi'' + \varphi_1''$ zu ersetzen und erhält dann

$$m_0 \lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' = - m_0 c_2 l_1 \cos\psi\,(\psi'' + \varphi_1'') .$$

Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres für das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen $\varphi_1''$ und $\psi''$ im Schulter- und Ellbogengelenk der Werth:

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = - \frac{l_1 c_2 \cos\psi}{\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi} .$$

Die in einer sehr kleinen Zeit aus einer ruhenden Haltung des ganzen Armes bewirkten Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk sind nun direct proportional den Winkelbeschleunigungen in

diesen Gelenken, daher drückt dieses Verhältniss zugleich das Verhältniss der in einer sehr kleinen Zeit ausgeführten Gelenkdrehungen aus.

Da $l_1$, $c_2$ und $\lambda_1$ ihrer Natur nach positive Grössen darstellen und $\cos\psi$ positiv ist, wenn $\psi$ zwischen $0^0$ und $90^0$ liegt, dagegen negativ, wenn $\psi$ grösser wie $90^0$ ist, und da ferner, wie sich später zeigen wird, beim Arm $\lambda_1^2 > l_1 c_2$ ist, so nimmt das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen und damit das Verhältniss der in einer kleinen Zeit beschriebenen Drehungswinkel einen negativen Werth an, so lange $0^0 < \psi < 90^0$, dagegen einen positiven für $\psi > 90^0$. Damit ist der exacte Beweis erbracht, dass in dem zunächst untersuchten Falle, wo nur auf den Unterarm von Muskelkräften oder äusseren Kräften direct drehend eingewirkt wird ($D_1 = 0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $D_0 = D_2$), eine Beugung des Ellbogengelenks aus der Ruhe von einer Streckung oder Beugung des Schultergelenks begleitet wird, je nachdem in der Ausgangshaltung des Armes der Unterarm noch nicht bis zur rechtwinkligen Beugestellung des Ellbogengelenks oder über dieselbe hinaus gedreht war, und dass umgekehrt eine Streckung des Ellbogengelenks in dem einen Falle eine Beugung in dem anderen eine Streckung des Schultergelenks nach sich ziehen muss.

Die drei Längen $l_1$, $c_2$ und $\lambda_1$, welche das Drehungsverhältniss bestimmen, besassen an dem schon im ersten Beitrag zur Muskeldynamik in Betracht gezogenen Präparat die folgenden Werthe[1]):

$$l_1 = 30{,}3 \text{ cm}; \qquad c_2 = 9{,}16 \text{ cm} \qquad \text{und} \qquad \lambda_1 = 24{,}11 \text{ cm}.$$

Setzt man dieselben in die obige Relation ein, so erhält man für das Verhältniss der Gelenkbewegungen:

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = -\frac{277{,}5 \cos\psi}{581{,}2 + 277{,}5 \cos\psi} = -\frac{\cos\psi}{2{,}095 + \cos\psi}.$$

Mit Hülfe dieser Formel ist für verschiedene um $10^0$ auseinander liegende Werthe des Beugungswinkels $\psi$ des Ellbogengelenks der Werth des Drehungsverhältnisses berechnet worden. Die Resultate dieser Rechnung finden sich in der folgenden Tabelle niedergelegt, welche für alle Fälle gilt, in denen $\frac{D_1}{D_2} = 0$ oder $\frac{D_0}{D_2} = +1$ ist.

1) a. a. O. Seite 132 und 135.

$\frac{D_1}{D_2} = 0$, resp. $\frac{D_0}{D_2} = +1$.

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ | −0,32 | −0,32 | −0,31 | −0,29 | −0,27 | −0,24 | −0,19 | −0,14 | −0,08 | 0 | +0,09 | +0,20 | +0,31 | +0,44 | +0,57 | +0,70 |

Das Diagramm, welches die Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses vom Beugungswinkel des Ellbogengelenks in diesem besonderen Falle veranschaulicht, befindet sich unter den Curven auf Tafel III (deren Bedeutung später erläutert werden soll); auf der rechten Seite der Tafel III ist es die mit $+1$ (entsprechend $\frac{D_0}{D_2} = +1$) und auf der linken Seite die in der Mitte gelegene mit 0 (entsprechend $\frac{D_1}{D_2} = 0$) bezeichnete Curve.

Die obige Tabelle entspricht der Tabelle auf Seite 174 des ersten Beitrags zur Muskeldynamik, welche die Werthe des Drehungsverhältnisses für die eingelenkigen Muskeln enthält. Sie sagt also z. B. aus, dass wenn die Schwere bei vertical nach unten hängendem Oberarm und 50° Beugungswinkel des Ellbogengelenks in einer gewissen Zeit eine Streckung des Ellbogengelenks von 1° bewirkt, das Schultergelenk gleichzeitig 0°,24 oder 0° 14′ gebeugt wird. Wird dagegen aus der äussersten Beugestellung im Ellbogengelenk ($\psi = 150°$) eine Streckung des Ellbogengelenks von 1° durch die Schwere bei vertical nach unten hängendem Oberarm hervorgerufen, so wird, wie die Tabelle ergiebt, im Schultergelenk gleichzeitig Streckung von 0°,70 oder 0° 42′ eintreten. Wenn dagegen der Oberarm vertical nach oben gestellt ist, so wird z. B. bei 30° Beugungswinkel des Ellbogengelenks eine Beugung des Ellbogengelenks von 1° durch die Schwere von einer Streckung des Schultergelenks um 0°,29 oder 0° 17′ begleitet sein u. s. f.

Es ist hierbei immer nur ein kleines Stück der Gelenkbewegung (1° Drehung im Ellbogengelenk) in's Auge gefasst worden, weil bei merklicher Aenderung der Gelenkstellungen auch das Drehungsverhältniss sich geändert hätte. Will man dagegen eine deutlichere Anschauung von der Wirkungsweise der Schwere für die verschiedenen hier zunächst nur in Betracht kommenden Haltungen des Armes

haben, so braucht man ja nur anzunehmen, dass das Drehungsverhältniss während einer längeren Zeit constant bliebe. Nicht anders verfährt man, wenn man sich beispielsweise von der Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung, etwa der des freien Falles, eine Anschauung verschaffen will; man nimmt dabei an, dass die Geschwindigkeit von dem bestimmten Moment an, für welchen man dieselbe untersucht, eine Secunde lang constant bliebe, und berechnet den in dieser Zeit zurückgelegten Weg. Nehmen wir z. B. an, dass das Drehungsverhältniss während einer Drehung von 30° im Ellbogengelenk sich nicht ändern würde, so erhält man für die gleichzeitigen Drehungen im Schultergelenk die in folgender Tabelle niedergelegten Werthe, welche in Anbetracht der Genauigkeit, mit welcher die Werthe des Drehungsverhältnisses ausgerechnet sind, bis auf 10 Winkelminuten genau angegeben sind.

$$\frac{D_1}{D_2} = 0, \text{ resp. } \frac{D_0}{D_2} = +1.$$

| Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, $\psi$ = | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Drehung im Ellbogengelenk | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° |
| Drehung im Schultergelenk | ∓ 9°40′ | ∓ 9°40′ | ∓ 9°20′ | ∓ 8°40′ | ∓ 8°10′ | ∓ 7°10′ | ∓ 5°40′ | ∓ 4°10′ |

| Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, $\psi$ = | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Drehung im Ellbogengelenk | ± 30° | ± 30° | ± 30′ | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° |
| Drehung im Schultergelenk | ∓ 2°20′ | 0° | ± 2°40′ | ± 6°0′ | ± 9°20′ | ± 13°10′ | ± 17°10′ | ± 21°0′ |

Hierbei entsprechen sich sowohl die oberen als auch die unteren Vorzeichen, wenn man eine Beugung in einem der beiden Gelenke als positive und eine Streckung als negative Drehung rechnet. Es gelten also für die Wirkung der Schwere bei vertical nach unten hängendem Oberarm die unteren, dagegen bei vertical nach oben gerichtetem Oberarm die oberen Vorzeichen. Um die in dieser Tabelle (welche der Tabelle auf Seite 175 des ersten Beitrages zur Muskeldynamik entspricht) niedergelegten Resultate der Anschauung

noch näher zu bringen, ist in ähnlicher Weise wie auf Tafel VI des ersten Beitrages zur Muskeldynamik auf Tafel I für eine Reihe von Ausgangshaltungen des Armes der Anfang der Gelenkbewegung dargestellt worden. Die Anfangsstellung ist dabei wie früher durch dunklere Schattirung von der Endstellung unterschieden worden.

Wie schon oben angedeutet wurde, gelten die in der Tabelle auf Seite 494 aufgezeichneten Verhältnisswerthe der Gelenkdrehungen nicht allein für die Schwere bei vertical gerichteter Oberarmlängsaxe, sondern auch unter Umständen für einen mehrgelenkigen Muskel, nämlich dann, wenn für denselben $D_1 = 0$ resp. $D_0 = D_2$ ist. Dies ist, wie schon mitgetheilt wurde, der Fall für den langen Kopf des M. biceps brachii bei allen Haltungen des Armes, in denen $\psi = 33^0$ ist. Aus den Diagrammen auf Tafel III erkennt man leicht, dass zu $\psi = 33^0$ als Werth des Drehungsverhältnisses $-0{,}285$ gehört. Es würde daher, wenn das Verhältniss bei Aenderung der Beugestellung im Ellbogengelenk um $30^0$ sich nicht ändern würde, eine Beugung von $30^0$ des Ellbogengelenks von einer Streckung des Schultergelenks von $30^0 \times 0{,}285$ oder $8^0 30'$ begleitet sein. Dieses Verhalten des Armes bei der Contraction des langen Kopfes vom M. biceps findet sich durch eine besondere Figur auf Tafel I zur Anschauung gebracht. Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass es in Folge des eigenthümlichen Verlaufs der langen Ursprungssehne des Muskels hierbei gar nicht auf die Stellung des Oberarms im Schultergelenk ankommt. Der Muskel wird stets in der dargestellten Weise auf die beiden Gelenke einwirken, wenn vor der Contraction der Unterarm um $33^0$ von der äussersten Streckstellung im Ellbogengelenk aus gebeugt war, und wenn die freie Beweglichkeit des Ellbogengelenks in keiner Weise durch andere Kräfte oder irgend welche Hindernisse beeinträchtigt ist.

---

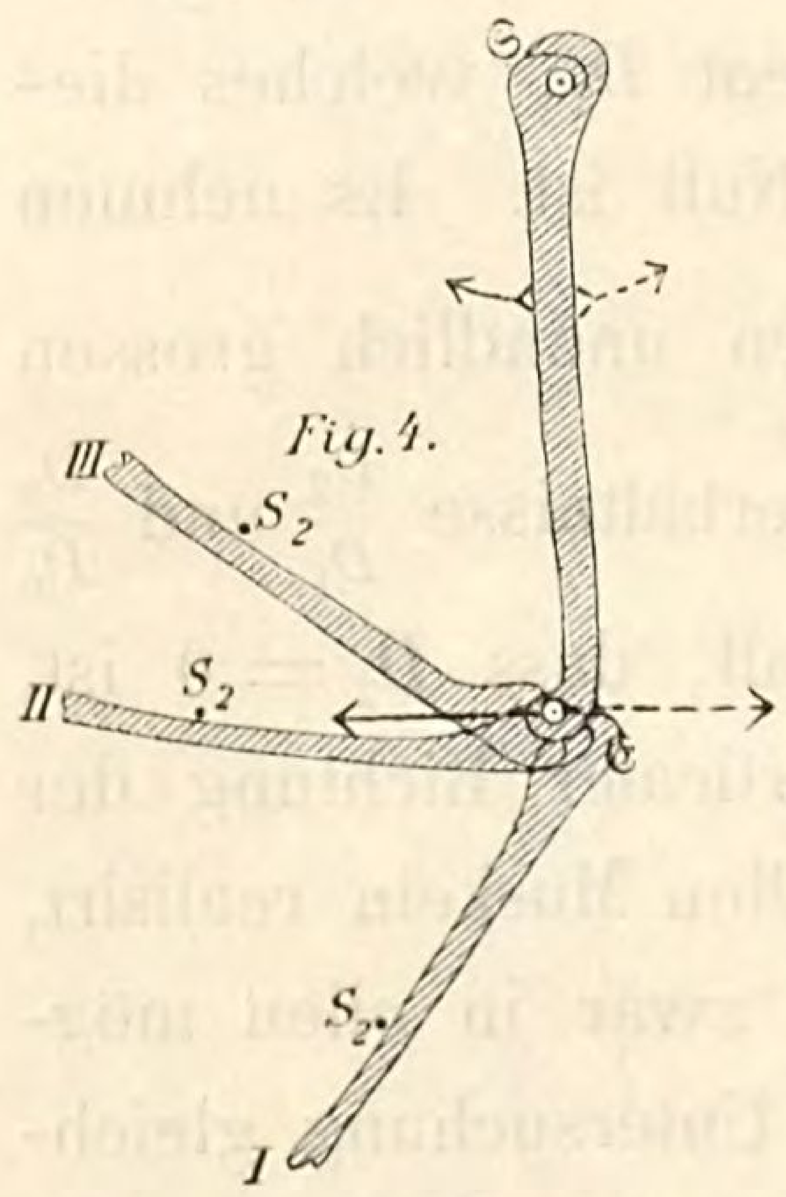
## II. Wirkung der Schwere bei verticaler Stellung des Unterarms und Wirkung der am Oberarm ansetzenden Muskeln.

Während bei verticaler Richtung der Längsaxe des Oberarms das Drehungsmoment $D_1$, mit welchem die Schwere auf den Oberarm allein einwirkt, den besonderen Werth Null besitzt, ist die Wirkung der Schwere bei verticaler Richtung der Unterarmlängsaxe dadurch charakterisirt, dass das Drehungsmoment $D_2$, welches dieselbe auf den Unterarm allein ausübt, gleich Null ist. Es nehmen daher die beiden Verhältnisse $\frac{D_1}{D_2}$ und $\frac{D_0}{D_2}$ einen unendlich grossen Werth und dementsprechend die umgekehrten Verhältnisse $\frac{D_2}{D_1}$ und $\frac{D_2}{D_0}$ übereinstimmend den Werth Null an. Der Fall, dass $D_2 = 0$ ist, tritt nun nicht allein für die Schwere bei verticaler Richtung der Unterarmlängsaxe ein, sondern er ist auch bei allen Muskeln realisirt, deren Ansatz sich am Oberarm befindet[1]), und zwar in allen möglichen Haltungen des Armes. Es kann daher die Untersuchung gleichzeitig auf die Wirkung der Schwere bei verticaler Richtung der Unterarmlängsaxe und ganz allgemein auf die Wirkung irgend eines am Oberarm ansetzenden Muskels, dessen Ursprung sich ausserhalb des Armes befindet, erstreckt werden. In allen diesen Fällen wird unmittelbar nur der Oberarm in Drehung versetzt; die gleichzeitige Drehung des starren Systems: Unterarm plus Hand ist dann ausschliesslich dem Umstande zuzuschreiben, dass eine jede irgendwie hervorgebrachte Drehung des Oberarms im Allgemeinen eine Bewegung des Unterarms in Folge der Verbindung beider durch das Ellbogengelenk nach sich zieht.

---

1) Vgl. die Beiträge zur Muskelstatik I, Seite 290.

Der Oberarm übt bei seiner Drehung im Schultergelenk mit seinem Ellbogenende einen Druck oder Zug auf den Unterarm aus, dessen Richtung mit der Richtung der Bewegung des Ellbogengelenkmittelpunktes zusammenfällt, so dass sie auf der Längsaxe des Oberarms senkrecht steht. Diese Druck- oder Zugkraft wird nun einerseits die Masse des starren Systems: Unterarm plus Hand im Raume fortschieben oder fortziehen, sie wird aber andererseits im Allgemeinen auch diesem starren System eine Drehung im Raume ertheilen. In welchem Sinne diese Drehung erfolgt, dies richtet sich ganz nach der Lage des Schwerpunktes $S_2$ von Unterarm plus Hand zur Richtung der Druck- oder Zugkraft. Nur in dem besonderen Falle, dass die Richtung der in Folge einer Drehung des Schultergelenks auf den Unterarm in $\mathfrak{G}$ ausgeübten Druck- oder Zugkraft durch $S_2$ hindurch geht, was bei rechtwinkliger Beugestellung im Ellbogengelenk der Fall ist (Haltung II in beifolgender Figur 4), wird dem starren System: Unterarm plus Hand nur eine Parallelverschiebung, aber keine Drehung im Raume ertheilt. In allen anderen Fällen wird dasselbe gedreht. Da eine jede am Schwerpunkt vorüberziehende Kraft den Körper um den Schwerpunkt herumzudrehen strebt, so überzeugt man sich leicht, dass bei einer zwischen äusserster Streckstellung und rechtwinkliger Beugestellung des Ellbogengelenks befindlichen Stellung des Unterarms (Haltung I in Figur 4) eine Beugung des Schultergelenks bei der durch Figur 4 gegebenen Ansicht des Armes eine Drehung des Unterarms im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers, dagegen eine Streckung des Schultergelenks eine solche im Sinne des Uhrzeigers hervorrufen wird. Dagegen erfährt der Unterarm, wenn er vor der Bewegung im Ellbogengelenk über die rechtwinklige Beugestellung hinaus gebeugt war (Haltung III in Figur 4) eine Drehung im Sinne oder im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers, je nachdem das Schultergelenk gebeugt oder gestreckt wird. Hierbei ist unter Drehung des Unterarms zunächst eine Drehung, d. h. eine Richtungsänderung seiner Längsaxe im Raume oder, wenn man will, relativ zu dem als feststehend angenommenen Rumpf zu



verstehen, aber noch nicht die Drehung im Ellbogengelenk. Da gleichzeitig Oberarm und Unterarm ihre Richtung im Raume ändern, so kann es vorkommen, dass trotz der Drehung des Unterarms die Stellung im Ellbogengelenk nicht verändert wird; dies wäre z. B. der Fall, wenn bei der Haltung III in Figur 4 der Betrag der Drehung des Unterarms im Sinne des Uhrzeigers gerade so gross ausfiele als die Beugung im Schultergelenk. Andererseits wird von der Haltung II aus stets eine Bewegung im Ellbogengelenk eintreten, da die Längsaxe des Unterarms ihre Richtung im Raume beibehält, während die Längsaxe des Oberarms bei der Beugung oder Streckung des Schultergelenks natürlich in andere Richtung im Raume kommt; es wird in Folge dessen der Neigungswinkel der Längsaxen von Unter- und Oberarm, also die Beugestellung im Ellbogengelenk geändert. Es ist also die Drehung im Ellbogengelenk, wie auch schon an anderer Stelle hervorgehoben wurde (vergl. Seite 491 und 492), etwas anderes als die Drehung des Unterarms im Raume.

Es ist nun in den meisten Fällen nicht schwer, zu entscheiden, in welchem Sinne die Drehung im Ellbogengelenk stattfinden muss. Würde bei allen Ausgangshaltungen des Armes dem Unterarm wie bei der rechtwinkligen Beugestellung im Ellbogengelenk nur eine Parallelverschiebung, aber keine Drehung aufgezwungen werden, so würde, wie man leicht sieht, bei einer Beugung des Schultergelenks der Winkel zwischen beiden Längsaxen vergrössert werden, also Streckung im Ellbogengelenk eintreten; dagegen müsste eine jede Streckung des Schultergelenks von Beugung des Ellbogengelenks begleitet sein. Man kann sogar voraussagen, dass die Grösse der Streckung oder Beugung des Ellbogengelenks unter dieser Annahme mit der Grösse der Beugung oder Streckung des Schultergelenks übereinstimmen würde, so dass, da eine Streckbewegung immer mit dem entgegengesetzten Vorzeichen gerechnet werden muss als eine Beugebewegung, dem Drehungsverhältniss der Werth — 1 zukäme. Da die eben gemachte Voraussetzung für die rechtwinklige Beugestellung als Ausgangshaltung zutrifft, so hat man also in der That in diesem besonderen Falle für das Drehungsverhältniss den Werth — 1. Bei Ausgangshaltungen des Armes, welche zwischen der äussersten Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung des Ellbogengelenks liegen (I in Figur 4), findet nun die Drehung des

Unterarms im Raume so statt, dass hierdurch im Falle der Beugung des Schultergelenks der Winkel zwischen den Längsaxen von Ober- und Unterarm noch mehr vergrössert wird, als dies bei Ausschluss einer Drehung des Unterarms geschehen würde. Umgekehrt wird dieser Winkel bei einer Streckung des Schultergelenks noch mehr verkleinert, als ohne die Drehung des Unterarms im Raume. Es wird daher bei allen zwischen äusserster Streckstellung und rechtwinkliger Beugestellung des Ellbogengelenks liegenden Ausgangshaltungen des Armes Beugung des Schultergelenks Streckung im Ellbogengelenk und umgekehrt Streckung des Schultergelenks Beugung im Ellbogengelenk nach sich ziehen, und zwar wird der absolute Betrag der Drehung im Ellbogengelenk mit Ausnahme der rechtwinkligen Beugestellung des Unterarms grösser ausfallen, als der absolute Betrag der Drehung im Schultergelenk. Ist dagegen der Unterarm vor der Gelenkbewegung über die rechtwinklige Beugestellung im Ellbogengelenk hinaus gebeugt, so wird in Folge der nunmehr in entgegengesetzter Richtung als bei den bisher betrachteten Ausgangshaltungen stattfindenden Drehung des Unterarms im Raume die Drehung im Ellbogengelenk kleiner ausfallen, als wenn der Unterarm nur eine Parallelverschiebung im Raume erführe. Es wird aber jedenfalls bei Stellungen des Unterarms, welche von der rechtwinkligen Beugestellung im Ellbogengelenk nicht viel abweichen, immer noch Beugung resp. Streckung des Schultergelenks Streckung resp. Beugung des Ellbogengelenks zur Folge haben; nur wird jetzt der absolute Betrag der Drehungen im Ellbogengelenk kleiner sein als der absolute Betrag der Drehungen im Schultergelenk. Ob schliesslich einmal bei sehr stark im Ellbogengelenk gebeugtem Arm der Betrag der Drehung im Ellbogengelenk den Werth Null besitzen wird, so dass nur noch Drehung im Schultergelenk von dieser Haltung des Armes aus eintritt, dies lässt sich aus der blossen Anschauung heraus nicht entscheiden. Die weiter unten folgende genauere Untersuchung der quantitativen Verhältnisse der Gelenkbewegungen ergiebt das Resultat, dass dieser Fall bis zu der äussersten Beugestellung im Ellbogengelenk nicht eintritt. Man hat daher das ganz allgemein gültige Resultat, dass in allen Fällen, in denen auf den Unterarm kein Drehungsmoment ausgeübt wird, eine jede Beugung des Schultergelenks Streckung des Ellbogengelenks und eine jede Streckung

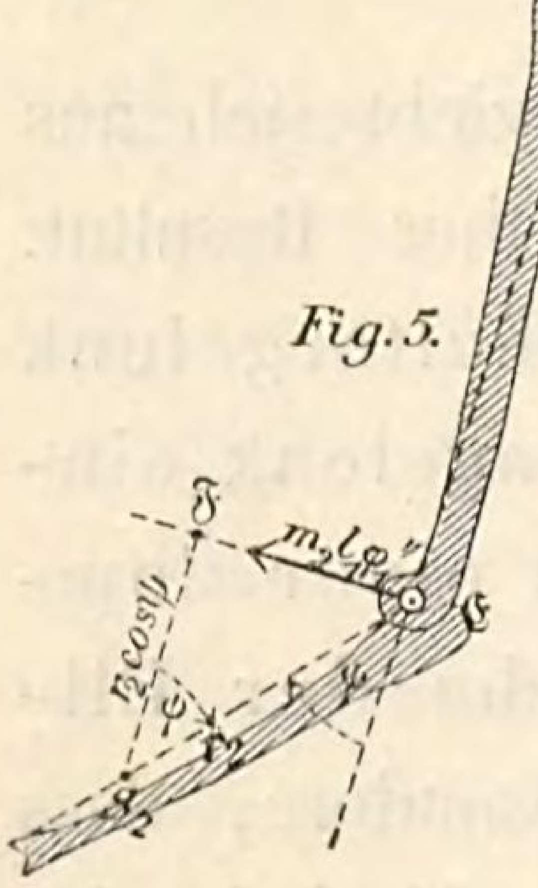
des Schultergelenks Beugung des Ellbogengelenks nach sich zieht, und dass die Drehung des Ellbogengelenks im Vergleich zu der Drehung des Schultergelenks um so grösser ausfällt, je weniger vor der Gelenkbewegung der Unterarm im Ellbogengelenk gebeugt war.

Was nun die Gelenkbewegungen anlangt, welche die Schwere bei vertical gerichteter Unterarmlängsaxe hervorbringt, so hat man zunächst zu beachten, dass die Schwere bei vertical nach unten hängendem Unterarm das Schultergelenk zu beugen und bei vertical nach oben gestelltem Unterarm das Schultergelenk zu strecken sucht. Dies ist einfach eine Folge davon, dass bei ausschliesslicher Berücksichtigung der Drehungen im Schultergelenk, welche um eine der Ellbogenaxe parallele Axe stattfinden, der Unterarm ausser in der äussersten Streckstellung des Ellbogengelenks nur dann vertical nach unten hängen kann, wenn der Oberarm im Schultergelenk nach hinten gedreht ist, und dass bei vertical nach oben gerichteter Unterarmlängsaxe der Oberarm nothwendiger Weise im Schultergelenk nach vorn aus der Verticalstellung heraus gedreht sein muss. Nach den obigen Auseinandersetzungen wird daher die Schwere das Ellbogengelenk strecken oder beugen, je nachdem die Längsaxe des Unterarms vertical nach unten oder vertical nach oben gerichtet ist. Auch hiervon kann man sich leicht an seinem eignen Körper überzeugen. Man braucht nur bei aufrechtem Körper den Oberarm in einer von der verticalen Stellung nach hinten abweichenden Stellung bei vertical nach unten hängendem Unterarm zuerst festzuhalten und dann plötzlich nach unten fallen zu lassen und wird finden, dass dabei eine sehr deutliche Streckung im Ellbogengelenk eintritt u. s. f.

Auch für die am Oberarm ansetzenden Muskeln ergiebt sich aus den obigen Entwickelungen ein sehr bemerkenswerthes Resultat. Zunächst zeigt sich, dass alle nur über das Schultergelenk hinwegziehenden Muskeln auch auf das Ellbogengelenk einwirken, sofern sie nur das Schultergelenk mit einer Componente um eine Axe zu drehen suchen, welche der Ellbogenaxe parallel läuft. Dabei ergiebt sich insbesondere, dass die auf der Beugeseite des Schultergelenks liegenden Muskeln das Ellbogengelenk strecken, während die auf der Streckseite des Schultergelenks hinwegziehenden Muskeln das Ellbogengelenk beugen. Es

findet also hier dieselbe Wechselbeziehung zwischen den Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk statt, wie bei den allein über das Ellbogengelenk hinwegziehenden (eingelenkigen) Muskeln. Demnach wirkt z. B. das vorderste Bündel des M. deltoideus streckend, dagegen das hinterste Bündel desselben Muskels beugend auf das Ellbogengelenk ein.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich wieder zunächst nur auf die Art der Drehungen, welche die Schwere im Falle verticaler Richtung der Unterarmlängsaxe oder die am Oberarm ansetzenden Muskeln in jedem Falle in den beiden Gelenken hervorbringen. Will man nun auch noch das Verhältniss der Drehungsgrössen im Schulter- und Ellbogengelenk feststellen, so hat man die Grösse der vom Oberarm auf den Unterarm ausgeübten Druck- oder Zugkraft zu bestimmen und sich darüber Rechenschaft zu geben, welche Winkelbeschleunigung dem starren System: Unterarm plus Hand durch diese Kraft bei der vorhandenen Grösse und Lagerung der Massen ertheilt wird. Wie schon oben (Seite 488) ausführlich auseinandergesetzt ist, hat die vom Ellbogenende des Oberarms auf den Unterarm ausgeübte Zug- oder Druckkraft die Grösse $m_2 l_1 \varphi_1''$, wenn der Oberarm selbst mit der Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ gedreht wird. Würde der Unterarm im Raume sich vollständig frei bewegen können, so würde diese Kraft, abgesehen von einer linearen Beschleunigung des Schwerpunktes, dem starren System: Unterarm plus Hand eine Drehung um seinen Schwerpunkt $S_2$ ertheilen, deren Winkelbeschleunigung direct proportional ist dem Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf $S_2$, d. h. also dem Product aus der Grösse der Kraft und dem Abstand ihrer Richtung von $S_2$. Dieser Abstand stellt die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{G} S_2 \mathfrak{F}$ dar (vgl. nebenstehende Figur 5), das bei $\mathfrak{F}$ den rechten Winkel und bei $S_2$ den Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks besitzt, da die Richtung der Kraft auf der Richtung der Oberarmlängsaxe senkrecht steht und in Folge dessen das Loth von $S_2$ auf die Kraftrichtung dieser Längsaxe parallel läuft. Bezeichnet man wieder die Länge der Strecke $\mathfrak{G} S_2$ mit $r_2$, so ergiebt sich für $S_2 \mathfrak{F}$ die Länge $r_2 \cos \psi$


Fig. 5.

und daher für das Drehungsmoment der Werth

$$- m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot r_2 \cos \psi .$$

Das Minuszeichen entspricht dem Umstande, dass der durch eine positive Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ des Oberarms verursachte Druck dem Unterarm bei der durch Figur 5 dargestellten Haltung des Armes eine negative Winkelbeschleunigung, d. h. eine solche im umgekehrten Drehungssinne ertheilt. Der Werth für das Drehungsmoment gilt nun auch für alle anderen Beugestellungen des Ellbogengelenks, wie man ohne Weiteres einsehen wird, wenn man beachtet, dass $\cos \psi$ für $\psi = 90^0$ den Werth Null und für $\psi > 90^0$ einen negativen Werth annimmt.

Wie sich bei der Einwirkung des in Drehung befindlichen Unterarms auf den Oberarm herausgestellt hatte, dass die dem Oberarm mitgetheilte Winkelbeschleunigung rückwärts zu einer neuen Druck- oder Zugwirkung des Unterarms auf den Oberarm Veranlassung giebt, so ruft auch jede eintretende Winkelbeschleunigung des Unterarms sofort noch eine weitere Einwirkung auf den Unterarm hervor. Würde der Unterarm vollständig frei im Raume beweglich sein, so müsste sich bei der durch die Kraft $m_2 l_1 \varphi_1''$ bewirkten Drehung das obere Ende desselben nothwendiger Weise vom Oberarm entfernen, weil der Schwerpunkt $S_2$ durch diese Kraft genau die lineare Beschleunigung $l_1 \varphi_1''$ erfährt, welche der Ellbogengelenkmittelpunkt $\mathfrak{E}$ bei der Drehung des Oberarms besitzt. Da eine Entfernung der Ellbogenenden beider Abschnitte des Armes von einander durch die Gelenkverbindung verhindert wird, so übt, wie schon oben (Seite 486) auseinander gesetzt worden ist, der Unterarm auf den Oberarm einen Druck von der Grösse $m_2 r_2 \varphi_2''$ aus, welcher die entgegengesetzte Richtung besitzt, wie die zu $\mathfrak{E}$ relative Bewegung des Schwerpunktes $S_2$. Dabei ist unter $\varphi_2''$ die schliesslich erlangte Winkelbeschleunigung des Unterarms zu verstehen. Nach der Gleichheit von Action und Reaction drückt daher rückwärts der Oberarm mit gleicher Stärke auf den Unterarm, in der Weise, dass er die Drehung desselben zu verhindern oder doch wenigstens zu verringern strebt; die Richtung der Drehung kann dagegen durch ihn nicht geändert werden, so dass bei den obigen Betrachtungen über die Art der dem Unterarm mitgetheilten Drehung von einer Berücksichtigung dieser Druckwirkung

Abstand genommen werden konnte. Da die Richtung dieser neuen Druckkraft auf der Längsaxe des Unterarms senkrecht steht, so ist ihr Drehungsmoment in Bezug auf $S_2$ gleich

$$- m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2 .$$

Bezeichnet $\varkappa_2$ den Trägheitsradius des starren Systems: Unterarm plus Hand in Bezug auf die durch seinen Schwerpunkt $S_2$ hindurchgehende, der Ellbogenaxe parallele Axe, so ergiebt sich demnach für die Winkelbeschleunigung $\varphi_2''$ der Drehung des starren Systems: Unterarm plus Hand im Raume

$$\varphi_2'' = \frac{- m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot r_2 \cos \psi - m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2}{m_2 \varkappa_2^2} .$$

Diese Beziehung lässt sich leicht auf die Form bringen:

$$m_2(\varkappa_2^2 + r_2^2) \cdot \varphi_1'' = - m_2 r_2 l_1 \cos \psi \cdot \varphi_1'' .$$

Die Bedeutung der verschiedenen in dieser Relation auftretenden Grössen ist nicht schwer zu erkennen. Der Ausdruck $m_2(\varkappa_2^2 + r_2^2)$ stellt das Trägheitsmoment des starren Systems: Unterarm plus Hand in Bezug auf die Ellbogenaxe dar, während auf der rechten Seite jetzt allein noch das Drehungsmoment steht, mit welchem der Oberarm in Folge seiner Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ auf den Unterarm einwirkt.

Die obige Relation lässt sich nun wieder auf eine andere Form bringen, in der die Masse $m_2$ durch die Gesammtmasse $m_0$ ersetzt ist, und welche eine constante Grösse weniger enthält.

Denkt man sich im Ellbogengelenkmittelpunkt $\mathfrak{E}$ die Masse des Oberarms concentrirt und dem starren System: Unterarm plus Hand hinzugefügt, so erhält man ein starres System von der Masse $m_0$, für welches schon früher der Name »reducirtes Unterarmsystem« eingeführt worden ist. Der Schwerpunkt desselben ist mit dem Hauptpunkt $H_2$ des Unterarms identisch. Ferner besitzt es ein Trägheitsmoment in Bezug auf die Ellbogenaxe, welches gerade so gross ist, wie das auf dieselbe Axe bezogene Trägheitsmoment des starren Systems: Unterarm plus Hand allein, weil die in $\mathfrak{E}$ concentrirte Masse des Oberarms die Entfernung Null von der Ellbogenaxe besitzt. Bezeichnet $\lambda_2$ den Trägheitsradius des reducirten Unterarmsystems in Bezug auf die Ellbogenaxe, so ist demnach das Trägheitsmoment

$m_0\lambda_2^2$ desselben von $m_2(\varkappa_2^2 + r_2^2)$ nicht verschieden. Setzt man auch noch für $m_2 r_2$ auf der rechten Seite das Product $m_0 c_2$ ein (vgl. Seite 491), so geht die obige Relation über in

$$m_0\lambda_2^2 \cdot \varphi_2'' = - m_0 c_2 l_1 \cos\psi \cdot \varphi_1''.$$

Es ist bemerkenswerth, dass dieselbe in dieser Form sich von der zu $D_1 = 0$ resp. $D_0 = D_2$ gehörenden Relation auf Seite 491 nur dadurch unterscheidet, dass die Winkelbeschleunigungen mit einander vertauscht sind und an Stelle des Trägheitsradius des reducirten Oberarmsystems der des reducirten Unterarmsystems getreten ist. Führt man für die zum feststehenden Rumpfe relative Winkelbeschleunigung $\varphi_2''$ des Unterarms die Winkelbeschleunigung $\psi''$ der Drehung im Ellbogengelenk ein, gemäss $\psi'' = \varphi_2'' - \varphi_1''$ (Seite 492), so hat man zunächst

$$m_0\lambda_2^2 \cdot (\psi'' + \varphi_1'') = - m_0 c_2 l_1 \cos\psi \cdot \varphi_1''.$$

Hieraus ergiebt sich endlich für das Verhältniss der beiden Winkelbeschleunigungen

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi}.$$

Da sich herausstellt, dass für den Arm das Product $l_1 c_2 \cos\psi$ selbst bei der äussersten Beugestellung ($\psi = 150^\circ$) nicht so stark negativ wird, dass hierdurch der Nenner des Bruches selbst einen negativen Werth annimmt, so ist das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen im Schulter- und Ellbogengelenk für alle Ausgangshaltungen des Armes negativ. Damit ist aber der exacte Beweis erbracht, dass in den Fällen, auf welche sich die vorstehenden Betrachtungen beziehen ($D_2 = 0$) im Schulter- und Ellbogengelenk stets Drehungen in verschiedenem Sinne stattfinden. Eine Beugung des Schultergelenks zieht immer Streckung des Ellbogengelenks und eine Streckung des Schultergelenks Beugung des Ellbogengelenks nach sich.

Die neu hinzugetretene Grösse $\lambda_2$ besass an dem in Betracht gezogenen Präparat[1]) die Länge von 15,75 cm. Da nach Seite 493 $l_1 = 30{,}3$ cm und $c_2 = 9{,}16$ cm ist, so hat man für das Verhältniss der Gelenkbewegungen

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = - \frac{248{,}1}{248{,}1 + 277{,}5 \cos\psi} = - \frac{0{,}894}{0{,}894 + \cos\psi}.$$

1) a. a. O. Seite 135.

Die aus dieser Formel sich ergebenden Werthe des Drehungsverhältnisses sind für verschiedene um 10° von einander abstehende Beugungswinkel des Ellbogengelenks in folgender Tabelle niedergelegt worden, wobei der Werth von $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ oder von dem reciproken Verhältniss $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ angegeben ist, je nachdem sich, abgesehen vom Vorzeichen, $\varphi_1'' < \psi''$ oder $\varphi_1'' > \psi''$ herausgestellt hat. Die zu $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ gehörenden Werthe sind zum Unterschied von einer Klammer umgeben worden.

$$\frac{D_1}{D_2} = \infty\,, \text{ resp. } \frac{D_0}{D_2} = \infty\,, \quad \text{oder} \quad \frac{D_2}{D_1} = 0\,, \text{ resp. } \frac{D_2}{D_0} = 0.$$

| $\psi$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ oder $\left[\frac{\psi''}{\varphi_1''}\right]$ | — 0,47 | — 0,48 | — 0,49 | — 0,51 | — 0,54 | — 0,58 | — 0,64 | — 0,72 | — 0,84 |

| $\psi$ | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ oder $\left[\frac{\psi''}{\varphi_1''}\right]$ | — 1 | [— 0,80] | [— 0,62] | [— 0,44] | [— 0,28] | [— 0,15] | [— 0,03] |

Auch das hierzu gehörende Diagramm findet sich auf Tafel III verzeichnet, und zwar ist es auf beiden Seiten die untere mit 0 (entsprechend $\frac{D_2}{D_1} = 0$ und $\frac{D_2}{D_0} = 0$) bezeichnete Curve, welche aus einem undurchbrochen und einem durchbrochen gezeichneten Theile besteht. Der erstere Theil giebt die zu $\psi = 0$ bis 90° gehörenden Werthe von $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$, der letztere die zu allen Werthen von $\psi$, welche grösser als 90° sind, gehörenden Werthe von $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ an.

Aus der Tabelle geht unter anderen hervor, dass bei vertical nach unten hängendem Unterarm und 30° Beugungswinkel des Ellbogengelenks eine durch die Schwere bewirkte Beugung des Schultergelenks von 1° von einer gleichzeitigen Streckung des Ellbogengelenks von 1° : 0,51 oder 1° 50′, also abgerundet 2° begleitet wird, und es würde schon bei einer Beugung des Schultergelenks von 0°,51 oder 0° 31′ eine Streckung von 1° im Ellbogengelenk eingetreten sein. Wäre dagegen bei 110° Beugungswinkel des Ellbogengelenks die Längsaxe vertical nach oben

gerichtet, so würde eine Streckung des Schultergelenks von $1^0$, welche durch die Schwere hervorgerufen worden ist, eine Beugung des Ellbogengelenks von $1^0 \times 0{,}62$ oder $0^0 37'$ nach sich ziehen, so dass erst bei $1^0 : 0{,}62$ oder $1^0 37'$ Streckung des Schultergelenks die gleichzeitige Beugung im Ellbogengelenk $1^0$ erreichen würde. Aus dem Werthe [— 0,03] für die äusserste Beugestellung des Armes geht hervor, dass man in diesem Falle so gut wie keine Wirkung mehr auf das Ellbogengelenk hat, selbst wenn, wie bei einer Streckbewegung, das Gelenk an und für sich die Drehung gestatten würde.

Nimmt man wiederum an, dass das Drehungsverhältniss auf längere Zeit, etwa während einer Drehung im Ellbogengelenk von $30^0$, sich nicht änderte, so erhält man folgende zusammengehörende Drehungsgrössen im Schulter- und Ellbogengelenk.

$$\frac{D_1}{D_2} = \infty, \text{ resp. } \frac{D_0}{D_2} = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{D_2}{D_1} = 0, \text{ resp. } \frac{D_2}{D_0} = 0.$$

| Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, $\psi$ = | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Drehung im Ellbogengelenk | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° |
| Drehung im Schultergelenk | ∓ 14°10′ | ∓ 14°20′ | ∓ 14°40′ | ∓ 15°20′ | ∓ 16°10′ | ∓ 17°20′ | ∓ 19°10′ | ∓ 21°40′ |

| Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, $\psi$ = | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Drehung im Ellbogengelenk | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° | ± 30° |
| Drehung im Schultergelenk | ∓ 25°10′ | ∓ 30° | ∓ 37°30′ | ∓ 48°20′ | ∓ 68°10′ | ∓ 107°10′ | ∓ 200°0′ | ∓ 1000° |

Dabei entsprechen sich wieder sowohl die oberen als auch die unteren Vorzeichen der beiden Zeilen. Die zu $150^0$ Beugungswinkel gehörende Drehungsgrösse von $1000^0$ kann natürlich nur den Sinn haben, dass die Drehung im Schultergelenk in diesem Falle sehr gross im Vergleich zu der im Ellbogengelenk ist, so dass man kaum von einer Wirkung auf das Ellbogengelenk reden kann. In gleicher Weise wie in dem zuerst betrachteten Falle ($D_1 = 0$) auf der linken Seite von Tafel I, so finden sich auf der rechten Seite dieser Tafel die bei verticaler Unterarmlängsaxe durch die Schwere hervorgerufenen

Gelenkbewegungen entsprechend der obigen Tabelle an einigen Beispielen veranschaulicht. Die Tabelle giebt nun auch gleichzeitig die durch irgend einen am Oberarm ansetzenden Muskel erzeugten Gelenkbewegungen an, und zwar für jede beliebige Stellung der Unterarmlängsaxe, da das Verhältniss der Gelenkbewegungen allein von der Beugestellung im Ellbogengelenk abhängt. Als Beispiel ist auf Tafel I rechts noch die durch die vorderen Fasern des M. deltoideus erzeugte Gelenkbewegung bei irgend einer Ausgangshaltung, für welche $\psi = 50^0$ ist, aufgezeichnet worden; dasselbe Bild wird man bei jeder anderen Stellung des Oberarms erhalten, wenn nur die Beugestellung im Ellbogengelenk die gleiche ist.

---

# III. Wirkung der Schwere bei beliebiger Haltung des Armes und Wirkung der am Unterarm ansetzenden mehrgelenkigen Muskeln.

In einer beliebigen Haltung des Armes, bei der weder die Längsaxe des Oberarms noch die des Unterarms vertical gerichtet ist, wirkt die Schwere sowohl auf den Oberarm wie auf den Unterarm mit einem nicht verschwindenden Drehungsmoment ein. Das erstere, $D_1$, wird gemessen durch das Product aus der Gesammtschwere des Armes und dem Abstand des Schultergelenkmittelpunktes 𝔖 von der Verticalen durch den Hauptpunkt $H_1$ des Oberarms (Figur 1 auf Seite 479), das letztere, $D_2$, durch das Product aus der Gesammtschwere des Armes und dem Abstand des Ellbogengelenkmittelpunktes 𝔈 von der Verticalen durch den Hauptpunkt $H_2$ des Unterarms. Es ist zweckmässig, noch ausserdem das Drehungsmoment $D_0$ in Betracht zu ziehen, mit welchem die Schwere auf den ganzen Arm einwirken würde, wenn das Ellbogengelenk in einer bestimmten Stellung arretirt wäre; dieses wird gemessen durch das Product aus der Gesammtschwere des Armes und dem Abstand des Schultergelenkmittelpunktes 𝔖 von der Verticalen durch den Gesammtschwerpunkt $S_0$ des ganzen Armes. Zwischen den drei Drehungsmomenten besteht die Beziehung $D_0 = D_1 + D_2$. Auch ein jeder Muskel, dessen Ansatz am Unterarm und dessen Ursprung ausserhalb des Armes gelegen ist, wirkt im Allgemeinen mit drei nicht verschwindenden Drehungsmomenten $D_0$, $D_1$ und $D_2$ auf den Arm, bezüglich auf dessen beide Abschnitte ein, zwischen denen dieselbe Beziehung $D_0 = D_1 + D_2$ besteht. Dies Alles ist in dem ersten Beitrage zur Muskelstatik ausführlich auseinander gesetzt worden, so dass es an dieser Stelle bei den kurzen Andeutungen bleiben kann.

Da weder $D_1$ noch $D_2$ den Werth Null besitzen, so wird auch

weder die Winkelbeschleunigung $\varphi_1''$ des Oberarms allein eine Folge der Drehung des Unterarms sein (wie in dem zuerst untersuchten speciellen Falle), noch wird die Winkelbeschleunigung $\varphi_2''$, welche das System: Unterarm plus Hand im Raume erhält, allein durch die Drehung des Oberarms hervorgerufen werden (wie in dem an zweiter Stelle behandelten speciellen Falle). Es wird vielmehr hier wie dort das Drehungsmoment, welches die Schwere, der mehrgelenkige Muskel oder sonst irgend eine Kraft auf das betreffende Glied ausübt, zu den Drehungsmomenten hinzutreten, mit denen das andere Glied in Folge seiner eigenen Winkelbeschleunigung auf dieses einwirkt. Demnach lassen sich für den allgemeinsten Fall sofort die Ausdrücke für die beiden Winkelbeschleunigungen $\varphi_1''$ und $\varphi_2''$ hinschreiben. Es ist nach Seite 489

$$\varphi_1'' = \frac{-m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot l_1 \cos\psi - m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot l_1 + D_1}{m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2)}$$

und nach Seite 504

$$\varphi_2'' = \frac{-m_2 l_1 \varphi_1'' \cdot r_2 \cos\psi - m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2 + D_2}{m_2 \varkappa_2^2}.$$

In den beiden zuerst untersuchten speciellen Fällen gestattete schon die eine Beziehung, welche für $\varphi_1''$ und $\varphi_2''$ gefunden wurde, das Verhältniss der beiden Winkelbeschleunigungen $\varphi_1''$, $\psi''$ zu bestimmen; dies war dem Umstande zuzuschreiben, dass in dem einen Falle $D_1$, in dem anderen $D_2$ den Werth Null besass. Man überzeugt sich nun leicht, nachdem man wieder $\varphi_2''$ durch $\psi'' + \varphi_1''$ ersetzt hat, dass in dem vorliegenden allgemeinen Falle keine der beiden Beziehungen für $\varphi_1''$ und $\varphi_2''$ allein die Bestimmung des Verhältnisses von $\varphi_1''$ und $\psi''$ gestattet, da in der einen Relation $D_1$, in der anderen $D_2$ ohne den Factor $\varphi_1''$ oder $\psi''$ auftritt. Dieses Verhältniss lässt sich nur aus beiden Relationen, welche gleichzeitig erfüllt sein müssen, ableiten. Zum Zwecke dieser Ableitung mögen die beiden Relationen unter Berücksichtigung von

$$m_1(\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2 l_1^2 = m_0 \lambda_1^2 \qquad \text{(Seite 490)}$$

$$m_2(\varkappa_2^2 + r_2^2) = m_0 \lambda_2^2 \qquad \text{(Seite 505)}$$

und

$$m_2 r_2 = m_0 c_2 \qquad \text{(Seite 491)}$$

in
$$m_0\lambda_1^2 \cdot \varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \cos\psi \cdot \varphi_2'' = D_1$$
$$m_0\lambda_2^2 \cdot \varphi_2'' + m_0 l_1 c_2 \cos\psi \cdot \varphi_1'' = D_2$$
übergeführt und nach Einsetzen von $\psi'' + \varphi_1''$ für $\varphi_2''$ auf die folgende Form[1]) gebracht sein:
$$m_0(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1'' + m_0 l_1 c_2 \cos\psi \cdot \psi'' = D_1$$
$$m_0(\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot \varphi_1'' + m_0 \lambda_2^2 \cdot \psi'' \qquad = D_2 .$$
Betrachtet man diese beiden Relationen als Gleichungen für die Unbekannten $\varphi_1''$ und $\psi''$, so lässt sich leicht sowohl $\varphi_1''$ als auch $\psi''$ durch die übrigen Grössen ausdrücken und dann durch Division der Werth des Verhältnisses $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ gewinnen. Da es sich zunächst nur um die Ableitung dieses Verhältnisses handelt, so gelangt man noch kürzer zum Ziele, wenn man von vornherein die erste Relation durch die zweite dividirt und darauf noch links Zähler und Nenner durch $\psi''$ dividirt. Man erhält auf diese Weise direct eine Gleichung vom ersten Grade, in der nur noch das Verhältniss $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ als Unbekannte vorkommt. Auch erkennt man bei dieser Art der Ableitung ohne Weiteres, dass das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen nur von dem Verhältniss der Drehungsmomente, also bei einem Muskel gar nicht von der Spannung desselben abhängt. Das Resultat dieser Rechnung ist[2]):
$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{\lambda_2^2 \frac{D_1}{D_2} - l_1 c_2 \cos\psi}{(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi) - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\frac{D_1}{D_2}} \qquad \text{(erste Form).}$$

Hieraus ergiebt sich, dass auch im allgemeinsten Falle das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen im Schulter- und Ellbogengelenk nicht von der Masse des Armes abhängt, sondern nur von den Trägheitsradien $\lambda_1$, $\lambda_2$ der beiden reducirten Systeme, der Länge $l_1$ des Oberarms, der Entfernung $c_2$ des Unterarmhauptpunktes vom Ellbogengelenkmittelpunkt, dem Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks und dem Verhältniss der auf Oberarm und Unterarm ausgeübten Drehungsmomente.

In den Fällen, in welchen der absolute Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ grösser

1) Vgl. auch die Beiträge zu einer Muskeldynamik I, Seite 163.
2) Vgl. ebendaselbst.

wie 1 ist, empfiehlt es sich, das reciproke Verhältniss $\frac{D_2}{D_1}$ zur Berechnung des Verhältnisses der beiden Winkelbeschleunigungen zu verwenden und die erste Form durch die folgende zu ersetzen:

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{\lambda_2^2 - l_1 c_2 \cos\psi \frac{D_2}{D_1}}{(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\frac{D_2}{D_1} - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)} \quad \text{(zweite Form).}$$

An Stelle des Verhältnisses der Drehungsmomente $D_1$, $D_2$ kann man auch das Verhältniss der Drehungsmomente $D_0$, $D_2$ einführen, indem man beachtet, dass aus $D_0 = D_1 + D_2$ folgt:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{D_0}{D_2} - 1 .$$

Das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen in den beiden Gelenken nimmt dann die etwas weniger einfache, aber für manche Zwecke vorzuziehende Form an:

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{\lambda_2^2 \frac{D_0}{D_2} - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\frac{D_0}{D_2}} \quad \text{(dritte Form).}$$

Endlich wird man auch hier im Falle, dass der absolute Werth von $\frac{D_0}{D_2}$ grösser wie 1 ist, zweckmässiger Weise das reciproke Verhältniss $\frac{D_2}{D_0}$ in Rechnung ziehen und zu diesem Zwecke an Stelle der dritten Form die folgende, vierte, in Anwendung bringen:

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{\lambda_2^2 - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\frac{D_2}{D_0}}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi)\frac{D_2}{D_0} - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)} \quad \text{(vierte Form).}$$

Damit ist die Aufgabe, das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen zu bestimmen, welche bei einem bestimmten Verhältniss der Drehungsmomente in den beiden Gelenken hervorgerufen werden, ganz allgemein für jedes beliebige, den oben gemachten Voraussetzungen entsprechende zweigliedrige System gelöst.

Für den im Ellbogengelenk gegliederten Arm, welcher durch $\lambda_1 = 24{,}11$ cm; $\lambda_2 = 15{,}75$ cm; $l_1 = 30{,}3$ cm und $c_2 = 9{,}16$ cm charakterisirt ist, erhält man nach dem Einsetzen dieser Werthe und

darauffolgender Division von Zähler und Nenner mit dem Werthe von $l_1 c_2$:

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{0{,}894 \frac{D_1}{D_2} - \cos\psi}{(2{,}095 + \cos\psi) - (0{,}894 + \cos\psi)\frac{D_1}{D_2}} \quad \text{(erste Form)},$$

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{0{,}894 - \cos\psi \frac{D_2}{D_1}}{(2{,}095 + \cos\psi)\frac{D_2}{D_1} - (0{,}894 + \cos\psi)} \quad \text{(zweite Form)},$$

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{0{,}894 \frac{D_0}{D_2} - (0{,}894 + \cos\psi)}{(2{,}989 + 2\cos\psi) - (0{,}894 + \cos\psi)\frac{D_0}{D_2}} \quad \text{(dritte Form)},$$

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{0{,}894 - (0{,}894 + \cos\psi)\frac{D_2}{D_0}}{(2{,}989 + 2\cos\psi)\frac{D_2}{D_0} - (0{,}894 + \cos\psi)} \quad \text{(vierte Form)}.$$

In diesen allgemeingültigen Formeln sind natürlich die für die beiden in I und II behandelten speciellen Fälle geltenden Formeln mit enthalten. Der erste Fall war durch $\frac{D_1}{D_2} = 0$ resp. $\frac{D_0}{D_2} = +1$ charakterisirt. Setzt man diese Werthe in die erste resp. dritte Form ein, so erhält man übereinstimmend die auf Seite 493 angeführte Formel. Der zweite Fall war durch $\frac{D_2}{D_1} = 0$ resp. $\frac{D_2}{D_0} = 0$ charakterisirt. Man überzeugt sich leicht, dass beim Einsetzen dieser Werthe in die zweite resp. vierte Form die auf Seite 505 befindliche Formel entsteht. Ferner umfasst die allgemeine Formel auch den im ersten Beitrage zur Muskeldynamik behandelten Fall der Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln. Alle zwischen Oberarm und Unterarm sich erstreckenden Muskeln sind bekanntlich durch $\frac{D_1}{D_2} = -1$ resp. $\frac{D_0}{D_2} = 0$ charakterisirt. Durch Einsetzen dieser Werthe in die erste resp. dritte Form erhält man übereinstimmend den im ersten Beitrag auf Seite 173 angeführten Ausdruck für das Drehungsverhältniss:

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = -\frac{0{,}894 + \cos\psi}{2{,}989 + 2\cos\psi}.$$

Eine genaue Betrachtung der vier allgemeinen Ausdrücke für das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen oder, kürzer gesagt, für

das Drehungsverhältniss in den beiden Gelenken auf Seite 511 und 512 ist nun in mehrfacher Hinsicht sehr lehrreich.

Zunächst erkennt man, dass das Verhältniss der Drehungen in den Gelenken nicht allein von der Grösse des Verhältnisses der Drehungsmomente, sondern auch von der Haltung des Armes abhängt, bei welcher diese Drehungsmomente auf den Arm, bezüglich die beiden Abschnitte des Armes ausgeübt werden. Dies rührt daher, dass die gegenseitige Beeinflussung der Drehungen der beiden Glieder sich nach ihrer Stellung zu einander richtet. Da die relative Stellung beider Glieder vollständig durch den Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks bestimmt wird, die Stellung des Schultergelenks für dieselbe dagegen gar nicht in Betracht kommt, so wird es verständlich, dass in den Formeln allein der Winkel $\psi$, nicht aber gleichzeitig der Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenks auftritt.

Was nun die Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses von dem Verhältniss der Drehungsmomente anlangt, so erkennt man aus den Formeln auf den ersten Blick, dass man sich in einem ganz groben Irrthum befinden würde, wollte man allein aus der Kenntniss der Drehungsmomente sich eine Anschauung über die Art und das Grössenverhältniss der Drehungen in den Gelenken bilden und etwa das Drehungsverhältniss direct proportional dem Verhältniss der Drehungsmomente annehmen. Es kann sogar vorkommen, dass das Drehungsmoment $D_1$ allein eine Drehung des Oberarms nach vorn bewirken würde, und dass trotzdem in Folge der Einwirkung des Unterarms auf den Oberarm eine Rückwärtsdrehung oder Streckung im Schultergelenk stattfindet. Der lange Kopf des M. biceps wirkt z. B. bei 15° Beugungswinkel des Ellbogengelenks so auf Oberarm und Unterarm ein, dass er beide nach vorn zu drehen strebt, also insbesondere im Schultergelenk eine Beugung hervorbringen will. Dies ergiebt sich unmittelbar daraus, dass seine resultirende Zugrichtung auf der Strecke zwischen Muskelansatz und Humeruskopf eine Entfernung von ca. 1,5 cm vom Ellbogengelenkmittelpunkt und eine solche von ca. 2,3 cm vom Mittelpunkt des Schultergelenks besitzt[1]). Derselbe wirkt daher auf den Unterarm mit einem Kräftepaar in der Richtung des Uhr-

1) Beiträge zur Muskelstatik I, Seite 361 und 362.

zeigers drehend ein, dessen beide in 𝔄 und 𝔈 (Figur 6) angreifende Kräfte einen Abstand von 1,5 cm besitzen. Das auf den Oberarm einwirkende Drehungsmoment ist gleich dem Moment des Kräftepaares, welches sich aus den beiden in 𝔈 und 𝔖 angreifenden (in der Figur mit Querstrichen versehenen) Kräften[1]) zusammensetzt und sucht denselben ebenfalls im Sinne des Uhrzeigers zu drehen, also eine Beugung im Schultergelenk hervorzubringen. Da die Richtung des von 𝔄 ausgehenden resultirenden Muskelzuges vom Schultergelenkmittelpunkt 𝔖 den Abstand von 2,3 cm besitzt, so ist der Arm des letzteren Kräftepaares 2,3 cm — 1,5 cm, also 0,8 cm lang. Zu bemerken ist dabei noch, dass die in 𝔅 und 𝔈 ausserdem auf den Oberarm einwirkenden (in der Figur durchbrochen gezeichneten) Kräfte sich in ihrem Bestreben, den Oberarm zu drehen, vernichten, da sie wie an einer festen Rolle (dem Humeruskopf) angreifen. Ist $K$ die Gesammtspannung des Muskels, so wäre demnach $D_1 = + 0{,}8\,K$ und $D_2 = + 1{,}5\,K$. Endlich soll noch hervorgehoben werden, dass der Muskel im Falle einer Arretirung des Ellbogengelenks auf den ganzen Arm nur noch mit der in 𝔈 angreifenden Kraft drehend einwirkt, da die beiden in 𝔄 und 𝔅 angreifenden Kräfte unter dieser Voraussetzung nicht zur Wirkung kommen können. Das Kräftepaar, dessen Moment dann das Drehungsmoment $D_0$ darstellt, setzt sich aus den beiden in 𝔈 und 𝔖 angreifenden parallelen (in der Figur durchbrochen gezeichneten) Kräften zusam-

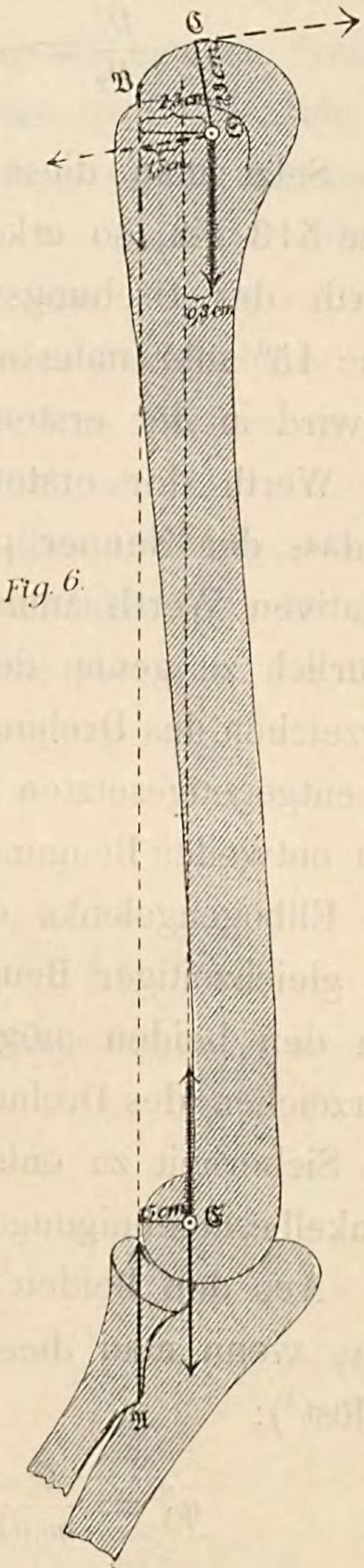



Fig. 6.

---

1) Vgl. Ueber die Drehungsmomente ein- und mehrgelenkiger Muskeln. Archiv für Anatomie und Physiologie. Anatomische Abtheilung, 1894, Seite 105.

men, welche den Abstand von 2,3 cm besitzen. Dasselbe sucht auch den Arm im Sinne des Uhrzeigers zu drehen, also eine Beugung im Schultergelenk hervorzubringen; seine Grösse ist $D_0 = + 2{,}3\, K$. Es ist also im vorliegenden Falle

$$\frac{D_1}{D_2} = + 0{,}53 \quad \text{und} \quad \frac{D_2}{D_0} = + 0{,}65 .$$

Setzt man diese Werthe in die erste resp. vierte Form auf Seite 513 ein, so erkennt man schon ohne alle Rechnung, dass der Werth des Drehungsverhältnisses negativ ausfällt. Da $\cos\psi$ für $\psi = 15^0$ sehr nahe an $+ 1$ liegt (der genauere Werth ist 0,966), so wird in der ersten Form der Zähler negativ, während im Nenner der Werth der ersten Klammer über den der zweiten überwiegt, so dass der Nenner positiv bleibt und der ganze Bruch also einen negativen Werth annimmt. Die Anwendung der vierten Form muss natürlich zu genau demselben Resultate führen. Aus dem negativen Vorzeichen des Drehungsverhältnisses folgt nun, dass die eine Drehung im entgegengesetzten Sinne vor sich geht, wie die andere. Es wird also entweder Beugung des Schultergelenks verbunden mit Streckung des Ellbogengelenks oder umgekehrt Streckung des Schultergelenks mit gleichzeitiger Beugung des Ellbogengelenks stattfinden. Welcher von den beiden möglichen Fällen eintritt, dies lässt sich aus dem Vorzeichen des Drehungsverhältnisses allein nicht erkennen. Um dies mit Sicherheit zu entscheiden, muss man auf die Werthe der beiden Winkelbeschleunigungen selbst zurückgreifen.

Aus den beiden allgemeinen Relationen auf Seite 511 ergiebt sich, wenn man dieselben nach den Unbekannten $\varphi_1''$ und $\psi''$ selbst auflöst[1]:

$$\varphi_1'' = \frac{\lambda_2^2 \cdot D_1 - l_1 c_2 \cos\psi \cdot D_2}{m_0[(\lambda_1 \lambda_2)^2 - (l_1 c_2 \cos\psi)^2]}$$

$$\psi'' = \frac{(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot D_2 - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot D_1}{m_0[(\lambda_1 \lambda_2)^2 - (l_1 c_2 \cos\psi)^2]} .$$

Unter Verwendung der beiden Drehungsmomente $D_0$ und $D_2$ gehen, da $D_1 = D_0 - D_2$ ist, diese Ausdrücke in die Form über:

---

1) Vgl. auch den ersten Beitrag zur Muskeldynamik Seite 163.

$$\varphi_1'' = \frac{\lambda_2^2 \cdot D_0 - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot D_2}{m_0[(\lambda_1 \lambda_2)^2 - (l_1 c_2 \cos\psi)^2]}$$

$$\psi'' = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \cdot D_2 - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \cdot D_0}{m_0[(\lambda_1 \lambda_2)^2 - (l_1 c_2 \cos\psi)^2]}.$$

Da für den Arm das Product $\lambda_1 \lambda_2$ grösser ist als das Product $l_1 c_2$, wie man ohne Weiteres aus den auf Seite 512 angegebenen Werthen der vier Längen erkennt, und da ferner $m_0$ als Gesammtmasse des Armes eine positive Grösse darstellt, so wird der Nenner in den Ausdrücken für $\varphi_1''$ und $\psi''$ stets positiv sein, wie gross auch der Winkel $\psi$ sein mag. Daher richtet sich das Vorzeichen einer jeden der beiden Winkelbeschleunigungen nach dem Vorzeichen des betreffenden Zählers. Man hat demnach in Rücksicht auf die vier Formen, in denen die allgemeine Formel für das Drehungsverhältniss angegeben wurde, wenn man die obigen Zähler in für den vorliegenden Zweck besonders geeigneter Weise schreibt, folgende Kennzeichen für die Richtung der Gelenkdrehungen:

## Erste Form.

Das Vorzeichen von $\varphi_1''$ ist gleich dem Vorzeichen von $\left[\lambda_2^2 \frac{D_1}{D_2} - l_1 c_2 \cos\psi\right] \cdot D_2$

Das Vorzeichen von $\psi''$ ist gleich dem Vorzeichen von $\left[(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi) - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \frac{D_1}{D_2}\right] \cdot D_2$

## Zweite Form.

Das Vorzeichen von $\varphi_1''$ ist gleich dem Vorzeichen von $\left[\lambda_2^2 - l_1 c_2 \cos\psi \frac{D_2}{D_1}\right] \cdot D_1$

Das Vorzeichen von $\psi''$ ist gleich dem Vorzeichen von $\left[(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \frac{D_2}{D_1} - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\right] \cdot D_1$

## Dritte Form.

Das Vorzeichen von $\varphi_1''$ ist gleich dem Vorzeichen von $\left[\lambda_2^2 \frac{D_0}{D_2} - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\right] \cdot D_2$

Das Vorzeichen von $\psi''$ ist gleich dem Vorzeichen von $\left[(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \frac{D_0}{D_2}\right] \cdot D_2$

## Vierte Form.

Das Vorzeichen von $\varphi_1''$ ist gleich dem Vorzeichen von $\left[\lambda_2^2 - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi) \frac{D_2}{D_0}\right] \cdot D_0$

Das Vorzeichen von $\psi''$ ist gleich dem Vorzeichen von $\left[(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2 l_1 c_2 \cos\psi) \frac{D_2}{D_0} - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos\psi)\right] \cdot D_0$

Vergleicht man diese Resultate mit den verschiedenen Formen der allgemeinen Formel, so kann man dieselben in die beiden Sätze zusammenfassen:

1) Im Schultergelenk tritt Beugung (Vorwärtsdrehung) oder Streckung (Rückwärtsdrehung) ein, je nachdem der Zähler in der zur Berechnung des Drehungsverhältnisses verwendeten Form mit dem Drehungsmoment, welches den Nenner des benutzten Verhältnisses der Drehungsmomente ausmacht, gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzt.

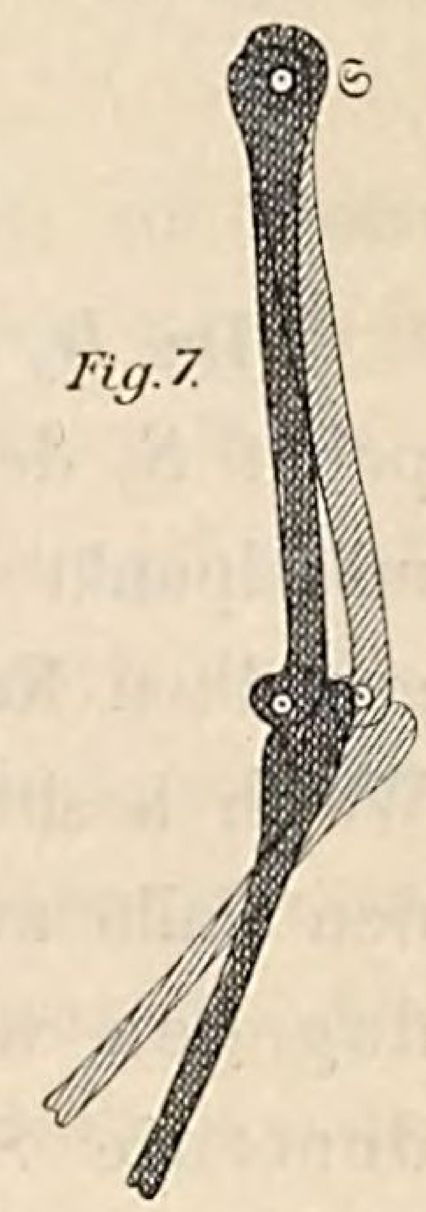
2) Im Ellbogengelenk tritt Beugung oder Streckung ein, je nachdem der Nenner in der zur Berechnung des Drehungsverhältnisses verwendeten Form mit dem Drehungsmoment, welches den Nenner des benutzten Verhältnisses der Drehungsmomente ausmacht, gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzt.

Wendet man dieses allgemein gültige Kriterium auf die speciellen Verhältnisse des M. biceps brachii bei $15^0$ Beugungswinkel im Ellbogengelenk an, so erkennt man, dass bei Verwendung der ersten Form der Zähler entgegengesetztes Vorzeichen besitzt wie $D_2$; denn jener ist negativ (vgl. Seite 516), dieses positiv. Daher wird bei jeder Haltung des Armes, für welche $\psi = 15^0$ ist, der M. biceps bei seiner Contraction das Schultergelenk strecken. Zur Controle kann man noch auf das Zeichen des Nenners in der ersten Form achten. Dasselbe ist positiv (vgl. Seite 516), also gleich dem Vorzeichen von $D_2$, folglich tritt gleichzeitig Beugung des Ellbogengelenks ein, was damit übereinstimmt, dass in Folge des negativen Werthes des Drehungsverhältnisses die Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk in verschiedener Richtung stattfinden müssen. Bei Anwendung der vierten Form erhält man ebenfalls für den Zähler des Drehungsverhältnisses das negative und für den Nenner das positive Vorzeichen. Da nun $D_0$ selbst positiv ist (vgl. Seite 516), so stellt sich auch hierdurch für das Schultergelenk Streckung und für das Ellbogengelenk Beugung heraus.

Die genaue Berechnung des Drehungsverhältnisses ergiebt unter Verwendung der ersten oder der vierten Form übereinstimmend den Werth — 0,24. Man hat daher das Resultat, dass der lange Kopf des M. biceps brachii bei seiner Contraction aus einer durch $\psi = 15^0$ charakterisirten Beugestellung des Ellbogengelenks im Schulter-

gelenk eine Streckung hervorbringt, deren Betrag abgerundet gleich dem vierten Theil der gleichzeitigen Beugung des Ellbogengelenks ist. Würde während einer Beugung des Ellbogengelenks von $30^0$ das Drehungsverhältniss constant bleiben, so würde demnach dieselbe von einer Streckung des Schultergelenks von $30^0 \cdot 0{,}24 = 7^0\,10'$ begleitet sein, so wie es die Figur 7 zur Anschauung bringt, in welcher wie auf Tafel I die dunkel schraffirte Haltung die Anfangsstellung und die heller schraffirte die Endstellung bei dieser Bewegung darstellt. Man hat also thatsächlich eine Streckung des Schultergelenks, trotzdem der Muskel den Oberarm im Schultergelenk zu beugen strebt.

Fig. 7.



Es wird für die Erkenntniss der mechanischen Vorgänge zweckmässig sein, noch einige andere Beispiele anzuführen, bei denen die eintretende Gelenkbewegung in gleich überraschender Weise von der Vorstellung abweicht, zu der man bei alleiniger Beachtung der Drehungsbestreben kommen müsste.

In einer Haltung des Armes, bei welcher die Längsaxe des Oberarms um $10^0$ nach vorn von der Verticalen abweicht ($\varphi_1 = +10^0$) und der Unterarm gegen den Oberarm um $30^0$ aus der äussersten Streckstellung gebeugt ist ($\psi = 30^0$) wird die Schwere auf das zweigliedrige System mit Drehungsmomenten $D_0$ und $D_2$ einwirken, für welche nach der Tabelle auf Seite 354 und 355 des ersten Beitrages zur Muskelstatik $\frac{D_2}{D_0} = +0{,}610$ (vgl. auch die Gleichgewichtsfläche auf Tafel III jener Abhandlung). Es ist das Verhältniss $\frac{D_2}{D_0}$ angegeben, weil in dem vorliegenden Falle $D_0 > D_2$ ist. Man kann aber hieraus, wie beiläufig bemerkt sein mag, sofort den Werth des reciproken Verhältnisses $\frac{D_0}{D_2}$ berechnen; derselbe ist gleich $1 : +0{,}610$ oder $+1{,}64$. Da $\frac{D_1}{D_2} = \frac{D_0}{D_2} - 1$, so folgt ferner hieraus $\frac{D_1}{D_2} = +0{,}64$. Die Schwere sucht im vorliegenden Falle, wie man ohne Weiteres erkennt, sowohl den Oberarm als auch den Unterarm in die Stellung überzuführen, bei welcher die Längsaxen beider vertical nach unten gerichtet sind; man würde also vielleicht vermuthen, dass die Schwere bei der an-

gegebenen Haltung des Armes sowohl im Schultergelenk als auch im Ellbogengelenk eine Streckbewegung hervorbringen muss. Setzt man nun den Werth $+ 0{,}610$ für $\frac{D_2}{D_0}$ in die vierte Form für das Drehungsverhältniss (Seite 513) ein und beachtet, dass $\cos 30^0 = 0{,}866$ ist, so erhält man

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{-0{,}180}{+1{,}120} = -0{,}16 .$$

Da $D_0$ selbst negativ ist, weil die durch den Gesammtschwerpunkt $S_0$ des Armes gehende Schwerlinie vor dem Schultergelenkmittelpunkt vorüberzieht, so wird nach dem oben (Seite 518) aufgestellten Kriterium $\varphi_1''$ einen positiven, dagegen $\psi''$ einen negativen Werth besitzen. Das heisst aber, es wird die Schwere im vorliegenden Falle zwar das Ellbogengelenk strecken, wie zu erwarten war, dagegen wird im Schultergelenk Beugung eintreten, trotzdem die Schwere bestrebt ist, eine Streckung hervorzubringen. Der Grund für diese auf den ersten Augenblick etwas sonderbar erscheinende Thatsache ist wiederum ausschliesslich in der gegenseitigen Beeinflussung der beiden Abschnitte des Armes bei der Bewegung zu suchen. Nimmt man wieder an, um sich diese Gelenkbewegung besser veranschaulichen zu können, dass während einer Streckung des Ellbogengelenks um $30^0$ die Verhältnisse sich nicht änderten, so würde diese Streckung des Ellbogengelenks eine Beugung von $30^0 \cdot 0{,}16$ oder $4^0\,50'$ im Schultergelenk nach sich ziehen, so wie es die nebenstehende Figur 8 veranschaulicht.

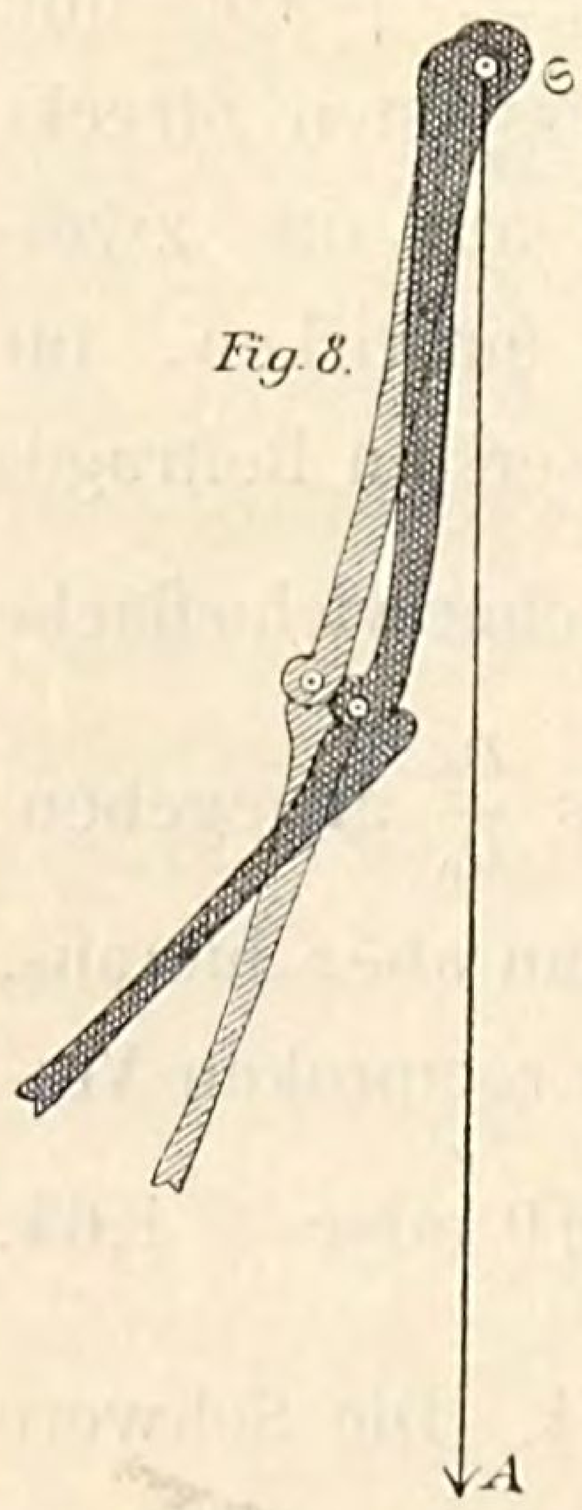


Fig. 8.

Noch merkwürdiger mag vielleicht der ebenfalls unter Umständen realisirte Fall erscheinen, dass die Schwere, trotzdem sie in beiden Gelenken scheinbar Streckung hervorzubringen bestrebt ist, doch das Ellbogengelenk beugt. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn der Oberarm bis zur horizontalen Stellung seiner Längsaxe erhoben ($\varphi_1 = + 90^0$) ist, und der Unterarm zwischen der äussersten Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung im Ellbogengelenk gebeugt ist, etwa wieder um $30^0$ aus der äussersten Streckstellung

($\psi = 30^0$), so wie es die Anfangsstellung des Armes in Figur 9 veranschaulicht. Die Tabelle auf Seite 354 und 355 des ersten Beitrags zur Muskelstatik ergiebt für $\varphi = + 90^0$, $\psi = 30^0$ als Wert von $\frac{D_2}{D_0} = + 0{,}268$. Setzt man denselben in die vierte Form für das Drehungsverhältniss (Seite 513) ein, so ergiebt die Rechnung

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = \frac{+ 0{,}422}{- 0{,}495} = - 0{,}85.$$

Da $D_0$ im vorliegenden Falle wiederum negativ ist, so besitzt nach Seite 518 jetzt $\varphi_1''$ einen negativen, dagegen $\psi''$ einen positiven Werth. Das heisst aber nichts anderes, als dass zwar das Schultergelenk gestreckt, dagegen das Ellbogengelenk gebeugt wird. Es zeigt sich hier wiederum recht deutlich, dass die mechanischen Verhältnisse bei freier Beweglichkeit der beiden Gelenke ganz andere sind, als wenn beispielsweise der Oberarm in seiner horizontalen Lage durch besondere Kräfte fixirt worden wäre; in dem letzteren Falle würde dann selbstverständlich nur Streckung des Ellbogengelenks durch die Schwere hervorgerufen werden können, wenn $\psi$ zwischen $0^0$ und $90^0$ liegt. Die Beugung des Ellbogengelenks, welche bei freier Beweglichkeit beider Gelenke durch die Schwere hervorgebracht wird, ist keineswegs sehr gering, sie ist im Gegentheil grösser als die Streckung des Schultergelenks, wie aus dem Werthe 0,85 für das Drehungsverhältniss hervorgeht. Nimmt man zur Veranschaulichung der in diesem Falle eintretenden Gelenkbewegung wiederum an, dass die mechanischen Verhältnisse während einer Beugung von $30^0$ im Ellbogengelenk die gleichen blieben, so würden auf $30^0$ Beugung des Ellbogengelenks $30^0 \cdot 0{,}85$ oder $25^0 30'$ Streckung des Schultergelenks kommen, wie es die Figur 9 andeutet.

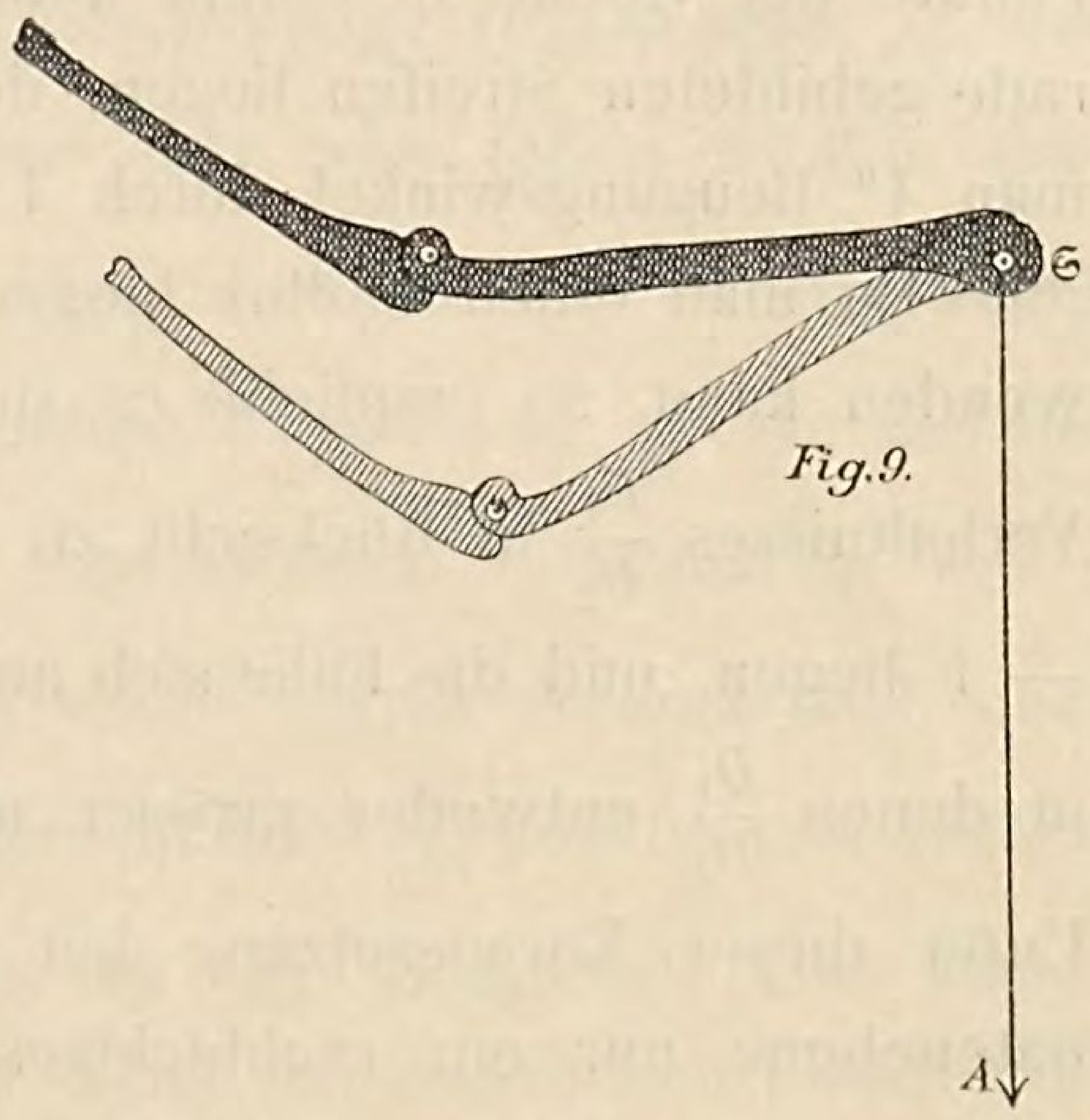


Fig. 9.

Die wenigen Beispiele werden genügen, um zu erkennen, dass der Zusammenhang zwischen den Drehungsmomenten und den eintretenden Gelenkbewegungen ein ziemlich verwickelter ist, und dass

die Bestimmung des Drehungsverhältnisses und der Art der Gelenkbewegungen im gegebenen Falle mit Hülfe der Formeln immerhin einige Rechnung erfordert. Es ist daher wünschenswerth, eine Methode aufzusuchen, nach der man kürzer zum Ziele kommt, als wenn man jedesmal wieder von Neuem sich der Rechnung unterzieht. Eine solche Methode ist in der graphischen Darstellung der Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses von dem Beugungswinkel $\psi$ im Ellbogengelenk und dem Verhältniss der Drehungsmomente gegeben.

Da das Drehungsverhältniss von zwei Veränderlichen abhängt, so lässt sich diese Abhängigkeit nicht durch eine einzige Curve, sondern nur durch eine Fläche darstellen. Bezieht man die Punkte einer Ebene, welche der besseren Anschaulichkeit wegen eine horizontale Lage besitzen möge, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, bei welchem die Abscissen den Werthen des Beugungswinkels $\psi$ im Ellbogengelenk und die Ordinaten den Werthen des Verhältnisses $\frac{D_1}{D_2}$ der Drehungsmomente proportional sind, so entspricht jeder möglichen Combination von $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ ein bestimmter Punkt dieser Ebene. Da $\psi$ nur zwischen $0^0$ und $150^0$ variiren kann, dagegen für die Werthe von $\frac{D_1}{D_2}$ gar keine Grenzen existiren, so würden alle diese Punkte der Ebene in einem unbegrenzten durch zwei parallele Gerade gebildeten Streifen liegen, dessen Breite 150 mm beträgt, wenn man $1^0$ Beugungswinkel durch 1 mm dargestellt hat.

Da man einen endlos langen Papierstreifen natürlich nicht verwenden kann, so empfiehlt es sich, zunächst nur solche Werthe des Verhältnisses $\frac{D_1}{D_2}$ in Rücksicht zu ziehen, welche zwischen $+1$ und $-1$ liegen, und die Fälle sich auf andere Weise zu veranschaulichen, in denen $\frac{D_1}{D_2}$ entweder grösser als $+1$ oder kleiner als $-1$ ist. Unter dieser Voraussetzung hat man von der horizontalen Coordinatenebene nur ein rechteckiges Stück nöthig, dessen Breite, wie schon gesagt, 150 mm und dessen Höhe 200 mm beträgt, wenn man den Verhältnisswerth 1 durch 1 dm und in Folge dessen die Verhältnisswerthe 0,1; 0,2; · · · 0,01; 0,02 u. s. f. durch Längen von 1 cm; 2 cm; . . . 1 mm; 2 mm u. s. f. darstellt. Diesem Zwecke

dient das rechteckige in Quadratmillimeter eingetheilte Feld auf der linken Seite von Tafel II. Die Abscissenaxe des Coordinatensystems ist die mittelste Horizontallinie und die Ordinatenaxe wird durch die linke Seite des Rechtecks in der Weise dargestellt, dass die positiven Werthe des Verhältnisses $\frac{D_1}{D_2}$ von der Mitte aus nach oben und die negativen nach unten abgetragen sind.

In den Fällen, wo der absolute Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ sich grösser wie 1 herausstellt, d. h. also wenn vom Vorzeichen abgesehen, $D_1 > D_2$ ist, empfiehlt es sich, wie schon früher bei der Aufstellung der verschiedenen Formen des Ausdrucks für $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ hervorgehoben wurde, das reciproke Verhältniss $\frac{D_2}{D_1}$ zu verwenden. Berücksichtigt man dann wiederum nur Werthe von $\frac{D_2}{D_1}$, welche zwischen $+1$ und $-1$ liegen, so kann man die möglichen Combinationen von $\psi$ und $\frac{D_2}{D_1}$ in ganz entsprechender Weise den Punkten eines rechteckigen Coordinatennetzes von 150 mm Breite und 200 mm Höhe zuordnen. Diesem Zwecke dient das rechteckige in Quadratmillimeter eingetheilte Feld auf der rechten Seite von Tafel II. Die beiden Felder der Tafel II ersetzen vollständig den einen unendlich langen Streifen von 150 mm Breite.

Die beiden Coordinatennetze kann man nun in der Weise zur Veranschaulichung der Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ von $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ verwenden, dass man von jedem Punkte derselben aus sich eine Länge vertical nach oben oder unten abgetragen denkt, die proportional dem bestimmten Werthe von $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ ist, welcher zu der dem betreffenden Punkte zugeordneten Combination von $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ gehört. Diese Strecken mögen vertical nach oben abgetragen sein, wenn das Drehungsverhältniss $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ positiv, und vertical nach unten, wenn dasselbe negativ ist. Die Endpunkte aller dieser verticalen Coordinaten liegen auf je einer continuirlichen Fläche, die eine deutliche Anschauung von der Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ von $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ im einen Falle (Tafel II linke Seite) und von $\psi$ und $\frac{D_2}{D_1}$ im anderen Falle (Tafel II rechte Seite) ver-

mittelt. Zur Berechnung der verticalen Coordinaten hat man im einen Falle die erste Form, im anderen die zweite Form des Ausdrucks für $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ (Seite 513) zu verwenden.

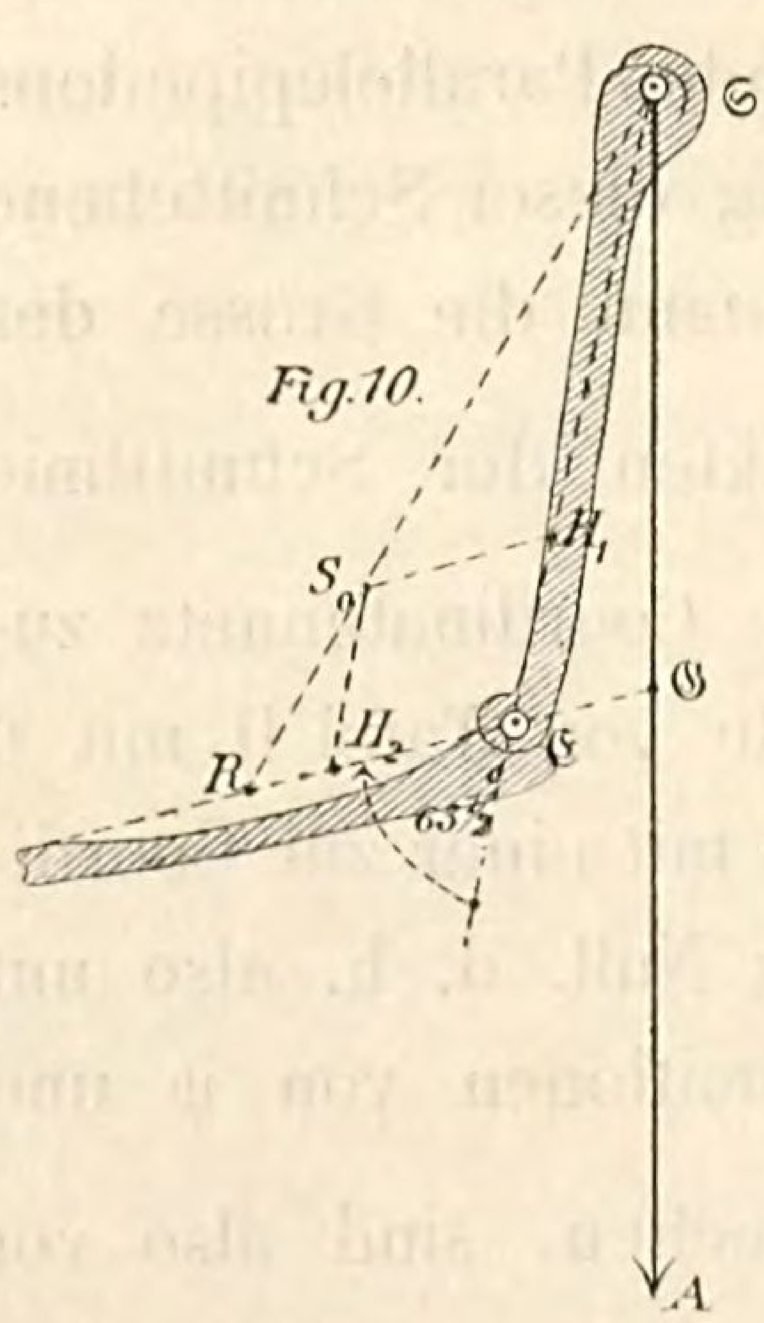
Die auf den beiden Coordinatennetzen aufgebauten Flächen können sich nun an manchen Stellen sehr weit von dem Coordinatennetz entfernen, nämlich wenn $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ sehr grosse Werthe annimmt, sie werden sich sogar bis ins Unendliche erstrecken, wenn $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ unendlich gross wird. Hierdurch wird wiederum die Anschaulichkeit beeinträchtigt und der Ueberblick über die Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses von den beiden Veränderlichen erschwert. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, in gleicher Weise, wie dies bei der Construction der Gleichgewichtsfläche im ersten Beitrage zur Muskelstatik geschehen ist, nur den Theil einer jeden der beiden Flächen zu construiren, für welchen der absolute Werth von $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ kleiner als 1 ist. Stellt man auch hier den Werth 1 des Drehungsverhältnisses durch eine Länge von 1 dm dar, so wird sich dieser Theil nur bis höchstens 1 dm nach oben oder unten von seinem Coordinatennetz entfernen können; er wird innerhalb eines rechtwinkligen Parallelepipedons von 200 mm Höhe liegen, für welches das horizontale Coordinatennetz auf Tafel II den in der Mitte zwischen den beiden horizontalen Grundflächen verlaufenden Querschnitt darstellt. Den anderen Theil einer jeden der beiden Flächen, welcher über dieses Parallelepipedon hinausgehen würde, ersetzt man dann zweckmässiger Weise durch den entsprechenden Theil einer Fläche, welche das reciproke Verhältniss $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ veranschaulicht. Auf diese Weise bekommt man zu jedem der beiden Coordinatennetze auf Tafel II eine aus zwei in einer Linie zusammenstossenden Theilen bestehende Fläche, welche vollständig im Innern des Parallelepipedons von 200 mm Höhe gelegen ist und daher sich sehr gut eignet, eine deutliche Anschauung der Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ vom Beugungswinkel $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ zu vermitteln.

Um mit dieser Fläche operiren zu können, ohne sich ein Modell derselben zu verschaffen, muss man sie in geeigneter Weise auf eine

oder mehrere Ebenen projiciren. Eine derartige Projection vermag nur dann eine Anschauung von der Gestalt der Fläche zu geben, wenn man sich auf der letzteren ein System von Linien nach irgend welchem Princip aufgezeichnet denkt und diese Linien auf die betreffende Ebene projicirt. Dies kann auf die mannigfaltigste Weise geschehen, wie aus den verschiedenen Darstellungen der Gleichgewichtsfläche im ersten Beitrage zur Muskelstatik zu ersehen ist. Am anschaulichsten und für den in der Vorstellung räumlicher Gebilde weniger Geübten am leichtesten verständlich dürfte die in der Topographie allgemein verwendete Darstellung einer Fläche durch ihre Niveaulinien sein. Dieselbe soll daher allein für den jetzigen Zweck zur Verwendung kommen.

Niveaulinie würde man im vorliegenden Falle eine jede Linie auf der einen oder anderen Fläche zu nennen haben, deren Punkte von der horizontalen Coordinatenebene auf der linken oder rechten Seite von Tafel II sämmtlich die gleiche Entfernung besitzen. Man bekommt daher stets eine solche Niveaulinie, wenn man die Fläche mit einer zu der Coordinatenebene oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, zu den beiden Grundflächen des umgebenden Parallelepipedons parallelen Ebene durchschneidet. Die Entfernung dieser Schnittebene von der horizontalen Coordinatenebene giebt dann die Grösse des Drehungsverhältnisses $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ an, welche den Punkten der Schnittlinie bezüglich deren Projection auf das horizontale Coordinatennetz zukommt. So stellt z. B. die auf der linken Seite von Tafel II mit 0 bezeichnete starke Curve den Schnitt der Fläche mit einer zur Coordinatenebene parallelen Ebene in der Entfernung Null, d. h. also mit der Coordinatenebene selbst dar. Die Combinationen von $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$, welche den Punkten dieser Curve entsprechen, sind also vor allen anderen dadurch ausgezeichnet, dass zu ihnen der Werth 0 des Verhältnisses der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk gehört, so dass die Gelenkbewegung in alleiniger Drehung des Ell bogengelenks, ohne gleichzeitige Drehung des Schultergelenks, besteht. Da die Curve durch den zu $\psi = 90^0$, $\frac{D_1}{D_2} = 0$ gehörenden Punkt der Coordinatenebene hindurchgeht, so bestätigt sich unter anderen hier wieder das schon früher (Seite 481) angeführte Resultat, dass

bei rechtwinkliger Beugung im Ellbogengelenk ($\psi = 90^0$) und vertical nach unten gerichteter Oberarmlängsaxe $\left(\frac{D_1}{D_2} = 0\right)$ die Schwere ausnahmsweise nur Drehung im Ellbogengelenk, ohne Veränderung der Gelenkstellung im Schultergelenk, verursacht. Die Curve giebt aber auch alle anderen Fälle an, in denen eine mit Drehungsmomenten $D_1$ und $D_2$ auf Ober- und Unterarm einwirkende Kraftentfaltung keine Drehung im Schultergelenk hervorbringt; sie geht zum Beispiel durch den zu $\psi = 63\frac{1}{2}^0$ und $\frac{D_1}{D_2} = +0{,}5$ gehörenden Punkt des Coordinatennetzes. Daraus erkennt man, dass bei einer durch $\psi = 63\frac{1}{2}^0$ gekennzeichneten Beugestellung des Ellbogengelenks keine Einwirkung auf das Schultergelenk ausgeübt wird, wenn $D_1$ gerade halb so gross wie $D_2$ ist. Da aus $\frac{D_1}{D_2} = +0{,}5$ in Folge von $\frac{D_0}{D_2} = \frac{D_1}{D_2} + 1$ für $\frac{D_0}{D_2}$ der Werth $+1{,}5$ resultirt, so wird dieser Fall bei der Wirkung der Schwere nach den in dem ersten Beitrage zur Muskelstatik niedergelegten Ergebnissen eintreten,


Fig. 10.

wenn bei $63\frac{1}{2}^0$ Beugungswinkel des Ellbogengelenks ein Punkt $\mathfrak{G}$ der nach rückwärts verlängerten Unterarmlängsaxe (Figur 10) vertical unter dem Schultergelenk liegt, dessen Entfernung vom Richtpunkt $R$ des Unterarms $1\frac{1}{2}$ Mal so gross ist, wie die Entfernung des Ellbogengelenkmittelpunktes $\mathfrak{E}$ vom Richtpunkt $R$, so dass also $\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}$ halb so gross wie $\overline{R\mathfrak{E}}$ ist. Zum Verständniss dieses Resultates soll kurz noch einmal angedeutet sein, dass man unter dem »Richtpunkt des Unterarms« denjenigen festen Punkt der Unterarmlängsaxe zu verstehen hat, welcher bei allen Haltungen des Armes mit dem Schultergelenkmittelpunkt $\mathfrak{S}$ und dem Gesammtschwerpunkt $S_0$ des Armes in einer geraden Linie liegt. In Figur 10 ist sowohl die Construction dieses Punktes als auch die Construction des Gesammtschwerpunktes mit Hülfe der beiden Hauptpunkte $H_1$ und $H_2$ angedeutet.

Denkt man sich die auf dem linken oder rechten Coordinaten-

netz auf Tafel II aufgebaute zweitheilige Fläche durch eine Reihe gleichweit von einander abstehender zu der horizontalen Coordinatenebene paralleler Ebenen durchschnitten, so erhält man eine ganze Schaar von Niveaulinien, welche in ihrer Gesammtheit die Gestalt der Fläche um so deutlicher erkennen lassen, je grösser ihre Anzahl ist. Nimmt man als Abstand dieser parallelen Schnittebenen 1 mm, so hat man auf beiden Seiten der Coordinatenebene je 100 Schnittebenen, wenn die Fläche bis an beide Grundflächen des Parallelepipedons heranreicht, wobei natürlich die beiden Grundflächen des Parallelepipedons mit unter die Schnittflächen gerechnet sind. Eine jede dieser Ebenen wird eine Niveaulinie ausschneiden. Dabei kann es vorkommen, dass die letztere aus zwei getrennten Theilen besteht, nämlich wenn die Schnittebene sowohl durch den zu $-1 < \frac{\varphi_1''}{\psi''} < +1$ als auch durch den zu $-1 < \frac{\psi''}{\varphi_1''} < +1$ gehörenden Theil der Fläche hindurchgeht. Da das Verhältniss 1 durch eine Strecke von 1 dm dargestellt ist, so verbinden die beiderseits der mit 0 bezeichneten Niveaulinie gelegenen Niveaulinien Punkte der Fläche, für welche $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ den Werth 0,01 besitzt, und zwar $+ 0{,}01$ oder $- 0{,}01$, je nachdem die Schnittebene über oder unter der Coordinatenebene liegt. Dann folgen einerseits die Niveaulinien mit den Indices $+ 0{,}02$; $+ 0{,}03$; $+ 0{,}04$ u. s. f., andererseits die mit den Indices $- 0{,}02$; $- 0{,}03$; $- 0{,}04$ u. s. f.

Um den Verlauf der Projection einer jeden Niveaulinie auf die horizontale Coordinatenebene mit Genauigkeit aufzeichnen zu können, hat man nur nöthig, die Coordinaten $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ für eine Anzahl von Punkten derselben durch Rechnung zu bestimmen. Dies lässt sich mit Hülfe der Formeln auf Seite 513 leicht erreichen. Da für alle Punkte einer Niveaulinie $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ denselben Werth besitzt, so hat man zu diesem Zwecke den die Niveaulinie charakterisirenden Werth in die erste oder zweite Form auf Seite 513 für $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ einzusetzen, darauf etwa $\psi$ der Reihe nach gleich $0^0$; $5^0$; $10^0$ . . . . bis $150^0$ anzunehmen und dann jedesmal die Formel nach $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ auf-

zulösen, um eine genügende Anzahl zusammengehörender Werthe von $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ zu erhalten, welche die horizontalen Coordinaten von Punkten der betreffenden Niveaulinie darstellen. Die Auflösung der ersten Form nach $\frac{D_1}{D_2}$ ergiebt allgemein:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{(2{,}095 + \cos\psi)\frac{\varphi_1''}{\psi''} + \cos\psi}{(0{,}894 + \cos\psi)\frac{\varphi_1''}{\psi''} + 0{,}894} \quad \text{oder} = \frac{(2{,}095 + \cos\psi) + \cos\psi \cdot \frac{\psi''}{\varphi_1''}}{(0{,}894 + \cos\psi) + 0{,}894 \cdot \frac{\psi''}{\varphi_1''}},$$

je nachdem, abgesehen vom Vorzeichen, $\varphi_1'' < \psi''$ oder $\varphi_1'' > \psi''$ angenommen ist, da es zweckmässig ist, immer mit Verhältnisswerthen zu rechnen, welche zwischen $+1$ und $-1$ liegen. Die Auflösung der zweiten Form auf Seite 513 nach $\frac{D_2}{D_1}$ ergiebt natürlich die reciproken Werthe dieser Ausdrücke, wovon man sich leicht überzeugen kann. Da die parallelen Schnittebenen der zweitheiligen Fläche in Abständen von 1 mm oder 0,01 dm angenommen sind, so erhält man die Formeln, mit welchen die Berechnung der horizontalen Coordinaten einzelner Punkte der zugehörigen Niveaulinie auszuführen ist, indem man der Reihe nach

$$\frac{\varphi_1''}{\psi''} = 0;\ +0{,}01;\ +0{,}02;\ +0{,}03 \cdots\cdot +1{,}00;$$
$$-0{,}01;\ -0{,}02;\ -0{,}03 \cdots\cdot -1{,}00;$$

oder

$$\frac{\psi''}{\varphi_1''} = 0;\ +0{,}01;\ +0{,}02;\ +0{,}03 \cdots\cdot +1{,}00;$$
$$-0{,}01;\ -0{,}02;\ -0{,}03 \cdots\cdot -1{,}00$$

setzt, je nachdem es sich um den Schnitt mit dem Flächentheile handelt, für welchen der absolute Werth von $\frac{\varphi_1''}{\psi''} < 1$ oder mit dem, für welchen der absolute Werth von $\frac{\psi''}{\varphi_1''} < 1$ ist. In jeder dieser zahlreichen Formeln hat man dann noch dem Beugungswinkel $\psi$ successive etwa um $5^0$ auseinanderliegende Werthe beizulegen und jedesmal den zugehörigen Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ zu berechnen. Stellt sich dabei der absolute Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ grösser als 1 heraus,

so braucht man nur denselben in 1 zu dividiren, um den zugehörigen Werth des reciproken Verhältnisses $\frac{D_2}{D_1}$ zu erhalten. Dies bedingt eine sehr grosse Anzahl einzelner Berechnungen. Man kann dieselbe jedoch auf den zehnten Theil reduciren, indem man für $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ und $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ nur die Werthe

$$0;\ +0{,}1;\ +0{,}2\ \cdots\ +1{,}0;\ -0{,}1;\ -0{,}2\ \cdots -1{,}0$$

einsetzt, die hieraus sich ergebenden Horizontalprojectionen der Niveaulinien in das Coordinatennetz auf der linken oder rechten Seite der Tafel II (je nachdem der absolute Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ oder von $\frac{D_2}{D_1}$ kleiner als 1 ausfällt) aufzeichnet, und dann die den Zwischenwerthen $+0{,}01;\ +0{,}02 \cdot\cdot + 0{,}09$ u. s. w. angehörenden Niveaulinien graphisch interpolirt. In dieser Weise ist die Schaar der Niveaulinien auf Tafel II construirt worden. Die Resultate der Berechnung von $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ sind in folgender Tabelle (Seite 530 bis 533) niedergelegt worden, wobei die in dem gebrochenen Linienzug eingeschlossenen Werthe zu $\frac{D_2}{D_1}$, die ausserhalb desselben befindlichen dagegen zu $\frac{D_1}{D_2}$ gehören. Man beachte, dass auf der einen Hälfte der Tabelle (Seite 530 und 531) die zu positiven, auf der anderen (Seite 532 und 533) die zu negativen Werthen von $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ resp. $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ gehörenden Werthe des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente $D_1$, $D_2$ niedergelegt sind, und dass die zweite Hälfte mit Werthen von $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ beginnt, damit dieselbe sich unmittelbar an die erste Hälfte anschliesst.

Werthe des Verhältnisses $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$, welche zu bestimmten Werthen des Drehung

(Die von dem gebrochenen Linienzug eingeschlossen

| $\psi$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = 0$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0,1$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0,2$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0,3$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0,4$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0,5$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0,6$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0,7$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0,8$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = +0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | + 0,894 | + 0,827 | + 0,786 | + 0,758 | + 0,738 | + 0,723 | + 0,711 | + 0,701 | + 0,693 | + 0,686 |
| 5° | + 0,897 | + 0,830 | + 0,788 | + 0,760 | + 0,739 | + 0,723 | + 0,711 | + 0,702 | + 0,694 | + 0,687 |
| 10° | + 0,908 | + 0,837 | + 0,793 | + 0,764 | + 0,742 | + 0,726 | + 0,713 | + 0,703 | + 0,695 | + 0,688 |
| 15° | + 0,926 | + 0,849 | + 0,802 | + 0,771 | + 0,748 | + 0,730 | + 0,717 | + 0,706 | + 0,698 | + 0,690 |
| 20° | + 0,951 | + 0,866 | + 0,815 | + 0,780 | + 0,756 | + 0,737 | + 0,722 | + 0,711 | + 0,701 | + 0,693 |
| 25° | + 0,986 | + 0,891 | + 0,833 | + 0,794 | + 0,766 | + 0,745 | + 0,729 | + 0,716 | + 0,706 | + 0,697 |
| 30° | + 0,969 | + 0,921 | + 0,855 | + 0,811 | + 0,780 | + 0,756 | + 0,738 | + 0,723 | + 0,712 | + 0,702 |
| 35° | + 0,916 | + 0,959 | + 0,882 | + 0,832 | + 0,795 | + 0,769 | + 0,749 | + 0,732 | + 0,719 | + 0,708 |
| 40° | + 0,857 | + 0,992 | + 0,916 | + 0,857 | + 0,816 | + 0,785 | + 0,761 | + 0,743 | + 0,727 | + 0,715 |
| 45° | + 0,791 | + 0,936 | + 0,958 | + 0,888 | + 0,839 | + 0,804 | + 0,777 | + 0,755 | + 0,738 | + 0,723 |
| 50° | + 0,719 | + 0,875 | + 0,992 | + 0,926 | + 0,868 | + 0,827 | + 0,794 | + 0,770 | + 0,750 | + 0,733 |
| 55° | + 0,642 | + 0,808 | + 0,933 | + 0,970 | + 0,902 | + 0,853 | + 0,816 | + 0,787 | + 0,763 | + 0,744 |
| 60° | + 0,559 | + 0,736 | + 0,869 | + 0,975 | + 0,944 | + 0,885 | + 0,841 | + 0,807 | + 0,780 | + 0,758 |
| 65° | + 0,473 | + 0,658 | + 0,801 | + 0,914 | + 0,994 | + 0,923 | + 0,871 | + 0,831 | + 0,799 | + 0,773 |
| 70° | + 0,383 | + 0,576 | + 0,727 | + 0,848 | + 0,949 | + 0,969 | + 0,907 | + 0,859 | + 0,822 | + 0,791 |
| 75° | + 0,290 | + 0,490 | + 0,649 | + 0,778 | + 0,886 | + 0,976 | + 0,949 | + 0,892 | + 0,848 | + 0,812 |
| 80° | + 0,194 | + 0,410 | + 0,567 | + 0,704 | + 0,819 | + 0,917 | + 1,000 | + 0,932 | + 0,879 | + 0,837 |
| 85° | + 0,097 | + 0,307 | + 0,480 | + 0,625 | + 0,747 | + 0,851 | + 0,941 | + 0,980 | + 0,916 | + 0,86 |
| 90° | 0 | + 0,214 | + 0,390 | + 0,541 | + 0,669 | + 0,782 | + 0,879 | + 0,965 | + 0,960 | + 0,90 |
| 95° | − 0,097 | + 0,117 | + 0,299 | + 0,453 | + 0,588 | + 0,706 | + 0,811 | + 0,904 | + 0,986 | + 0,94 |
| 100° | − 0,194 | + 0,019 | + 0,202 | + 0,362 | + 0,503 | + 0,628 | + 0,738 | + 0,838 | + 0,927 | + 0,99 |
| 105° | − 0,290 | − 0,078 | + 0,106 | + 0,269 | + 0,414 | + 0,544 | + 0,661 | + 0,766 | + 0,863 | + 0,95 |
| 110° | − 0,383 | − 0,176 | + 0,009 | + 0,174 | + 0,322 | + 0,457 | + 0,580 | + 0,691 | + 0,793 | + 0,88 |
| 115° | − 0,473 | − 0,272 | − 0,090 | + 0,076 | + 0,227 | + 0,365 | + 0,493 | + 0,610 | + 0,720 | + 0,821 |
| 120° | − 0,559 | − 0,364 | − 0,186 | − 0,021 | + 0,131 | + 0,273 | + 0,404 | + 0,527 | + 0,642 | + 0,74 |
| 125° | − 0,612 | − 0,456 | − 0,282 | − 0,119 | + 0,033 | + 0,177 | + 0,312 | + 0,439 | + 0,559 | + 0,67 |
| 130° | − 0,719 | − 0,542 | − 0,374 | − 0,214 | − 0,062 | + 0,081 | + 0,218 | + 0,349 | + 0,474 | + 0,59 |
| 135° | − 0,791 | − 0,622 | − 0,461 | − 0,306 | − 0,157 | − 0,013 | + 0,125 | + 0,259 | + 0,386 | + 0,51 |
| 140° | − 0,857 | − 0,698 | − 0,543 | − 0,394 | − 0,248 | − 0,105 | + 0,032 | + 0,167 | + 0,298 | + 0,42 |
| 145° | − 0,916 | − 0,766 | − 0,620 | − 0,475 | − 0,334 | − 0,194 | − 0,056 | + 0,078 | + 0,212 | + 0,34 |
| 150° | − 0,969 | − 0,828 | − 0,689 | − 0,551 | − 0,413 | − 0,276 | − 0,142 | − 0,007 | + 0,128 | + 0,26 |

(Fortsetzung dieser Tabelle

Mit Hülfe der Niveaulinien auf Tafel II ist es nun leicht, sich eine deutliche Vorstellung von jeder der beiden aus je zwei aneinanderstossenden Theilen zusammengesetzten Flächen zu verschaffen. Man erkennt, dass die auf das linke Coordinatennetz aufgebaute Fläche nicht bis zur unteren Grundfläche des Parallelepipedons reicht; sie beginnt in der Ecke links unten 0,38 dm unter der Coordinatenebene, steigt von da im Anfang flach (da die Niveaulinien zuerst weit auseinander liegen), dann immer steiler bis zur oberen Grundfläche des Parallelepipedons empor, nachdem sie in der (stark gezeichneten)

…rhältnisses $\frac{\varphi''_1}{\psi''}$ resp. $\frac{\psi''}{\varphi''_1}$ und des Beugungswinkels $\psi$ des Ellbogengelenks gehören.

…rthe gehören sämmtlich zu dem Verhältniss $\frac{D_2}{D_1}$.)

| $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +1{,}0$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}9$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}8$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}7$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}6$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}5$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}4$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}3$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}2$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = +0{,}1$ | $\psi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + 0,681 | + 0,676 | + 0,670 | + 0,664 | + 0,658 | + 0,651 | + 0,644 | + 0,637 | + 0,629 | + 0,621 | 0° |
| + 0,681 | + 0,676 | + 0,670 | + 0,664 | + 0,658 | + 0,651 | + 0,644 | + 0,637 | + 0,629 | + 0,620 | 5° |
| + 0,682 | + 0,677 | + 0,671 | + 0,665 | + 0,658 | + 0,651 | + 0,644 | + 0,636 | + 0,628 | + 0,619 | 10° |
| + 0,684 | + 0,678 | + 0,672 | + 0,665 | + 0,658 | + 0,651 | + 0,643 | + 0,635 | + 0,627 | + 0,617 | 15° |
| + 0,686 | + 0,680 | + 0,673 | + 0,666 | + 0,659 | + 0,651 | + 0,643 | + 0,634 | + 0,625 | + 0,615 | 20° |
| + 0,690 | + 0,682 | + 0,675 | + 0,667 | + 0,659 | + 0,651 | + 0,642 | + 0,632 | + 0,622 | + 0,610 | 25° |
| + 0,693 | + 0,686 | + 0,677 | + 0,669 | + 0,660 | + 0,650 | + 0,640 | + 0,630 | + 0,619 | + 0,607 | 30° |
| + 0,698 | + 0,690 | + 0,680 | + 0,671 | + 0,660 | + 0,650 | + 0,639 | + 0,627 | + 0,615 | + 0,601 | 35° |
| + 0,704 | + 0,694 | + 0,684 | + 0,673 | + 0,661 | + 0,650 | + 0,637 | + 0,624 | + 0,610 | + 0,595 | 40° |
| + 0,711 | + 0,700 | + 0,688 | + 0,675 | + 0,662 | + 0,649 | + 0,635 | + 0,620 | + 0,605 | + 0,588 | 45° |
| + 0,719 | + 0,706 | + 0,693 | + 0,678 | + 0,664 | + 0,649 | + 0,633 | + 0,616 | + 0,599 | + 0,580 | 50° |
| + 0,728 | + 0,714 | + 0,698 | + 0,682 | + 0,665 | + 0,648 | + 0,630 | + 0,611 | + 0,592 | + 0,571 | 55° |
| + 0,739 | + 0,722 | + 0,704 | + 0,686 | + 0,667 | + 0,647 | + 0,627 | + 0,605 | + 0,584 | + 0,561 | 60° |
| + 0,752 | + 0,732 | + 0,711 | + 0,690 | + 0,669 | + 0,646 | + 0,623 | + 0,599 | + 0,575 | + 0,549 | 65° |
| + 0,766 | + 0,744 | + 0,720 | + 0,696 | + 0,671 | + 0,645 | + 0,619 | + 0,592 | + 0,565 | + 0,536 | 70° |
| + 0,783 | + 0,757 | + 0,729 | + 0,702 | + 0,673 | + 0,644 | + 0,615 | + 0,584 | + 0,554 | + 0,522 | 75° |
| + 0,803 | + 0,772 | + 0,740 | + 0,708 | + 0,676 | + 0,643 | + 0,610 | + 0,576 | + 0,541 | + 0,506 | 80° |
| + 0,826 | + 0,790 | + 0,753 | + 0,716 | + 0,679 | + 0,642 | + 0,604 | + 0,566 | + 0,528 | + 0,488 | 85° |
| + 0,853 | + 0,811 | + 0,768 | + 0,726 | + 0,683 | + 0,640 | + 0,598 | + 0,555 | + 0,512 | + 0,469 | 90° |
| + 0,885 | + 0,835 | + 0,785 | + 0,736 | + 0,687 | + 0,638 | + 0,590 | + 0,542 | + 0,495 | + 0,448 | 95° |
| + 0,924 | + 0,864 | + 0,805 | + 0,748 | + 0,691 | + 0,636 | + 0,582 | + 0,529 | + 0,477 | + 0,425 | 100° |
| + 0,970 | + 0,898 | + 0,829 | + 0,762 | + 0,697 | + 0,634 | + 0,573 | + 0,514 | + 0,456 | + 0,400 | 105° |
| + 0,976 | + 0,939 | + 0,857 | + 0,778 | + 0,703 | + 0,631 | + 0,563 | + 0,497 | + 0,434 | + 0,373 | 110° |
| + 0,915 | + 0,988 | + 0,889 | + 0,797 | + 0,710 | + 0,628 | + 0,552 | + 0,478 | + 0,410 | + 0,344 | 115° |
| + 0,850 | + 0,955 | + 0,928 | + 0,819 | + 0,718 | + 0,625 | + 0,539 | + 0,458 | + 0,383 | + 0,313 | 120° |
| + 0,780 | + 0,893 | + 0,975 | + 0,845 | + 0,727 | + 0,621 | + 0,525 | + 0,436 | + 0,355 | + 0,279 | 125° |
| + 0,707 | + 0,826 | + 0,971 | + 0,875 | + 0,738 | + 0,617 | + 0,510 | + 0,414 | + 0,325 | + 0,245 | 130° |
| + 0,630 | + 0,758 | + 0,911 | + 0,910 | + 0,750 | + 0,613 | + 0,493 | + 0,387 | + 0,294 | + 0,210 | 135° |
| + 0,551 | + 0,686 | + 0,849 | + 0,951 | + 0,764 | + 0,608 | + 0,475 | + 0,360 | + 0,261 | + 0,173 | 140° |
| + 0,472 | + 0,613 | + 0,786 | + 0,997 | + 0,778 | + 0,603 | + 0,457 | + 0,333 | + 0,228 | + 0,137 | 145° |
| + 0,394 | + 0,540 | + 0,721 | + 0,953 | + 0,795 | + 0,597 | + 0,437 | + 0,305 | + 0,196 | + 0,102 | 150° |

…uf Seite 532 und 533.)

Niveaulinie mit dem Index 0 die Coordinatenebene passirt hat. Dieser Theil der Fläche gehört zu dem Drehungsverhältniss $\frac{\varphi''_1}{\psi''}$. In der oberen Grundfläche grenzt längs der Niveaulinie mit dem Index + 1,0 der andere zu $\frac{\psi''}{\varphi''_1}$ gehörende Theil der Fläche an; der letztere senkt sich von der gemeinsamen Grenzcurve an nach unten und erreicht über der rechten oberen Ecke des Coordinatennetzes in einer Höhe von 0,68 dm seine tiefste Stelle.

| $\psi$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = 0$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -0{,}1$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -0{,}2$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -0{,}3$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -0{,}4$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -0{,}5$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -0{,}6$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -0{,}7$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -0{,}8$ | $\frac{\psi''}{\varphi''_1} = -$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | + 0,612 | + 0,603 | + 0,592 | + 0,582 | + 0,570 | + 0,558 | + 0,544 | + 0,529 | + 0,514 | + 0,49 |
| 5° | + 0,611 | + 0,602 | + 0,592 | + 0,581 | + 0,569 | + 0,556 | + 0,543 | + 0,528 | + 0,512 | + 0,49 |
| 10° | + 0,610 | + 0,600 | + 0,590 | + 0,578 | + 0,566 | + 0,553 | + 0,540 | + 0,524 | + 0,508 | + 0,49 |
| 15° | + 0,608 | + 0,597 | + 0,586 | + 0,575 | + 0,561 | + 0,548 | + 0,534 | + 0,517 | + 0,500 | + 0,48 |
| 20° | + 0,604 | + 0,593 | + 0,581 | + 0,569 | + 0,555 | + 0,541 | + 0,525 | + 0,508 | + 0,490 | + 0,47 |
| 25° | + 0,600 | + 0,588 | + 0,575 | + 0,561 | + 0,547 | + 0,531 | + 0,514 | + 0,496 | + 0,477 | + 0,4 |
| 30° | + 0,594 | + 0,581 | + 0,567 | + 0,552 | + 0,536 | + 0,519 | + 0,501 | + 0,482 | + 0,461 | + 0,43 |
| 35° | + 0,588 | + 0,573 | + 0,558 | + 0,542 | + 0,524 | + 0,506 | + 0,486 | + 0,464 | + 0,442 | + 0,4 |
| 40° | + 0,580 | + 0,564 | + 0,547 | + 0,529 | + 0,510 | + 0,490 | + 0,468 | + 0,445 | + 0,420 | + 0,3 |
| 45° | + 0,571 | + 0,554 | + 0,534 | + 0,515 | + 0,493 | + 0,471 | + 0,448 | + 0,423 | + 0,396 | + 0,3 |
| 50° | + 0,561 | + 0,542 | + 0,521 | + 0,499 | + 0,475 | + 0,451 | + 0,426 | + 0,398 | + 0,370 | + 0,3 |
| 55° | + 0,550 | + 0,528 | + 0,505 | + 0,481 | + 0,455 | + 0,429 | + 0,401 | + 0,371 | + 0,341 | + 0,3 |
| 60° | + 0,537 | + 0,513 | + 0,487 | + 0,461 | + 0,433 | + 0,404 | + 0,374 | + 0,342 | + 0,309 | + 0,2 |
| 65° | + 0,523 | + 0,196 | + 0,468 | + 0,439 | + 0,408 | + 0,377 | + 0,345 | + 0,311 | + 0,276 | + 0,2 |
| 70° | + 0,507 | + 0,477 | + 0,446 | + 0,415 | + 0,382 | + 0,348 | + 0,314 | + 0,278 | + 0,241 | + 0,2 |
| 75° | + 0,490 | + 0,457 | + 0,423 | + 0,389 | + 0,353 | + 0,317 | + 0,281 | + 0,243 | + 0,204 | + 0,1 |
| 80° | + 0,471 | + 0,435 | + 0,398 | + 0,361 | + 0,323 | + 0,285 | + 0,246 | + 0,206 | + 0,166 | + 0,1 |
| 85° | + 0,450 | + 0,410 | + 0,370 | + 0,331 | + 0,290 | + 0,250 | + 0,209 | + 0,167 | + 0,126 | + 0,0 |
| 90° | + 0,427 | + 0,384 | + 0,341 | + 0,299 | + 0,256 | + 0,213 | + 0,171 | + 0,128 | + 0,085 | + 0,0 |
| 95° | + 0,402 | + 0,356 | + 0,310 | + 0,265 | + 0,220 | + 0,175 | + 0,132 | + 0,087 | + 0,044 | + 0,0 |
| 100° | + 0,375 | + 0,326 | + 0,277 | + 0,229 | + 0,182 | + 0,136 | + 0,091 | + 0,046 | + 0,002 | − 0,0 |
| 105° | + 0,346 | + 0,293 | + 0,242 | + 0,192 | + 0,143 | + 0,096 | + 0,050 | + 0,004 | − 0,039 | − 0,0 |
| 110° | + 0,315 | + 0,259 | + 0,205 | + 0,153 | + 0,103 | + 0,055 | + 0,008 | − 0,037 | − 0,080 | − 0,1 |
| 115° | + 0,282 | + 0,223 | + 0,166 | + 0,113 | + 0,061 | + 0,013 | − 0,034 | − 0,079 | − 0,121 | − 0,1 |
| 120° | + 0,247 | + 0,185 | + 0,127 | + 0,072 | + 0,020 | − 0,029 | − 0,075 | − 0,119 | − 0,161 | − 0,2 |
| 125° | + 0,210 | + 0,146 | + 0,086 | + 0,031 | − 0,022 | − 0,070 | − 0,116 | − 0,159 | − 0,199 | − 0,2 |
| 130° | + 0,173 | + 0,107 | + 0,046 | − 0,010 | − 0,063 | − 0,111 | − 0,155 | − 0,197 | − 0,236 | − 0,2 |
| 135° | + 0,135 | + 0,067 | + 0,005 | − 0,051 | − 0,102 | − 0,149 | − 0,193 | − 0,233 | − 0,270 | − 0,3 |
| 140° | + 0,096 | + 0,028 | − 0,034 | − 0,090 | − 0,141 | − 0,186 | − 0,228 | − 0,267 | − 0,302 | − 0,3 |
| 145° | + 0,059 | − 0,010 | − 0,072 | − 0,127 | − 0,176 | − 0,221 | − 0,261 | − 0,298 | − 0,331 | − 0,3 |
| 150° | + 0,023 | − 0,046 | − 0,108 | − 0,161 | − 0,210 | − 0,252 | − 0,290 | − 0,326 | − 0,357 | − 0,3 |

Etwas verwickelter ist die Gestalt der auf dem rechten Coordinatennetz aufgebauten Fläche. Dieselbe besteht scheinbar aus drei Theilen, von denen jedoch die beiden äussersten insofern zusammengehören, als sie dem Verhältnis $\frac{\varphi''_1}{\psi''}$ entsprechen, während der mittlere Theil allein dem reciproken Verhältniss $\frac{\psi''}{\varphi''_1}$ angehört. Dieser mittlere Theil reicht bis an beide Grundflächen des Parallelepipedons heran. Er beginnt unten in der Niveaulinie mit dem Index $-1{,}0$ und endigt oben in der Niveaulinie mit dem Index $+1{,}0$, nachdem er in der zwischen beiden liegenden Niveaulinie mit dem Index 0 das Coordinatennetz durchsetzt hat; dabei ist sein Verlauf sehr steil, wie man aus dem Abstand der zugehörigen Niveaulinien erkennt,

| $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -1{,}0$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}9$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}8$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}7$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}6$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}5$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}4$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}3$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}2$ | $\frac{\varphi''_1}{\psi''} = -0{,}1$ | $\psi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + 0,477 | + 0,454 | + 0,421 | + 0,370 | + 0,282 | + 0,097 | − 0,571 | + 0,218 | + 0,739 | + 0,979 | 0° |
| + 0,476 | + 0,452 | + 0,418 | + 0,367 | + 0,279 | + 0,093 | − 0,575 | + 0,211 | + 0,733 | + 0,974 | 5° |
| + 0,470 | + 0,446 | + 0,412 | + 0,360 | + 0,270 | + 0,083 | − 0,575 | + 0,185 | + 0,712 | + 0,959 | 10° |
| + 0,461 | + 0,436 | + 0,401 | + 0,347 | + 0,255 | + 0,064 | − 0,581 | + 0,143 | + 0,678 | + 0,932 | 15° |
| + 0,449 | + 0,422 | + 0,385 | + 0,329 | + 0,234 | + 0,040 | − 0,584 | + 0,084 | + 0,632 | + 0,895 | 20° |
| + 0,433 | + 0,404 | + 0,365 | + 0,306 | + 0,208 | + 0,010 | − 0,592 | + 0,017 | + 0,573 | + 0,849 | 25° |
| + 0,413 | + 0,384 | + 0,342 | + 0,280 | + 0,178 | − 0,023 | − 0,597 | − 0,060 | + 0,506 | + 0,794 | 30° |
| + 0,391 | + 0,359 | + 0,315 | + 0,250 | + 0,144 | − 0,058 | − 0,602 | − 0,145 | + 0,428 | + 0,730 | 35° |
| + 0,366 | + 0,332 | + 0,285 | + 0,217 | + 0,107 | − 0,096 | − 0,608 | − 0,232 | + 0,345 | + 0,659 | 40° |
| + 0,338 | + 0,301 | + 0,252 | + 0,181 | + 0,069 | − 0,134 | − 0,614 | − 0,324 | + 0,256 | + 0,576 | 45° |
| + 0,307 | + 0,269 | + 0,217 | + 0,143 | + 0,028 | − 0,172 | − 0,617 | − 0,411 | + 0,162 | + 0,499 | 50° |
| + 0,274 | + 0,231 | + 0,179 | + 0,104 | − 0,013 | − 0,210 | − 0,621 | − 0,500 | + 0,067 | + 0,411 | 55° |
| + 0,239 | + 0,197 | + 0,140 | + 0,063 | − 0,055 | − 0,247 | − 0,625 | − 0,586 | − 0,031 | + 0,318 | 60° |
| + 0,202 | + 0,158 | + 0,101 | + 0,021 | − 0,096 | − 0,281 | − 0,628 | − 0,665 | − 0,128 | + 0,224 | 65° |
| + 0,163 | + 0,118 | + 0,059 | − 0,021 | − 0,136 | − 0,315 | − 0,632 | − 0,744 | − 0,224 | + 0,127 | 70° |
| + 0,124 | + 0,077 | + 0,017 | − 0,063 | − 0,175 | − 0,345 | − 0,634 | − 0,816 | − 0,320 | + 0,031 | 75° |
| + 0,083 | + 0,036 | − 0,024 | − 0,104 | − 0,213 | − 0,375 | − 0,636 | − 0,883 | − 0,412 | − 0,067 | 80° |
| + 0,042 | − 0,006 | − 0,066 | − 0,144 | − 0,250 | − 0,401 | − 0,639 | − 0,947 | − 0,500 | − 0,165 | 85° |
| 0 | − 0,047 | − 0,107 | − 0,183 | − 0,285 | − 0,427 | − 0,640 | − 0,995 | − 0,586 | − 0,261 | 90° |
| − 0,042 | − 0,089 | − 0,146 | − 0,220 | − 0,317 | − 0,449 | − 0,641 | − 0,946 | − 0,667 | − 0,354 | 95° |
| − 0,083 | − 0,129 | − 0,186 | − 0,257 | − 0,348 | − 0,470 | − 0,643 | − 0,904 | − 0,744 | − 0,445 | 100° |
| − 0,124 | − 0,169 | − 0,223 | − 0,291 | − 0,377 | − 0,489 | − 0,645 | − 0,868 | − 0,816 | − 0,534 | 105° |
| − 0,163 | − 0,207 | − 0,259 | − 0,324 | − 0,404 | − 0,507 | − 0,646 | − 0,839 | − 0,884 | − 0,616 | 110° |
| − 0,202 | − 0,244 | − 0,294 | − 0,354 | − 0,428 | − 0,523 | − 0,647 | − 0,814 | − 0,946 | − 0,697 | 115° |
| − 0,239 | − 0,278 | − 0,326 | − 0,382 | − 0,452 | − 0,537 | − 0,647 | − 0,793 | − 0,995 | − 0,772 | 120° |
| − 0,274 | − 0,312 | − 0,356 | − 0,409 | − 0,472 | − 0,550 | − 0,648 | − 0,775 | − 0,945 | − 0,842 | 125° |
| − 0,307 | − 0,343 | − 0,384 | − 0,433 | − 0,491 | − 0,561 | − 0,649 | − 0,759 | − 0,905 | − 0,907 | 130° |
| − 0,338 | − 0,371 | − 0,409 | − 0,454 | − 0,508 | − 0,571 | − 0,649 | − 0,746 | − 0,870 | − 0,967 | 135° |
| − 0,366 | − 0,397 | − 0,433 | − 0,474 | − 0,523 | − 0,580 | − 0,649 | − 0,735 | − 0,841 | − 0,980 | 140° |
| − 0,391 | − 0,420 | − 0,453 | − 0,491 | − 0,536 | − 0,588 | − 0,650 | − 0,725 | − 0,818 | − 0,936 | 145° |
| − 0,413 | − 0,441 | − 0,472 | − 0,506 | − 0,547 | − 0,594 | − 0,650 | − 0,717 | − 0,799 | − 0,901 | 150° |

der so klein ist, dass eine ganze Reihe der Niveaulinien nur in ihrem Endstück rechts hat aufgezeichnet werden können. Von den Curven aus, in welchen der mittlere Theil der mehrtheiligen Fläche unten und oben endigt, ziehen sich einerseits nach oben, andererseits nach unten die beiden äusseren Theile; dabei ist der letztere viel steiler als der erstere, der namentlich unter dem linken Rande des Coordinatennetzes einen ziemlich flachen Verlauf zeigt. Bei eingehendem Studium des Verlaufes der einzelnen Niveaulinien gelingt es bald, sich auch von diesen etwas weniger einfachen Theilen der Fläche eine deutliche Anschauung zu verschaffen.

Die Gesammtheit der Niveaulinien innerhalb der beiden Coordinatenfelder auf Tafel II kann nun als eine graphische Darstellung

des Drehungsverhältnisses (d. h. also des Verhältnisses der Winkelbeschleunigungen $\varphi_1''$ und $\psi''$ im Schulter- und Ellbogengelenk) von dem Beugungswinkel $\psi$ im Ellbogengelenk und den Verhältnissen der auf Ober- und Unterarm ausgeübten Drehungsmomente $D_1$ und $D_2$ aufgefasst werden. Dieselbe erlaubt für jedes beliebige zusammengehörende Werthepaar von $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ sofort den zugehörigen Werth des Drehungsverhältnisses bis auf zwei Decimalstellen genau abzulesen. Man braucht zu diesem Zwecke nur aus der Tafel zu entscheiden, welcher Niveaulinie der betreffende Punkt der Coordinatentafel am nächsten liegt, dessen Coordinaten die bestimmten Werthe von $\psi$ und $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ bilden. Hat man beispielweise für einen Muskel festgestellt, dass derselbe in einer bestimmten Haltung des Armes, bei welcher der Beugungswinkel des Ellbogengelenks $\psi = 43^0$ ist, mit Drehungsmomenten $D_1$ und $D_2$ auf Ober- und Unterarm einwirkt, deren Verhältniss $\frac{D_1}{D_2}$ den Werth $+ 0{,}32$ besitzt, so lehrt ein Blick auf die linke Seite von Tafel II, dass dieser Muskel in der betreffenden Armhaltung im Schulter- und Ellbogengelenk Drehungen vom Grössenverhältniss $- 0{,}19$ hervorbringt. Man kann sogar durch Schätzen der Lage des Punktes zwischen den beiden Niveaulinien mit dem Index $- 0{,}19$ und $- 0{,}20$ den Werth des Drehungsverhältnisses bis auf drei Decimalstellen annähernd genau als $- 0{,}193$ angeben. Derselbe würde also, wenn es ein Beugemuskel des Ellbogengelenks wäre, eine Streckung des Schultergelenks oder wenn es ein Streckmuskel des Ellbogengelenks wäre, eine Beugung im Schultergelenk bewirken, deren Betrag abgerundet der fünfte Theil von der Drehung im Ellbogengelenk wäre.

Da für den langen Kopf des M. biceps brachii die Werthe des Verhältnisses der Drehungsmomente bekannt sind (vgl. den ersten Beitrag zur Muskelstatik Seite 362), so ist man also in der Lage, mit Hülfe der Tafel II ohne alle Rechnung die Wirkungsweise dieses Muskels für jede beliebige Beugestellung im Ellbogengelenk anzugeben. In der Tabelle auf Seite 362 der genannten Arbeit sind nun allerdings nur die Werthe des Drehungsverhältnisses $\frac{D_0}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_0}$ (die eingeklammerten Zahlen) angegeben. Man kann aber in Folge der

schon oben angeführten einfachen Beziehung zwischen den Verhältnissen $\frac{D_0}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_0}$ und $\frac{D_1}{D_2}$ leicht aus jener Tabelle die Werthe von $\frac{D_1}{D_2}$ berechnen.

Die hierzu nöthigen Formeln sind

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{D_0}{D_2} - 1 \quad \text{oder} \quad \frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{\left[\frac{D_2}{D_0}\right]} - 1 ,$$

je nachdem der Werth von $\frac{D_0}{D_2}$ oder der von $\frac{D_2}{D_0}$ in der Tabelle auf Seite 362 des ersten Beitrages zur Muskelstatik angegeben ist. Man erhält dann folgende Tabellle:

| $\psi$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{D_1}{D_2}$ | +1,00 | +0,85 | +0,67 | +0,52 | +0,35 | +0,20 | +0,08 | −0,05 | −0,15 | −0,23 | −0,29 | −0,35 | −0,39 |

| $\psi$ | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{D_1}{D_2}$ | −0,42 | −0,44 | −0,46 | −0.47 | −0,48 | −0,50 | −0,50 | −0,50 | −0,49 | −0,46 | −0,44 | −0,42 | −0,39 | −0,36 |

Zeichnet man das hierzu gehörende Diagramm in das Coordinatennetz auf der linken Seite von Tafel II ein (vgl. Tafel II), so kann man für jede beliebige Haltung des Armes sofort aus der Tafel ablesen, wie gross das Verhältniss der durch den Muskel hervorgebrachten Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk ist. Man erhält beispielsweise für die verschiedenen um je 5° von einander abweichenden Werthe des Beugungswinkels $\psi$ im Ellbogengelenk folgende Werthe des Drehungsverhältnisses $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$:

Drehungsverhältnisse für den langen Kopf des M. biceps brachii.

| Beugungswinkel im Ellbogengelenk $\psi$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Drehungsverhältniss $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ | −0,09 | −0,16 | −0,21 | −0,24 | −0,26 | −0,27 | −0,28 | −0,29 | −0,29 | −0,29 | −0,28 | −0,28 | −0,27 |

| Beugungswinkel im Ellbogengelenk $\psi$ | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Drehungsverhältniss $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ | −0,26 | −0,25 | −0,23 | −0,21 | −0,20 | −0,18 | −0,15 | −0,12 | −0,08 | −0,04 | +0,01 | +0,07 | +0,14 | +0,21 |

Man erkennt hieraus zunächst, dass die Drehungen in den beiden Gelenken von $\psi = 0^0$ bis $110^0$ (genauer $113\frac{1}{2}$, vgl. Tafel II) in entgegengesetzter Richtung, dagegen für $\psi = 115^0$ bis $130^0$ in gleicher Richtung stattfinden. Um festzustellen, ob es sich im einzelnen Falle um Beugung oder Streckung handelt, muss man das oben (Seite 518) angegebene Kriterium anwenden. Man überzeugt sich nun leicht, dass der Nenner in der ersten Form für $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ (Seite 513) stets positiv ist, so lange der Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ zwischen $+1$ und $-1$ fällt. Da nun die Curve für das Verhältniss der Drehungsmomente $\frac{D_1}{D_2}$ des Muskels ganz in das linke Coordinatennetz auf Tafel II hineinfällt, so ist für den langen Kopf des Biceps diese letztere Bedingung erfüllt. Wenn nun der Nenner von $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ positiv ist, so wird nach Seite 518 im Ellbogengelenk Beugung eintreten, wenn $D_2$ selbst positiv ist. Dies ist für den Biceps der Fall, also wird derselbe in allen Haltungen des Armes das Ellbogengelenk beugen. Wenn auch vielleicht für den M. biceps diese Betrachtungen als überflüssig erscheinen, da doch von vornherein vielleicht Niemand daran zweifelt, dass dieser Muskel nur das Ellbogengelenk beugen kann, so soll man trotzdem die Anwendung des Kriteriums nie unterlassen, wenn man nicht Gefahr laufen will, ein der Wirklichkeit genau entgegengesetztes Resultat zu erhalten. Man beachte in dieser Hinsicht nur den auf Seite 520 und 521 angeführten und durch Figur 9 erläuterten Fall. Die blosse Anschauung kann hier leicht irre führen.

Für den langen Kopf des M. biceps brachii ist mit Vorstehendem exact erwiesen, dass er in Beugestellungen des Ellbogengelenks zwischen $\psi = 0^0$ und $\psi = 113\frac{1}{2}^0$ das Schultergelenk streckt. Diese Streckung ist relativ am grössten bei $\psi = 40^0$; in dieser Stellung beträgt sie abgerundet $\frac{3}{10}$ von der gleichzeitigen Beugung des Ellbogengelenks. Je weiter der Beugungswinkel $\psi$ sich von $40^0$ nach der einen oder anderen Seite entfernt, um so kleiner wird die

Streckung des Schultergelenks bei gleicher Beugung des Ellbogengelenks. Bei $\psi = 113\frac{1}{2}^0$ findet gar keine Wirkung des Muskels auf das Schultergelenk statt, und für Ausgangsstellungen des Armes, in denen $\psi > 113\frac{1}{2}^0$ ist, bringt endlich der Muskel Beugung im Schultergelenk hervor. Derselbe ist also, trotzdem er auf der Beugeseite des Humeruskopfes hinzieht, vorwiegend Strecker des Schultergelenks und nicht, wie vielleicht Manchem die »unmittelbare Anschauung« lehrt, Beuger — vorausgesetzt natürlich, dass das Ellbogengelenk nicht durch besondere Kräfte arretirt ist.

Um sich über die Grösse der Drehung im Schultergelenk eine deutliche Anschauung bilden zu können, soll wieder einmal angenommen werden, dass das Drehungsverhältniss sich während einer Beugung von 30° im Ellbogengelenk nicht änderte; dann würden sich die in folgender Tabelle niedergelegten Werthe für die Drehung im Schultergelenk ergeben, wobei wieder eine Beugung mit dem positiven und in Folge dessen eine Streckung des Schultergelenks mit dem negativen Vorzeichen belegt ist.

| Ausgangsstellung des Ellbogengelenks, $\psi =$ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° | 45° | 50° | 55° | 60° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Beugung im Ellbogengelenk | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° |
| Drehung im Schultergelenk | − 2°40′ | − 4°50′ | − 6°20′ | − 7°10′ | − 7°50′ | − 8°10′ | − 8°20′ | − 8°40′ | − 8°40′ | − 8°40′ | − 8°20 | − 8°20′ | − 8°10′ |

| Ausgangsstellung des Ellbogengelenks $\psi =$ | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° | 90° | 95° | 100° | 105° | 110° | 115° | 120° | 125° | 130° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Beugung im Ellbogengelenk | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° | 30° |
| Drehung im Schultergelenk | − 7°50′ | − 7°30′ | − 6°50′ | − 6°20′ | − 6°—′ | − 5°20′ | − 4°30′ | − 3°40′ | − 2°20′ | − 1°10′ | + 0°20′ | + 2°10′ | + 4°10′ | + 6°20′ |

Auf Tafel IV findet sich auf der linken Seite oben für einige Ausgangshaltungen des Armes in derselben Weise wie auf Tafel I die hieraus resultirende Gelenkbewegung dargestellt.

Es ist zu beachten, dass die in obiger Tabelle angeführten Drehungsgrössen für jede beliebige Ausgangsstellung des Schultergelenks gelten, wenn nur der Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks den bestimmten Werth hat. Dies hat darin seinen Grund, dass die

Drehungsmomente des langen Kopfes des M. biceps brachii nicht von der Stellung des Schultergelenks abhängen. In dieser Hinsicht zeigt der Muskel ein exceptionelles Verhalten. Bei jedem anderen mehrgelenkigen Muskel, genau genommen schon beim kurzen Kopf des Biceps, wird auch der Drehungswinkel $\varphi_1$ des Schultergelenks einen Einfluss auf die Werthe der Drehungsmomente ausüben. Dadurch wird aber die Aufgabe der Bestimmung des Drehungsverhältnisses verwickelter. Man hat dann nicht nur eine Curve, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses der Drehungsmomente vom Winkel $\psi$ veranschaulicht, wie die punktirte Curve auf der linken Seite von Tafel II, sondern man hat eine Fläche zu berücksichtigen, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{D_1}{D_2}$ von den beiden Winkeln $\psi$ und $\varphi_1$ darstellt. Diese Fläche hätte man sich zum Zwecke der Bestimmung des Drehungsverhältnisses auf das linke Coordinatennetz der Tafel II so aufgebaut zu denken, dass die $\varphi_1$-Axe durch die im Punkte 0 auf der Ebene des Coordinatennetzes senkrechte Gerade dargestellt wäre. Auf dieser Fläche könnte man sich nun wiederum Niveaulinien aufgezeichnet denken, welche Werthen von $0^0$; $+ 5^0$; $+ 10^0$; $\cdots + 180^0$; $- 5^0$; $- 10^0$; $\cdots - 180^0$ des Winkels $\varphi_1$ entsprechen. Die Projectionen dieser Niveaulinien auf das Coordinatennetz würden dann in derselben Weise gestatten, sofort den zu einer bestimmten durch $\psi$ und $\varphi_1$ charakterisirten Stellung des Armes gehörenden Werth des Drehungsverhältnisses abzulesen, wie dies das eine Diagramm für den langen Kopf des Biceps ermöglicht hat.

Man sieht also, dass die Tafel II auf jeden Fall die gewünschte Auskunft giebt, wenn man nur die zur Ableitung des Drehungsverhältnisses nöthigen Unterlagen, d. h. die Werthe der Drehungsmomente bezüglich deren Verhältnisses, vorher bestimmt hat.

Als weiteres Beispiel für die Verwendung der Tafel II sei die Bestimmung der durch die Schwere in irgend welcher Haltung des Armes hervorgerufenen Gelenkbewegungen angeführt. In dem ersten Beitrage zur Muskelstatik ist ausführlich abgeleitet worden, dass das Verhältniss der beiden Drehungsmomente $D_0$ und $D_1$, mit welchen die Schwere auf den Arm einwirken würde, wenn einmal das Ellbogengelenk und das andere Mal das Schultergelenk arretirt wäre, gleich ist dem Verhältniss der Abstände des Gleichgewichtspunktes

und Ellbogengelenkmittelpunktes vom Richtpunkte des Unterarmes. Hierbei ist unter »Gleichgewichtspunkt« ($\mathfrak{G}$ in Fig. 10 auf Seite 526) derjenige Punkt der Unterarmlängsaxe, bezüglich deren Verlängerung zu verstehen, welcher bei der bestimmten Haltung des Armes mit dem Schultergelenkmittelpunkt in einer Verticalen liegt.

Da $\frac{D_1}{D_1} = \frac{D_0}{D_2} - 1$, so hat man (Figur 10) nach dem eben Gesagten auch $\frac{D_1}{D_2} = \frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{R\mathfrak{E}}} - 1 = \frac{\overline{R\mathfrak{G}} - \overline{R\mathfrak{E}}}{\overline{R\mathfrak{E}}} = \frac{\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}{\overline{R\mathfrak{E}}}$. Dies heisst aber, dass das Verhältniss der beiden Drehungsmomente $D_1$, $D_2$, mit denen die Schwere auf Ober- und Unterarm allein einwirkt, gleich dem Verhältniss des Abstandes des Gleichgewichtspunktes vom Ellbogengelenkmittelpunkte zu dem Abstande des letzteren vom Richtpunkte ist. Man kann also in jeder beliebigen Haltung des Armes den zur Ableitung des Drehungsverhältnisses nöthigen Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ durch einfache Messung zweier Längen am Arm des lebenden Menschen leicht bestimmen. Misst man dazu noch den Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks, welcher der betreffenden Armhaltung entspricht, so hat man alle Daten, um aus der Tafel II sofort den Werth des Drehungsverhältnisses ablesen zu können.

Die Werthe des Verhältnisses $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{R\mathfrak{E}}}$ sind nun früher für alle möglichen Stellungen des Armes berechnet und im ersten Beitrage zur Muskelstatik in den Tabellen auf den Seiten 350, 351, 354 und 355 niedergelegt worden. Ausserdem ist die Abhängigkeit dieses Verhältnisses von den Winkeln $\psi$ und $\varphi_1$ durch die Gleichgewichtsfläche auf den Tafeln III, IV und V jener Arbeit graphisch dargestellt worden. Man kann daher die zu bestimmten Werthepaaren von $\psi$, $\varphi_1$ gehörenden Werthe des Verhältnisses $\frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{R\mathfrak{E}}}$ resp. $\frac{\overline{R\mathfrak{E}}}{\overline{R\mathfrak{G}}}$ aus diesen Tabellen direct ablesen oder aus den Projectionen der Gleichgewichtsfläche abmessen, und dieselben dann ohne weiteres zur Ableitung des Verhältnisses $\frac{D_1}{D_2}$ nach den Formeln

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\overline{R\mathfrak{G}}}{\overline{R\mathfrak{E}}} - 1 \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{\left[\frac{\overline{R\mathfrak{E}}}{\overline{R\mathfrak{G}}}\right]} - 1$$

verwenden. Stellt sich dabei der absolute Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ grösser wie 1 heraus, so braucht man ihn nur in 1 zu dividiren, um den Werth des reciproken Verhältnisses $\frac{D_2}{D_1}$ zu erhalten. Je nachdem der absolute Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ oder $\frac{D_2}{D_1}$ kleiner wie 1 für eine bestimmte Haltung des Armes ist, hat man dann zur Bestimmung des durch die Schwere hervorgebrachten Drehungsverhältnisses der beiden Gelenke die linke oder rechte Seite der Tafel II zu Rathe zu ziehen.

Wollte man die Berechnung des Verhältnisses der Drehungsmomente $D_1$, $D_2$ der Schwere aus den angegebenen Tabellen oder der Gleichgewichtsfläche vermeiden, so müsste man sich in ganz entsprechender Weise wie auf Tafel II der vorliegenden Arbeit eine graphische Darstellung der Abhängigkeit des Verhältnisses der Winkelbeschleunigungen im Schulter- und Ellbogengelenk von dem Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks und dem Verhältniss der Drehungsmomente $D_0$, $D_2$ verschaffen. Man hätte zu diesem Zwecke nur die Werthe von $\frac{D_0}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_0}$ als Ordinaten der beiden Coordinatennetze zu nehmen. Aus dieser Tafel würde man dann ohne alle Zwischenrechnung die zu bestimmten Werthen von $\frac{D^0}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_0}$ gehörenden Werthe des Drehungsverhältnisses ablesen können. Man kann sich jedoch die Construction dieser neuen Tafel ganz ersparen, wenn man nur auf Tafel II die zur Abscissenaxe parallelen Geraden, welche zu bestimmten Werthen von $\frac{D_0}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_0}$ gehören, in besonderer Weise kenntlich macht. Aus der auf Seite 539 angeführten Relation zwischen dem Verhältnisse der Drehungsmomente $D_1$, $D_2$ und dem der Drehungsmomente $D_0$, $D_2$ ergeben sich unter anderen folgende einander entsprechende Werthe der beiden Verhältnisse, wobei die zum Verhältniss $\frac{D_2}{D_1}$ gehörenden Werthe in Klammern gesetzt sind:

| $\frac{D_0}{D_2}$ | — 1,0 | — 0,9 | — 0,8 | — 0,7 | — 0,6 | — 0,5 | — 0,4 | — 0,3 | — 0,2 | — 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\left[\frac{D_2}{D_1}\right]$ | [—0,5] | [—0,526] | [—0,556] | [—0,588] | [—0,625] | [—0,667] | [—0,714] | [—0,769] | [—0,833] | [—0,909] |

| $\frac{D_0}{D_2}$ | 0 | + 0,1 | + 0,2 | + 0,3 | + 0,4 | + 0,5 | + 0,6 | + 0,7 | + 0,8 | + 0,9 | +0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\left[\frac{D_2}{D_1}\right]$ | −1 | − 0,9 | − 0,8 | − 0,7 | − 0,6 | − 0,5 | − 0,4 | − 0,3 | − 0,2 | − 0,1 | 0 |

| $\frac{D_2}{D_0}$ | + 1,0 | + 0,9 | + 0,8 | + 0,7 | + 0,6 | + 0,5 | + 0,4 | + 0,3 | + 0,2 | + 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\left[\frac{D_2}{D_1}\right]$ | 0 | +0,111 | +0,250 | +0,429 | +0,667 | + 1 | [+0,667] | [+0,429] | [+0,250] | [+0,111] |

| $\frac{D_2}{D_0}$ | 0 | − 0,1 | − 0,2 | − 0,3 | − 0,4 | − 0,5 | − 0,6 | − 0,7 | − 0,8 | − 0,9 | − 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\left[\frac{D_2}{D_1}\right]$ | [0] | [−0,091] | [−0,167] | [−0,231] | [−0,286] | [−0,333] | [−0,375] | [−0,412] | [−0,444] | [−0,474] | [−0,5] |

Die horizontalen Geraden, welche den in dieser Tabelle niedergelegten Werthen von $\frac{D_0}{D_2}$ und $\frac{D_2}{D_0}$ entsprechen, finden sich auf Tafel II besonders stark eingezeichnet und an ihrem rechten Ende mit der zugehörenden Verhältnisszahl versehen, so dass man also direct die Tafel II auch dazu benutzen kann, den einem bestimmten Werthe von $\frac{D_0}{D_2}$ oder $\frac{D_2}{D_0}$ zukommenden Werth des Drehungsverhältnisses abzulesen. Allerdings wird man in den meisten Fällen, wo das Verhältniss der Drehungsmomente $D_0$, $D_2$ bis auf zwei Decimalstellen angegeben ist, auf eine Schätzung angewiesen sein, welche um so weniger sicher ist, je weiter zwei aufeinanderfolgende dieser Horizontalen auseinander liegen. Dies macht sich besonders auf den oberen Hälften der beiden Coordinatennetze fühlbar; dagegen geben die horizontalen Millimeterstriche auf der unteren Hälfte des linken Coordinatennetzes die zweistelligen Werthe von $\frac{D_0}{D_2}$ zwischen 0 und + 1 direct an.

Da die Schwere fast immer an der Hervorbringung einer Gelenkbewegung betheiligt ist, so empfiehlt es sich, auf die aus Tafel II ablesbaren Drehungsverhältnisse bei alleiniger Wirkung der Schwere noch etwas näher einzugehen.

Das Verhältniss der Drehungsmomente der Schwere ist durch die Lage des Gleichgewichtspunktes auf der Längsaxe des Unterarms

vollständig bestimmt. Dagegen kann man aus der Lage des Gleichgewichtspunktes noch nicht auf die Grösse des Drehungsverhältnisses schliessen, weil die letztere auch noch von dem Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks abhängig ist. Die Aenderung, welche das Drehungsverhältniss erfährt, wenn man bei einer bestimmten Lage des Gleichgewichtspunktes aus der äussersten Streckstellung des Ellbogengelenks ($\psi = 0^0$) allmählich in die äusserste Beugestellung ($\psi = 150^0$) übergeht, kann man wiederum sofort aus der Tafel II ablesen. Es handelt sich dabei nur darum, einer bestimmten, der Lage des Gleichgewichtspunktes entsprechenden, horizontalen Geraden eines der beiden Coordinatennetze entlang zu gehen und die zu bestimmten Werthen von $\psi$ gehörenden Werthe des Drehungsverhältnisses aus der Lage der Niveaulinien abzuleiten. Liegt beispielsweise der Gleichgewichtspunkt in der Mitte zwischen Richtpunkt und Ellbogengelenkmittelpunkt, so ist $\frac{D_0}{D_2} = + 0,5$ resp. $\frac{D_1}{D_2} = - 0,5$. Man hat daher nur auf der links mit — 0,5 bezeichneten Horizontalen des linken Coordinatennetzes die Werthe von $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ für die verschiedenen Grössen von $\psi$ zu bestimmen. Läge der Gleichgewichtspunkt auf der Rückwärtsverlängerung der Unterarmlängsaxe, und zwar ebenso weit vom Ellbogengelenkmittelpunkt entfernt als dieser vom Richtpunkt, so wäre $\frac{D_0}{D_2} = + 2$ resp. $\frac{D_2}{D_0} = + 0,5$ und $\frac{D_1}{D_2} = + 1$, und es handelte sich dann um die obere Horizontale des linken Coordinatennetzes. Dagegen würde die untere Horizontale in Frage kommen, wenn der Gleichgewichtspunkt mit dem Richtpunkt zusammenfiele, weil dann $\frac{D_0}{D_2} = 0$ und $\frac{D_1}{D_2} = - 1$ wäre, oder es würde die mittlere Horizontale (die Abscissenaxe) in Betracht gezogen werden müssen, wenn der Gleichgewichtspunkt mit dem Ellbogengelenkmittelpunkt zusammenfiele; denn dann würde $\frac{D_0}{D_2} = + 1$ und $\frac{D_1}{D_2} = 0$ sein.

Um einen Ueberblick über die Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses vom Beugungswinkel $\psi$ bei constantem Verhältniss $\frac{D_1}{D_2}$ oder $\frac{D_0}{D_2}$, d. h. also bei bestimmter Lage des Gleichgewichtspunktes, zu gewinnen, ist für eine Anzahl von Fällen das Drehungsverhältniss bei

verschiedenen um 10° von einander abweichenden Werthen von $\psi$ aus der Tafel II abgelesen und das Ergebniss in den folgenden Tabellen niedergelegt worden. In denselben finden sich links die bestimmten Werthe der Verhältnisse $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ und $\frac{D_0}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_0}$ und oben die Grösse des Beugungungswinkels im Ellbogengelenk angegeben. In der Tabelle selbst sind alle Zahlen, welche Werthe des reciproken Drehungsverhältnisses $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ darstellen, durch einen geschlossenen gebrochenen Linienzug von den anderen getrennt werden.

Werthe des Drehungsverhältnisses $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ resp. $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$, welche zu bestimmten Werthen des Verhältnisses $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ oder $\frac{D_0}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_0}$ und des Beugungswinkels des Ellbogengelenks gehören.

(Die von dem gebrochenen Linienzug eingeschlossenen Werthe gehören sämmtlich zu dem Verhältniss $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$.)

Beugungswinkel im Ellbogengengelenk.

| $\frac{D_1}{D_2}$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1,0 | −0,09 | −0,08 | −0,04 | +0,02 | +0,11 | +0,21 | +0,33 | +0,46 | +0,59 | +0,74 | +0,89 | +0,98 | +0,87 | +0,78 | +0,73 | +0,68 |
| +0,9 | −0,14 | −0,13 | −0,10 | −0,04 | +0,03 | +0,12 | +0,23 | +0,35 | +0,48 | +0,62 | +0,77 | +0,91 | +0,95 | +0,85 | +0,77 | +0,72 |
| +0,8 | −0,18 | −0,17 | −0,14 | −0,10 | −0,03 | +0,05 | +0,15 | +0,26 | +0,38 | +0,51 | +0,66 | +0,81 | +0,95 | +0,93 | +0,83 | +0,77 |
| +0,7 | −0,21 | −0,20 | −0,18 | −0,14 | −0,08 | −0,01 | +0,08 | +0,18 | +0,30 | +0,43 | +0,56 | +0,71 | +0,85 | +1 | +0,89 | +0,81 |
| +0,6 | −0,24 | −0,23 | −0,21 | −0,17 | −0,12 | −0,06 | +0,02 | +0,11 | +0,22 | +0,35 | +0,48 | +0,62 | +0,76 | +0,91 | +0,97 | +0,87 |
| +0,5 | −0,26 | −0,25 | −0,23 | −0,20 | −0,16 | −0,10 | −0,03 | +0,06 | +0,16 | +0,27 | +0,40 | +0,53 | +0,68 | +0,82 | +0,96 | +0,93 |
| +0,4 | −0,27 | −0,27 | −0,25 | −0,23 | −0,19 | −0,13 | −0,07 | +0,01 | +0,10 | +0,21 | +0,33 | +0,45 | +0,60 | +0,74 | +0,88 | +1 |
| +0,3 | −0,29 | −0,28 | −0,27 | −0,25 | −0,21 | −0,16 | −0,10 | −0,04 | +0,05 | +0,15 | +0,26 | +0,38 | +0,52 | +0,66 | +0,80 | +0,92 |
| +0,2 | −0,30 | −0,30 | −0,28 | −0,26 | −0,23 | −0,19 | −0,14 | −0,07 | 0 | +0,09 | +0,20 | +0,32 | +0,45 | +0,59 | +0,72 | +0,85 |
| +0,1 | −0,31 | −0,31 | −0,30 | −0,28 | −0,25 | −0,21 | −0,17 | −0,11 | −0,04 | +0,05 | +0,14 | +0,25 | +0,38 | +0,51 | +0,65 | +0,78 |
| 0 | −0,32 | −0,32 | −0,31 | −0,29 | −0,27 | −0,24 | −0,19 | −0,14 | −0,08 | 0 | +0,09 | +0,20 | +0,31 | +0,44 | +0,57 | +0,70 |
| −0,1 | −0,33 | −0,33 | −0,32 | −0,30 | −0,28 | −0,25 | −0,21 | −0,17 | −0,11 | −0,04 | +0,04 | +0,14 | +0,25 | +0,37 | +0,50 | +0,63 |
| −0,2 | −0,34 | −0,34 | −0,33 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,19 | −0,14 | −0,08 | 0 | +0,09 | +0,19 | +0,31 | +0,43 | +0,55 |
| −0,3 | −0,35 | −0,34 | −0,34 | −0,33 | −0,31 | −0,28 | −0,26 | −0,22 | −0,17 | −0,11 | −0,04 | +0,01 | +0,14 | +0,25 | +0,36 | +0,48 |
| −0,4 | −0,35 | −0,35 | −0,34 | −0,33 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,20 | −0,15 | −0,08 | −0,01 | +0,08 | +0,18 | +0,29 | +0,41 |
| −0,5 | −0,36 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,33 | −0,31 | −0,29 | −0,26 | −0,22 | −0,18 | −0,12 | −0,05 | +0,03 | +0,12 | +0,23 | +0,34 |
| −0,6 | −0,36 | −0,36 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,28 | −0,24 | −0,20 | −0,15 | −0,09 | −0,02 | +0,07 | +0,16 | +0,26 |
| −0,7 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,36 | −0,35 | −0,33 | −0,31 | −0,29 | −0,27 | −0,23 | −0,19 | −0,13 | −0,07 | +0,01 | +0,10 | +0,19 |
| −0,8 | −0,37 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,33 | −0,31 | −0,29 | −0,25 | −0,22 | −0,17 | −0,11 | −0,04 | +0,03 | +0,12 |
| −0,9 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,28 | −0,25 | −0,21 | −0,16 | −0,10 | −0,03 | +0,05 |
| −1,0 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,20 | −0,15 | −0,09 | −0,02 |

Beugungswinkel im Ellbogengelenk.

| $\frac{D_2}{D_1}$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1,0 | −0,09 | −0,08 | −0,04 | +0,02 | +0,11 | +0,21 | +0,33 | +0,46 | +0,59 | +0,74 | +0,89 | +0,98 | +0,87 | +0,78 | +0,73 | +0,68 |
| +0,9 | −0,01 | +0,01 | +0,05 | +0,13 | +0,22 | +0,34 | +0,47 | +0,62 | +0,76 | +0,90 | +0,96 | +0,86 | +0,78 | +0,72 | +0,68 | +0,64 |
| +0,8 | +0,16 | +0,19 | +0,25 | +0,33 | +0,45 | +0,58 | +0,73 | +0,86 | +0,99 | +0,88 | +0,79 | +0,73 | +0,68 | +0,65 | +0,62 | +0,60 |
| +0,7 | +0,72 | +0,75 | +0,83 | +0,91 | +0,96 | +0,85 | +0,78 | +0,72 | +0,67 | +0,64 | +0,61 | +0,59 | +0,58 | +0,57 | +0,56 | +0,55 |
| +0,6 | −0,15 | −0,11 | −0,04 | +0,01 | +0,13 | +0,20 | +0,28 | +0,33 | +0,37 | +0,41 | +0,43 | +0,45 | +0,47 | +0,48 | +0,49 | +0,50 |
| +0,5 | −0,88 | −0,85 | −0,75 | −0,61 | −0,15 | −0,31 | −0,15 | −0,02 | +0,08 | +0,17 | +0,25 | +0,31 | +0,35 | +0,39 | +0,42 | +0,44 |
| +0,4 | −0,75 | −0,77 | −0,84 | −0,95 | −0,88 | −0,70 | −0,52 | −0,35 | −0,20 | −0,07 | +0,05 | +0,15 | +0,22 | +0,28 | +0,33 | +0,37 |
| +0,3 | −0,62 | −0,63 | −0,67 | −0,73 | −0,83 | −0,97 | −0,82 | −0,64 | −0,46 | −0,30 | −0,15 | −0,03 | +0,08 | +0,17 | +0,23 | +0,30 |
| +0,2 | −0,55 | −0,55 | −0,58 | −0,62 | −0,68 | −0,77 | −0,91 | −0,90 | −0,71 | −0,53 | −0,36 | −0,21 | −0,08 | +0,04 | +0,13 | +0,21 |
| +0,1 | −0,50 | −0,51 | −0,53 | −0,56 | −0,60 | −0,65 | −0,74 | −0,87 | −0,96 | −0,76 | −0,57 | −0,41 | −0,25 | −0,11 | 0 | +0,10 |
| 0 | −0,47 | −0,48 | −0,49 | −0,51 | −0,54 | −0,58 | −0,64 | −0,72 | −0,84 | −1 | −0,80 | −0,62 | −0,44 | −0,28 | −0,15 | −0,03 |
| −0,1 | −0,45 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,50 | −0,53 | −0,57 | −0,63 | −0,71 | −0,81 | −0,96 | −0,85 | −0,65 | −0,48 | −0,33 | −0,19 |
| −0,2 | −0,44 | −0,44 | −0,44 | −0,45 | −0,47 | −0,49 | −0,52 | −0,56 | −0,61 | −0,68 | −0,78 | −0,91 | −0,90 | −0,71 | −0,54 | −0,39 |
| −0,3 | −0,42 | −0,43 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,51 | −0,55 | −0,59 | −0,65 | −0,74 | −0,85 | −0,98 | −0,80 | −0,63 |
| −0,4 | −0,41 | −0,42 | −0,42 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,47 | −0,49 | −0,52 | −0,56 | −0,60 | −0,67 | −0,76 | −0,89 | −0,95 |
| −0,5 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,50 | −0,54 | −0,59 | −0,65 | −0,72 |
| −0,6 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,47 | −0,49 |
| −0,7 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 |
| −0,8 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,33 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,19 |
| −0,9 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,28 | −0,24 | −0,20 | −0,16 | −0,10 |
| −1,0 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,20 | −0,15 | −0,09 | −0,02 |

Beugungswinkel im Ellbogengelenk.

| $\frac{D_0}{D_2}$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1,0 | −0,32 | −0,32 | −0,31 | −0,29 | −0,27 | −0,24 | −0,19 | −0,14 | −0,08 | 0 | +0,09 | +0,20 | +0,31 | +0,44 | +0,57 | +0,70 |
| +0,9 | −0,33 | −0,33 | −0,32 | −0,30 | −0,28 | −0,25 | −0,21 | −0,17 | −0,11 | −0,04 | +0,01 | +0,14 | +0,25 | +0,37 | +0,50 | +0,63 |
| +0,8 | −0,34 | −0,34 | −0,33 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,19 | −0,14 | −0,08 | 0 | +0,09 | +0,19 | +0,31 | +0,43 | +0,55 |
| +0,7 | −0,35 | −0,34 | −0,34 | −0,33 | −0,31 | −0,28 | −0,26 | −0,22 | −0,17 | −0,11 | −0,04 | +0,04 | +0,14 | +0,25 | +0,36 | +0,48 |
| +0,6 | −0,35 | −0,35 | −0,34 | −0,33 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,20 | −0,15 | −0,08 | −0,01 | +0,08 | +0,18 | +0,29 | +0,41 |
| +0,5 | −0,36 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,33 | −0,31 | −0,29 | −0,26 | −0,22 | −0,18 | −0,12 | −0,05 | +0,03 | +0,12 | +0,23 | +0,34 |
| +0,4 | −0,36 | −0,36 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,28 | −0,24 | −0,20 | −0,15 | −0,09 | −0,02 | +0,07 | +0,16 | +0,26 |
| +0,3 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,36 | −0,35 | −0,33 | −0,31 | −0,29 | −0,27 | −0,23 | −0,19 | −0,13 | −0,07 | +0,01 | +0,10 | +0,19 |
| +0,2 | −0,37 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,33 | −0,31 | −0,29 | −0,25 | −0,22 | −0,17 | −0,11 | −0,04 | +0,03 | +0,12 |
| +0,1 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,28 | −0,25 | −0,21 | −0,16 | −0,10 | −0,03 | +0,05 |
| 0 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,20 | −0,15 | −0,09 | −0,02 |
| −0,1 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,27 | −0,24 | −0,20 | −0,15 | −0,09 |
| −0,2 | −0,39 | −0,39 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 | −0,28 | −0,25 | −0,21 | −0,16 |
| −0,3 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,33 | −0,31 | −0,29 | −0,26 | −0,23 |
| −0,4 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,38 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 | −0,36 | −0,35 | −0,34 | −0,32 | −0,30 |
| −0,5 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,39 | −0,38 | −0,38 | −0,37 | −0,37 |
| −0,6 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,45 |
| −0,7 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,47 | −0,49 | −0,51 |
| −0,8 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,40 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,46 | −0,48 | −0,51 | −0,54 | −0,58 |
| −0,9 | −0,40 | −0,40 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,51 | −0,55 | −0,60 | −0,65 |
| −1,0 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,50 | −0,54 | −0,59 | −0,65 | −0,72 |

Beugungswinkel im Ellbogengelenk.

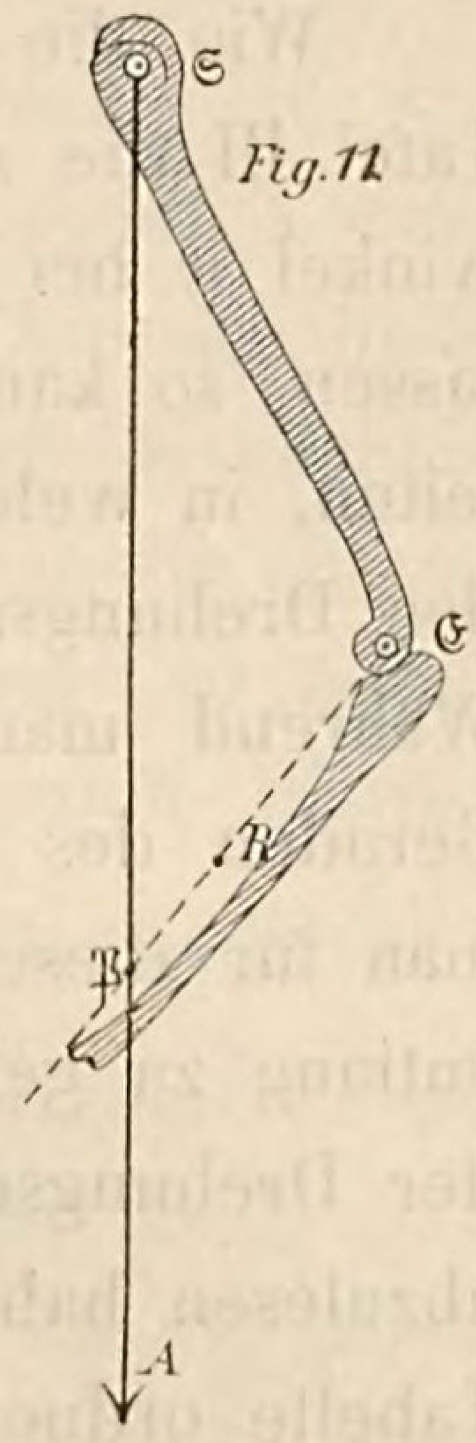
| $\frac{D_2}{D_0}$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1,0 | −0,32 | −0,32 | −0,31 | −0,29 | −0,27 | −0,24 | −0,19 | −0,14 | −0,08 | 0 | +0,09 | +0,20 | +0,31 | +0,44 | +0,57 | +0,70 |
| +0,9 | −0,31 | −0,31 | −0,30 | −0,28 | −0,25 | −0,21 | −0,16 | −0,10 | −0,03 | +0,05 | +0,15 | +0,26 | +0,39 | +0,52 | +0,65 | +0,79 |
| +0,8 | −0,30 | −0,29 | −0,28 | −0,25 | −0,22 | −0,18 | −0,12 | −0,06 | +0,03 | +0,12 | +0,23 | +0,35 | +0,48 | +0,63 | +0,76 | +0,89 |
| +0,7 | −0,27 | −0,26 | −0,25 | −0,22 | −0,18 | −0,12 | −0,06 | +0,02 | +0,11 | +0,22 | +0,35 | +0,48 | +0,62 | +0,76 | +0,90 | +0,98 |
| +0,6 | −0,22 | −0,21 | −0,19 | −0,15 | −0,10 | −0,03 | +0,06 | +0,16 | +0,27 | +0,40 | +0,53 | +0,68 | +0,83 | +0,97 | +0,92 | +0,83 |
| +0,5 | −0,09 | −0,08 | −0,04 | +0,02 | +0,11 | +0,21 | +0,33 | +0,46 | +0,59 | +0,74 | +0,89 | +0,98 | +0,87 | +0,78 | +0,73 | +0,68 |
| +0,4 | +0,70 | +0,70 | +0,70 | +0,69 | +0,66 | +0,62 | +0,60 | +0,58 | +0,57 | +0,56 | +0,56 | +0,55 | +0,55 | +0,55 | +0,54 | +0,54 |
| +0,3 | −0,82 | −0,85 | −0,92 | −0,94 | −0,77 | −0,60 | −0,41 | −0,26 | −0,12 | 0 | +0,11 | +0,19 | +0,26 | +0,31 | +0,36 | +0,39 |
| +0,2 | −0,58 | −0,59 | −0,61 | −0,66 | −0,74 | −0,86 | −0,97 | −0,77 | −0,58 | −0,41 | −0,25 | −0,12 | 0 | +0,11 | +0,19 | +0,25 |
| +0,1 | −0,50 | −0,51 | −0,53 | −0,56 | −0,60 | −0,66 | −0,76 | −0,89 | −0,94 | −0,74 | −0,55 | −0,39 | −0,23 | −0,10 | +0,01 | +0,11 |
| 0 | −0,47 | −0,48 | −0,49 | −0,51 | −0,54 | −0,58 | −0,64 | −0,72 | −0,84 | −1 | −0,80 | −0,62 | −0,44 | −0,28 | −0,15 | −0,03 |
| −0,1 | −0,45 | −0,15 | −0,46 | −0,48 | −0,50 | −0,54 | −0,58 | −0,63 | −0,72 | −0,82 | −0,98 | −0,82 | −0,64 | −0,46 | −0,31 | −0,18 |
| −0,2 | −0,44 | −0,44 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,50 | −0,54 | −0,58 | −0,64 | −0,72 | −0,83 | −0,99 | −0,82 | −0,64 | −0,46 | −0,32 |
| −0,3 | −0,43 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,51 | −0,55 | −0,59 | −0,65 | −0,74 | −0,85 | −0,98 | −0,78 | −0,62 | −0,45 |
| −0,4 | −0,42 | −0,43 | −0,13 | −0,44 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,52 | −0,55 | −0,60 | −0,66 | −0,76 | −0,87 | −0,95 | −0,76 | −0,59 |
| −0,5 | −0,42 | −0,42 | −0,43 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,17 | −0,49 | −0,53 | −0,56 | −0,61 | −0,68 | −0,78 | −0,92 | −0,90 | −0,72 |
| −0,6 | −0,42 | −0,42 | −0,42 | −0,43 | −0,43 | −0,44 | −0,16 | −0,48 | −0,50 | −0,54 | −0,58 | −0,63 | −0,71 | −0,81 | −0,96 | −0,87 |
| −0,7 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,15 | −0,46 | −0,48 | −0,51 | −0,55 | −0,59 | −0,65 | −0,74 | −0,85 | −0,99 |
| −0,8 | −0,11 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,42 | −0,43 | −0,44 | −0,45 | −0,47 | −0,49 | −0,52 | −0,56 | −0,61 | −0,68 | −0,77 | −0,89 |
| −0,9 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,41 | −0,42 | −0,42 | −0,13 | −0,44 | −0,45 | −0,47 | −0,50 | −0,53 | −0,57 | −0,62 | −0,70 | −0,80 |
| −1,0 | −0,41 | −0,41 | −0,11 | −0,11 | −0,41 | −0,12 | −0,43 | −0,11 | −0,45 | −0,46 | −0,48 | −0,50 | −0,54 | −0,59 | −0,65 | −0,72 |

Die bestimmten Werthen der Verhältnissse der Drehungsmomente entsprechenden Diagramme sind alle auf Tafel III in leicht verständlicher Weise aufgezeichnet worden. Dabei sind die Curvenstücke, deren Ordinaten Werthen des reciproken Drehungsverhältnisses $\frac{\psi''}{\varphi''_1}$ proportional sind, unterbrochen gezeichnet. Diese Curven können allgemein wiederum als Niveaulinien von Flächen aufgefasst werden, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses der Drehungsmomente $D_1$, $D_2$ oder $D_0$, $D_2$ von dem Drehungsverhältniss und dem Beugungswinkel $\psi$ im Ellbogengelenk verschaulichen. Die Curven vermögen aber auch eine deutliche Anschauung von der Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses vom Beugungswinkel bei constantem Verhältniss der Drehungsmomente, bezüglich mit Rücksicht auf die Wirkung der Schwere bei bestimmter Lage des Gleichgewichtspunktes zu geben.

Man sieht z. B. sofort, dass, wenn der Gleichgewichtspunkt mit dem Richtpunkte zusammenfällt, im Schulter- und Ellbogengelenk nur Drehungen in verschiedener Richtung stattfinden können; denn die Curve mit dem Index — 1 auf der linken Seite (entsprechend $\frac{D_1}{D_2} = -1$)

und die ihr congruente obere Curve mit dem Index 0 auf der rechten Seite (entsprechend $\frac{D_0}{D_2} = 0$) der Tafel III liegen ganz in der unteren Hälfte des Coordinatennetzes. Dieselbe Curve kommt übrigens auch den im ersten Theile der Muskeldynamik behandelten eingelenkigen Muskeln zu, weil für diese ebenfalls $\frac{D_1}{D_2} = -1$ und $\frac{D_0}{D_2} = 0$ ist. Man erkennt weiter, dass überhaupt in jedem Falle im Schulter- und Ellbogengelenk entgegengesetzte Drehungen durch die Schwere hervorgerufen werden, wenn der Gleichgewichtspunkt distalwärts vom Richtpunkt liegt. Für alle diese Fälle liegt nämlich, wie man leicht sieht, der Werth von $\frac{D_1}{D_2}$ zwischen $-1$ und $-\infty$, bezüglich der Werth von $\frac{D_2}{D_1}$ zwischen $-1$ und 0. Alle zu $\frac{D_2}{D_1}$ gehörenden Curven mit einem Index zwischen $-1$ und 0 befinden sich aber ebenfalls in ihrer ganzen Ausdehnung in der unteren Hälfte des linken Coordinatennetzes, so dass alle zugehörigen Ordinaten negativ sind. Liegt der Gleichgewichtspunkt in diesen Fällen vertical unter dem Schultergelenkmittelpunkt, so ergiebt das oben angeführte Kriterium, dass die Schwere das Schultergelenk beugt und das Ellbogengelenk streckt; die umgekehrte Bewegung würde schon deshalb nicht möglich sein, weil in diesen Fällen der Gesammtschwerpunkt des Armes sich dabei vom Mittelpunkt der Erde entfernen würde. Wenn dagegen der Gleichgewichtspunkt in den zuletzt betrachteten Fällen vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte läge, so würde im Schultergelenk Streckung und im Ellbogengelenk Beugung eintreten. Die Form der zu $\frac{D_2}{D_1}$ gehörenden Curven mit den Indices $-1$ bis 0 auf Tafel III lässt nun weiterhin erkennen, dass der absolute Werth des Drehungsverhältnisses mit wachsendem Beugungswinkel abnimmt oder zunimmt, je nachdem der Gleichgewichtspunkt nahe am Richtpunkt (z. B. für $\frac{D_2}{D_1} = -0{,}8$) oder weiter von ihm entfernt liegt. Dazwischen scheint es eine Lage des Gleichgewichtspunktes zu geben, für welche die Curve horizontal verlaufen würde, so dass das Drehungsverhältniss für alle Beugungswinkel $\psi$ den gleichen Werth annähme. Die genauere Untersuchung zeigt, dass dies in der That der Fall ist, wenn $\frac{D_2}{D_1}$ den Werth

— 0,653 annimmt. Der zugehörige Werth von $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ ist dann — 0,395. Dieses Resultat lässt sich übrigens auch aus der rechten Seite von Tafel II gewinnen, woselbst die Curve mit dem Index — 0,395 als gerade Linie besonders dargestellt ist. Da $\frac{D_2}{D_1} = \frac{\overline{R\mathfrak{E}}}{\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}$ und $\overline{R\mathfrak{E}} = 12{,}82$ cm[1], so folgt hieraus für $\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}$ die Länge $-\frac{12{,}82}{0{,}653}$ cm oder — 19,63 cm, wobei das Minuszeichen andeutet, dass der Gleichgewichtspunkt distalwärts vom Ellbogengelenkmittelpunkt, also auf der Unterarmlängsaxe selbst liegt. Man hat also das Resultat, dass das Drehungsverhältniss, welches die Schwere in den beiden Gelenken hervorruft, in dem besonderen Falle von der Beugestellung im Ellbogengelenk unabhängig ist, in welchem ein Punkt $\mathfrak{P}$ der Unterarmlängsaxe (Figur 11) mit dem Schultergelenkmittelpunkte in einer Verticalen liegt, welcher vom Ellbogengelenkmittelpunkt 19,63 cm entfernt ist. Das constante Drehungsverhältniss ist — 0,395. Es würde also für jede Beugestellung des Ellbogengelenks auf 30° Streckung des Ellbogengelenks 0,395 · 30° oder 11° 50′ Beugung des Schultergelenks kommen, wenn der Punkt vertical unter dem Schultergelenkmittelpunkt liegt. Diese singuläre Gelenkbewegung ist für einige hier in Betracht kommende Ausgangshaltungen des Armes auf Tafel IV (linke Seite unten) dargestellt werden. Liegt der Gleichgewichtspunkt zwischen diesem Punkt und dem Richtpunkt, so nimmt bei zunehmendem Beugungswinkel des Ellbogengelenks die relative Drehung des Schultergelenks ab, dagegen wird sie grösser, wenn der Gleichgewichtspunkt sich in distaler Richtung von dem betreffenden Punkte entfernt.




Dies nur einige Beispiele für die Verwendung der Tafel III. Es empfiehlt sich sehr, dieselbe eingehend zu studiren, wenn man einen Ueberblick über die Wirkungsweise der Schwere wie über die Abhängigkeit der Gelenkbewegungen von den Drehungsmomenten haben will, mit denen ein beliebiger Muskel auf den Arm einwirkt. Diese

1) Vgl. Beiträge zur Muskelstatik I. S. 322.

Tafel III, welche hauptsächlich die in der Tabelle auf Seite 543 bis 545 niedergelegten Resultate veranschaulichen soll, eignet sich jedoch nicht so gut zur genauen Ablesung des Drehungsverhältnisses bei gegebenem Verhältniss der Drehungsmomente und bekanntem Beugungswinkel, wie die hauptsächlich für diesen Zweck construirte Tafel II. Man wird daher in allen Fällen, wo es sich um die Ableitung genauer Resultate handelt, auf diese letztere Tafel zurückgreifen; dieselbe beantwortet alle Fragen, welche bezüglich der Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses von seinen beiden Variabelen gestellt werden können. Im Grunde ist ja Tafel III erst aus derselben hervorgegangen.

Wie die Tabelle auf Seite 543 bis 545 und die Curven auf Tafel III die Abhängigkeit des Drehungsverhältnisses vom Beugungswinkel $\psi$ bei constantem Verhältniss der Drehungsmomente erkennen lassen, so kann man auch auf sehr einfache Weise aus Tafel II ableiten, in welcher Weise das Drehungsverhältniss von dem Verhältniss der Drehungsmomente bei constantem Beugungswinkel $\psi$ abhängt. Während man für jene Aufgabe die zur Abscissenaxe parallelen Geraden des Coordinatennetzes in Betracht zu ziehen hatte, wird man für diese den zur Ordinatenaxe parallelen Geraden des Netzes entlang zu gehen und die zu bestimmten Werthen des Verhältnisses der Drehungsmomente gehörenden Werthe des Drehungsverhältnisses abzulesen haben. Man könnte dann die Resultate wieder in einer Tabelle ordnen und die zu den verschiedenen Werthen des Beugungswinkels gehörenden Diagramme auf einer Tafel, ähnlich der Tafel III, aufzeichnen. Die Ausführung dieser Tabelle und Tafel soll jedoch unterbleiben, da sie weiter keinen Schwierigkeiten begegnen dürfte. Man kann sogar bei aufmerksamer Betrachtung der Tafel II sich ein ganz deutliches Bild dieser Diagramme machen, ohne dieselben wirklich aufzuzeichnen.

Es sollen aus Tafel II nur noch einige singuläre Fälle abgelesen werden; das eingehendere Studium der Tafel mag dann einem Jeden überlassen bleiben.

Es hat sich oben gezeigt, dass im Falle verticaler Oberarmlängsaxe bei einer bestimmten Stellung des Ellbogengelenks, nämlich der rechtwinkligen Beugestellung, die Schwere nicht auf das Schultergelenk einwirkt. Es entsteht nun die Frage, ob es noch andere

Haltungen des Armes giebt, in denen die Schwere ausschliesslich auf das Ellbogengelenk drehend einwirkt. Es ist zweckmässig, hierbei gar nicht auf die Wirkung der Schwere allein Rücksicht zu nehmen, sondern allgemein zu fragen: Wie müssen sich die auf die beiden Abschnitte des Armes durch irgend welche Kräfte ausgeübten Drehungsmomente $D_1$, $D_2$ verhalten, damit keine Drehung im Schultergelenk eintritt?

Diese Frage ist wiederum durch Tafel II schon beantwortet. Wenn keine Drehung im Schultergelenk eintritt, so besitzt das Drehungsverhältniss $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$ den Werth 0, sofern nicht gleichzeitig auch die Drehung im Ellbogengelenk verschwindet; das letztere ist aber ausgeschlossen, so lange die beiden Drehungsmomente nicht selbst gleich Null sind, wie aus den Darlegungen im ersten Beitrage zur Muskelstatik deutlich hervorgeht. Man hat also für den vorliegenden Zweck nur die das linke Coordinatennetz auf Tafel II nahezu diagonal durchziehende Niveaulinie mit dem Index 0, von der sich noch ein kleines Stück in der oberen linken Ecke des rechten Coordinatennetzes befindet, ins Auge zu fassen. Dieselbe ergiebt ohne Weiteres die zusammengehörenden Werthe von $\frac{D_1}{D_2}$ resp. $\frac{D_2}{D_1}$ und dem Beugungswinkel $\psi$ des Ellbogengelenks. Es ist gar nicht nöthig, diese Werthe noch einmal hinzuschreiben, da sie sich schon in der ersten Reihe der Tabelle auf Seite 530 niedergelegt finden. Hieraus ergiebt sich also z. B. das Resultat, dass die Schwere bei 65° Beugungswinkel des Ellbogengelenks dann keine Drehung im Schultergelenk hervorbringt, wenn $\frac{D_1}{D_2} = + 0{,}473$, d. h. wenn der Gleichgewichtspunkt auf der Rückwärtsverlängerung der Unterarmlängsaxe in einer Entfernung vom Ellbogengelenkmittelpunkt liegt, welche nahezu halb so gross ist (genau 6,06 cm), wie die Entfernung des Ellbogengelenkmittelpunkts vom Richtpunkt. Dies entspricht einem Werthe des Winkels $\varphi_1$ zwischen $+ 11^0$ und $+ 12^0$. Rückt dagegen der Gleichgewichtspunkt von dieser besonderen Stelle in distaler oder proximaler Richtung auf der Unterarmlängsaxe etwas fort, so sagt wiederum die Tafel II, dass dann bei $\psi = 65^0$ im Schultergelenk Drehung eintritt und zwar im ersteren Falle die entgegengesetzte, im letzteren die gleiche Drehung wie im Ellbogengelenk. Liegt hierbei der Gleichgewichtspunkt unter dem Schultergelenkmittel-

punkt, so überzeugt man sich leicht, dass die Schwere auf das Ellbogengelenk streckend einwirkt; dieselbe wird daher bei $\psi = 65^0$ das Schultergelenk im ersteren Falle beugen, im letzteren strecken. Die Haltungen des Armes, in denen die Schwere keine Drehung des Schultergelenks hervorbringt, sind daher auch von einer gewissen Bedeutung für die Erkenntniss der Art der durch die Schwere erzeugten Drehung des Schultergelenks; sie scheiden nämlich Haltungen des Armes, in welchen im Schultergelenk die entgegengesetzte Drehung wie im Ellbogengelenk stattfindet, von denen, in welchen Schulter- und Ellbogengelenk im gleichen Sinne durch die Schwere gedreht werden. Auf Tafel IV (rechte Seite oben) finden sich einige dieser Armhaltungen aufgezeichnet, in welchen die Schwere allein das Ellbogengelenk dreht.

Weiter kann man nun fragen, ob von irgend welchen Haltungen des Armes aus die Schwere keine Drehung im Ellbogengelenk, sondern nur Drehung des Schultergelenks hervorruft, so dass in diesem Moment der Arm sich genau so verhält, als ob das Ellbogengelenk arretirt wäre. Da in diesem Falle $\psi'' = 0$ wäre, so hat man nur zu fragen, für welche Stellungen des Armes das reciproke Drehungsverhältniss $\frac{\psi''}{\varphi''_1}$ den Werth Null annimmt. Die Antwort auf diese Frage findet sich ebenfalls schon in der Tafel II (untere Curve mit dem Index 0 auf der rechten Seite) und in der Tabelle auf Seite 532 (erste Reihe) niedergelegt. Da die hierzu gehörende Curve mit dem Index 0 ganz in das rechte Coordinatennetz auf Tafel II hineinfällt, so erkennt man, dass dieser Fall nur möglich ist, wenn $D_1 > D_2$ ist, d. h. also wenn der Gleichgewichtspunkt weiter vom Ellbogengelenkmittelpunkt entfernt ist, als der letztere vom Richtpunkt. Da ferner, wie aus der ersten Reihe der Tabelle auf Seite 532 und auch aus der besonderen Lage der Curve auf Tafel II zur Abscissenaxe des Coordinatennetzes hervorgeht, das Verhältniss $\frac{D_2}{D_1}$ für alle Werthe von $\psi$ positiv ist, so erkennt man weiter, dass der Gleichgewichtspunkt in diesem Falle nur auf der Rückwärtsverlängerung der Unterarmlängsaxe liegen kann. Aus der Tabelle ergiebt sich z. B. bei $\psi = 65^0$ für $\frac{D_2}{D_1} = + 0{,}523$. Der Gleichgewichtspunkt wird daher in diesem Falle nicht ganz doppelt so weit vom Ellbogengelenkmittelpunkt entfernt

(genau 24,51 cm) sein, als letzterer vom Richtpunkt, und man hätte die in Figur 12 dargestellte Haltung des Armes, wenn der Gleichgewichtspunkt (𝔊*s*) unter dem Schultergelenk liegt. Der Winkel $\varphi_1$ besitzt dabei annähernd den Werth $+ 48^0$. Es ist hier ohne weiteres klar, dass durch die Schwere nur Streckung des Schultergelenks hervorgerufen werden kann, wenn der Arm sich so verhalten soll, als ob das Ellbogengelenk arretirt wäre. Aus der Tafel II ist nun weiterhin ersichtlich, dass im Ellbogengelenk Drehung erfolgt, wenn der Werth von $\frac{D_2}{D_1}$ sich ändert, und dass bei $\psi = 65^0$ diese Drehung der Streckung des Schultergelenks gleichgerichtet, wenn $\frac{D_2}{D_1} > + 0{,}523$, dagegen entgegengesetzt gerichtet ist, wenn $\frac{D_2}{D_1} < + 0{,}523$. Das heisst aber nichts anderes, als dass bei 65° Beugungswinkel des Ellbogengelenks die Schwere das Ellbogengelenk streckt oder beugt, je nachdem der Gleichgewichtspunkt in der Richtung auf das Ellbogengelenk zu oder in entgegengesetzter Richtung von der in Figur 12 dargestellten Lage 𝔊*s* auf der Unterarmlängsaxe etwas abweicht. Man sieht also, die Haltungen, in denen die Schwere keine Drehung des Ellbogengelenks hervorbringt, sind ebenfalls von einer gewissen Bedeutung für die Erkenntniss der Art der Drehung im Ellbogengelenk; auch sie scheiden Haltungen des Armes, in welchen im Ellbogengelenk die entgegengesetzte Drehung wie im Schultergelenk stattfindet, von denen, in welchen Ellbogen- und Schultergelenk in gleichem Sinne durch die Schwere gedreht werden. Auf Tafel IV (rechte Seite unten) sind daher einige dieser Armhaltungen aufgezeichnet worden.

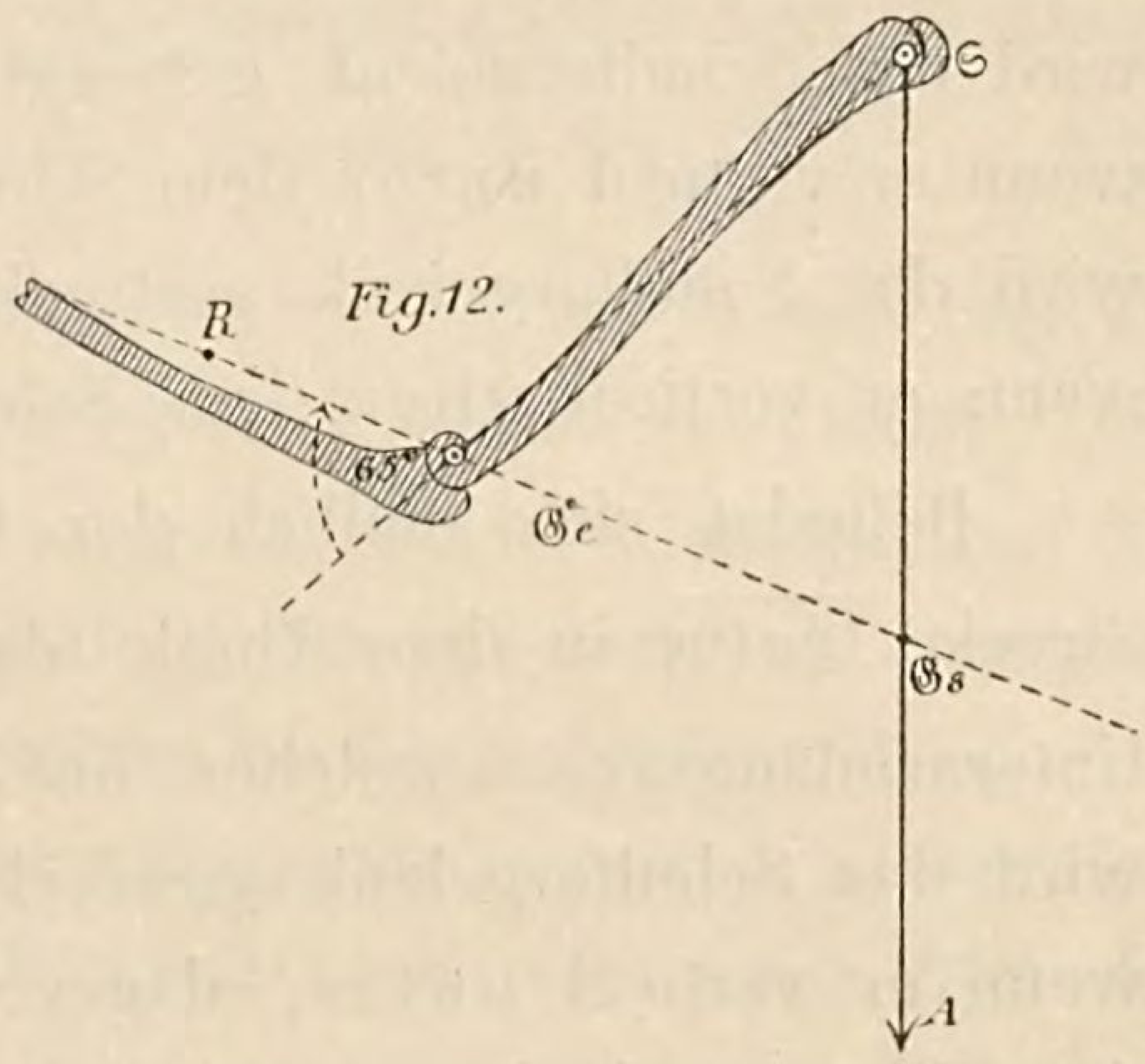


Fig. 12.

Die beiden zu einem bestimmten Werthe des Beugungswinkels $\psi$ gehörenden Lagen des Gleichgewichtspunktes, im Falle die Schwere allein auf das Ellbogengelenk wirkt (𝔊*e* in Figur 12) und im Falle dieselbe nur das Schultergelenk dreht (𝔊*s* in Figur 12), geben nun ein sehr einfaches Mittel an die Hand, für jede beliebige Lage des

Gleichgewichtspunktes sofort zu entscheiden, von welcher Art die Drehungen in den beiden Gelenken sind. Zunächst ergiebt sich aus den obigen Erörterungen, dass die Drehungen in beiden Gelenken in derselben oder in entgegengesetzter Richtung stattfinden, je nachdem der Gleichgewichtspunkt innerhalb oder ausserhalb der Strecke $\overline{\mathfrak{G}e\mathfrak{G}s}$ liegt. Befindet sich nun der Gleichgewichtspunkt innerhalb $\overline{\mathfrak{G}e\mathfrak{G}s}$ und liegt er bei der betreffenden Haltung des Armes vertical unter dem Schultergelenkmittelpunkt, so wird sowohl das Schultergelenk wie das Ellbogengelenk gestreckt; dagegen werden beide Gelenke gebeugt, wenn der Arm so steht, dass der Gleichgewichtspunkt vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte liegt.

Befindet sich der Gleichgewichtspunkt ausserhalb der Strecke $\overline{\mathfrak{G}e\mathfrak{G}s}$ und zwar in dem Theile der nach beiden Seiten verlängerten Unterarmlängsaxe, welcher im Punkte $\mathfrak{G}e$ an $\overline{\mathfrak{G}e\mathfrak{G}s}$ angrenzt, so wird das Schultergelenk gebeugt und das Ellbogengelenk gestreckt, wenn er vertical unter dem Schultergelenkmittelpunkt liegt, dagegen wird das Schultergelenk gestreckt und das Ellbogengelenk gebeugt, wenn er vertical über dem Schultergelenkmittelpunkt liegt.

Befindet sich endlich der Gleichgewichtspunkt ausserhalb der Strecke $\overline{\mathfrak{G}e\mathfrak{G}s}$ in dem Theile der nach beiden Seiten verlängerten Unterarmlängsaxe, welcher im Punkte $\mathfrak{G}s$ an $\overline{\mathfrak{G}e\mathfrak{G}s}$ angrenzt, so wird das Schultergelenk gestreckt und das Ellbogengelenk gebeugt, wenn er vertical unter, dagegen das Schultergelenk gebeugt und das Ellbogengelenk gestreckt, wenn er vertical über dem Schultergelenkmittelpunkt liegt.

Die zu einem bestimmten Beugungswinkel des Ellbogengelenks gehörenden Punkte $\mathfrak{G}e$, $\mathfrak{G}s$ machen die Anwendung des früher angegebenen Kriteriums zum Erkennen der Art der Gelenkbewegungen überflüssig. Es ist daher sehr zu empfehlen, dass man sich die Lage dieser beiden Punkte für die verschiedenen Werthe von $\psi$ vergegenwärtigt. Aus diesem Grunde finden sich auf der rechten Seite von Tafel IV bei den einzelnen Armhaltungen die Punkte $\mathfrak{G}e$ und $\mathfrak{G}s$ in ihrer Lage auf der Unterarmlängsaxe angegeben.

Endlich kann man die Punkte $\mathfrak{G}e$ und $\mathfrak{G}s$ dazu verwenden, auch für einen beliebigen Muskel, dessen Drehungsmomente man in Bezug auf ihr Grössenverhältniss und die Art ihres Drehungsbestrebens

bestimmt hat, die Art der eintretenden Gelenkbewegungen zu bestimmen. Man braucht sich zu diesem Zwecke nur zu fragen, was die Schwere für Drehungen in den beiden Gelenken hervorbringen würde, wenn sie bei demselben Beugungswinkel $\psi$ mit Drehungsmomenten von gleichem Verhältniss und gleichen Vorzeichen wie der Muskel auf den Arm einwirken würde. Durch das bekannte Verhältniss der Drehungsmomente ist die Lage des Gleichgewichtspunktes bestimmt, und aus dem Vorzeichen der Drehungsmomente lässt sich entscheiden, ob der Gleichgewichtspunkt für den vorliegenden Zweck vertical über oder vertical unter dem Schultergelenkmittelpunkte zu liegen hätte. Mehr braucht man aber nicht zu wissen, um in der oben angegebenen Weise mit Hülfe der beiden zu dem in Frage kommenden Beugungswinkel $\psi$ gehörenden Punkte $\mathfrak{G}e$ und $\mathfrak{G}s$ die Entscheidung über die Art der Gelenkbewegungen treffen zu können.

Fasst man z. B. die Wirkung des langen Kopfes vom M. biceps brachii bei $\psi = 65^0$ in's Auge. Für denselben ist $\frac{D_1}{D_2} = -0{,}42$ (Seite 535). Daher liegt, wenn die Schwere in derselben Weise auf den Arm einwirken soll, der Gleichgewichtspunkt in diesem Falle ausserhalb der Strecke $\overline{\mathfrak{G}e\mathfrak{G}s}$ und zwar in distaler Richtung von $\mathfrak{G}e$. $D_1$ sucht den Oberarm zu strecken und $D_2$ den Unterarm im entgegengesetzten Sinne zu drehen. Die gleiche Wirkung würde die Schwere hervorbringen, wenn der Gleichgewichtspunkt vertical über dem Schultergelenkmittelpunkte läge. Folglich wird nach Seite 552 der Biceps bei $\psi = 65^0$ das Schultergelenk strecken und das Ellbogengelenk beugen.

Als weiteres Beispiel sei die Wirkungsweise der allein zwischen Ober- und Unterarm sich erstreckenden Muskeln in's Auge gefasst. Diese Muskeln sind dadurch charakterisirt, dass $\frac{D_1}{D_2}$ für alle Beugestellungen des Ellbogengelenks den constanten Werth $-1$ besitzt. Die Schwere zeigt den gleichen Werth für $\frac{D_1}{D_2}$, wenn der Gleichgewichtspunkt mit dem Richtpunkt zusammenfällt. Je nachdem derselbe vertical über oder unter dem Schultergelenkmittelpunkt liegt, hat man dann durch die Schwere genau die gleiche Gelenkbewegung erzeugt als durch einen Beugemuskel oder einen Streckmuskel. Man bestätigt leicht, dass das Diagramm mit dem Index $-1$ auf der linken Seite der Tafel III

genau den Werthen des Drehungsverhältnisses entspricht, welche in dem ersten Beitrage zur Muskeldynamik für die »eingelenkigen« Muskeln gefunden wurden.

Man sieht also, die Untersuchung der Wirkung der Schwere kommt auch der Erkenntniss der Wirkungsweise der verschiedenen Muskeln zu gute, ein Grund mehr, um dieselbe an der Hand der Tafeln II und III und der zugehörigen Tabellen einem eingehenden Studium zu unterwerfen. In den vorstehenden Darlegungen sollte nur an einigen Beispielen gezeigt werden, welche Richtung etwa dieses Studium einzuschlagen hat; keineswegs ist aber darin Alles hervorgehoben worden, was mit den Tafeln II und III gewonnen ist. Eine ausführliche Angabe aller in diesen Tafeln enthaltenen Resultate würde den üblichen Rahmen einer einzelnen Abhandlung weit übersteigen und muss daher dem Selbststudium überlassen bleiben.

Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte auf die beiden Abschnitte des Armes ein, gleichgültig ob dieselben durch die Contraction von Muskeln oder durch die Schwere verursacht sind, so kann man aus Tafel II ebenfalls sofort die Grösse des Drehungsverhältnisses ablesen, wenn man die resultirenden Drehungsmomente $D_1$ und $D_2$ bestimmt hat, mit denen alle Kräfte zusammen auf Ober- und Unterarm einwirken.

Endlich ist mit dem Vorstehenden auch noch die umgekehrte Aufgabe im Princip gelöst, das Grössenverhältniss der Drehungsmomente anzugeben, welche auf die beiden Abschnitte des im Ellbogengelenk gegliederten Armes ausgeübt werden müssen, damit eine Gelenkbewegung mit bestimmtem Verhältniss der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk eintritt. —

In der vorliegenden Untersuchung sind hauptsächlich die Verhältnisse des im Ellbogengelenk gegliederten Armes in Rücksicht gezogen worden. Handelt es sich um irgend ein anderes zweigliedriges System, welches den für den Arm gemachten Voraussetzungen entspricht, so ist der Gang der Untersuchung genau derselbe. Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit lag aber gerade darin, die Methode anzugeben, nach der man bei der Untersuchung der durch irgend welche Kräfte hervorgebrachten Gelenkbewegungen eines zweigliedrigen Systems zu verfahren hat.

## Rückblick.

Im Verlaufe einer früheren Untersuchung (deren Resultate als ein erster Beitrag zur Muskeldynamik im XXII. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften niedergelegt sind) hatte sich herausgestellt, dass die allein über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Muskeln des Armes bei ihrer Contraction nicht nur Bewegung im Ellbogengelenk, sondern auch Drehung im Schultergelenk hervorrufen, über das sie gar nicht hinwegziehen, und dass die Drehungen in diesen beiden Gelenken für jede Ausgangsstellung des Armes in einem ganz bestimmten, allein vom Beugungswinkel des Ellbogengelenks abhängigen Verhältniss stehen. Dieses Drehungsverhältniss, wie es kurz genannt sein soll, kann weder durch Veränderung der Spannung, noch durch Aenderung der Insertionsstellen des Muskels geändert werden.

Es lag nun nahe, zu untersuchen, ob sich etwas Aehnliches auch für die anderen Muskeln des Armes, welche entweder nur über das Schultergelenk oder über beide Gelenke hinwegziehen, herausstellt.

Was die am Oberarm ansetzenden Muskeln anlangt, so hat sich zunächst die mechanisch sehr leicht erklärbare Thatsache ergeben, dass alle diese Muskeln, bezüglich alle zu einer mechanischen Einheit zusammenfassbaren Bündel von Muskelfasern, so weit sie nur überhaupt mit einer Componente das Schultergelenk um eine der Ellbogenaxe parallelle Axe zu drehen streben, auch auf das Ellbogengelenk einwirken, über das sie gar nicht hinwegziehen. Es ist also hier ein Analogon zu dem Fall zu constatiren, dass die allein über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Muskeln auch eine Drehung im Schultergelenk hervorbringen. Ferner hat sich auch hier gezeigt, dass das Drehungsverhältniss für jede Ausgangshaltung des Armes

einen ganz bestimmten, allein von der Beugestellung des Ellbogengelenks abhängigen Werth besitzt, der in keiner Weise von der Spannung des Muskels oder der Lage seiner Insertionsstellen beeinflusst wird. Dass auch für die Wirkungsweise dieser Muskeln die Stellung im Ellbogengelenk massgebend ist, trotzdem sie gar nicht über dasselbe hinwegziehen, hat seinen Grund darin, dass die in Folge des Gelenkzusammenhanges stattfindende gegenseitige Beeinflussung der Bewegungen des Oberarms und Unterarms sich ausschliesslich nach der Stellung des Ellbogengelenks richtet. Wie die eingelenkigen Beuger des Ellbogengelenks das Schultergelenk strecken und die eingelenkigen Strecker des Ellbogengelenks das Schultergelenk beugen, so hat sich in entsprechender Weise für die am Oberarm ansetzenden Muskeln herausgestellt, dass die Beuger des Schultergelenks das Ellbogengelenk strecken und die Strecker des Schultergelenks das Ellbogengelenk beugen.

Bei den mehrgelenkigen, über Ellbogen- und Schultergelenk hinwegziehenden Muskeln liegen die Verhältnisse nicht so einfach. Es hat sich zwar auch für diese ergeben, dass zu jeder bestimmten Ausgangshaltung des Armes ein ganz bestimmtes Verhältniss der Drehungen im Schulter- und Ellbogengelenk gehört, wenn die Contraction des Muskels mit ganz beliebiger Spannung aus der Ruhe erfolgt. Die Grösse dieses Drehungsverhältnisses hängt aber von der Ansatzweise und dem Verlauf der Fasern des Muskels ab. Während also z. B. der M. brachialis Drehungen des Schultergelenks und Ellbogengelenks von genau demselben Grössenverhältniss hervorbringt, wie bei gleicher Haltung des Armes ein jeder der beiden eingelenkigen Köpfe des M. triceps brachii, und ein Unterschied in der Wirkungsweise dieser Muskeln nur in der Richtung der beiden Gelenkbewegungen zu finden ist, bringen der lange Kopf des M. biceps brachii und der lange Kopf des M. triceps brachii Drehungen in den beiden Gelenken von ganz verschiedenem Grössenverhältniss hervor. Es stellt sich sogar ein, wenn auch geringer, Unterschied in der Wirkungsweise der beiden Köpfe des M. biceps brachii heraus. Wenn wir noch mehr Muskeln hätten, welche am Unterarm ansetzten und ihren Ursprung ausserhalb des Armes, am Rumpfe, besässen, so würde bei gleicher Armhaltung einem jeden Muskel ein anderes Drehungsverhältniss zukommen. Da die zu den verschiedenen

Haltungen des Armes gehörenden Drehungsverhältnisse gar nicht von der Muskelspannung abhängen, so sind sie für einen bestimmten Muskel ebenso charakteristisch, wie beispielsweise die Stellungen des Armes, bei denen allein er der Schwere Gleichgewicht halten kann. Wie diese ein statisches, so stellen jene ein dynamisches Charakteristicum des Muskels dar. Die Kenntniss beider ist für das Verständniss der Bedeutung und Wirkungsweise eines Muskels unerlässlich.

In der vorliegenden Arbeit findet sich nun vor Allem die Methode angegeben, nach der die Drehungsverhältnisse für die verschiedenen Arten von Muskeln und beliebige auf ein zweigliedriges System einwirkende Kräfte, wie z. B. die Schwere, bestimmt werden können. Es sind dabei für die Untersuchung im Interesse der Anschaulichkeit wieder die schon im ersten Beitrage zur Muskeldynamik berücksichtigten Verhältnisse des menschlichen Armes zu Grunde gelegt worden, ohne dass dadurch die Allgemeingültigkeit der Resultate für alle entsprechenden zweigliedrigen Systeme beeinträchtigt würde.

Die Resultate der Untersuchung zeigen recht deutlich, dass man mit der Kenntniss der Grösse der Drehungsmomente noch gar keinen Einblick in die Wirkungsweise eines Muskels gewonnen hat. Dieselbe wird vor allen Dingen durch die drehenden Einwirkungen bestimmt, welche ein jeder der beiden Hauptabschnitte des Armes auf den anderen ausübt, sobald das System durch irgend welche Kräfte in Bewegung gesetzt wird.

So gilt wohl ganz allgemein der lange Kopf des M. biceps brachii als Beuger (Vorwärtsdreher) des Schultergelenks, da er mit seiner langen Ursprungssehne auf der Beugeseite des Schultergelenks über den Humeruskopf hinwegzieht. Die Untersuchung ergiebt aber gerade das Gegentheil. Der Muskel bringt, so lange nur das Ellbogengelenk nicht arretirt ist, in den meisten Stellungen des Armes eine Streckung (Rückwärtsdrehung) des Schultergelenks hervor. Nur wenn er sich bei weit über die rechtwinklige Beugestellung des Ellbogengelenks hinaus gebeugtem Arm contrahirt, wird er gleichzeitig das Ellbogengelenk und das Schultergelenk beugen. Er ist also vor allen Dingen in die Reihe der Strecker des Schultergelenks zu stellen.

Nicht weniger überraschend ist die Wirkung der Schwere auf

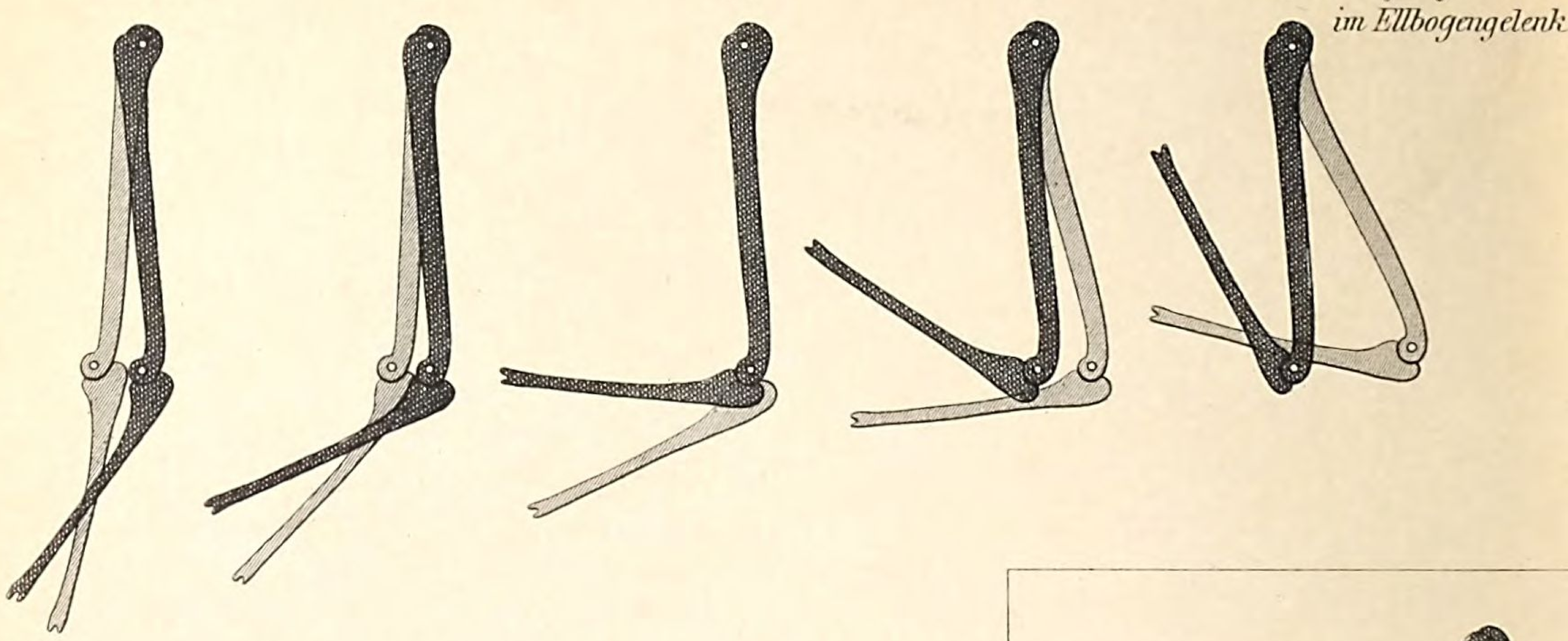
die beiden Gelenke. Wenn man beispielsweise den Unterarm im Ellbogengelenk um 65° gegenüber der äussersten Streckstellung gebeugt hat und dann den Arm so hält, dass die Längsaxe des Oberarms nach vorn, also im Sinne einer Beugung im Schultergelenk, von der Verticalen um weniger als 115° abweicht, so sucht die Schwere sowohl im Schultergelenk als im Ellbogengelenk Streckung hervorzubringen. In Folge der gegenseitigen Beeinflussung der Bewegungen der beiden Abschnitte des Armes findet dagegen die in Wirklichkeit eintretende Drehung in den beiden Gelenken bei vielen hierher gehörenden Armhaltungen gerade in entgegengesetztem Sinne statt. Weicht nämlich die Oberarmlängsaxe nur bis höchstens 11° von der Verticalen nach vorn ab, so tritt unter alleiniger Einwirkung der Schwere im Schultergelenk Beugung und im Ellbogengelenk Streckung ein. Bei etwas über 11° Abweichung von der Verticalen findet im Schultergelenk gar keine Drehung, sondern nur im Ellbogengelenk Streckung statt. Wird der Abweichungswinkel der Oberarmlängsaxe von der Verticalen noch grösser, so werden beide Gelenke gestreckt, so lange dieser die Ausgangshaltung des Oberarms bestimmende Winkel noch kleiner wie 48° bleibt. Ist er 48° geworden, so tritt zwar im Schultergelenk Streckung, dagegen im Ellbogengelenk gar keine Drehung ein. Weicht die Oberarmlängsaxe um mehr als 48° von der Verticalen ab, so findet endlich im Schultergelenk Streckung und im Ellbogengelenk Beugung statt. Und trotzdem wirkt bei allen diesen Haltungen des Armes die Schwere mit Drehungsmomenten auf das System ein, welche in beiden Gelenken Streckbewegung hervorzubringen suchen.

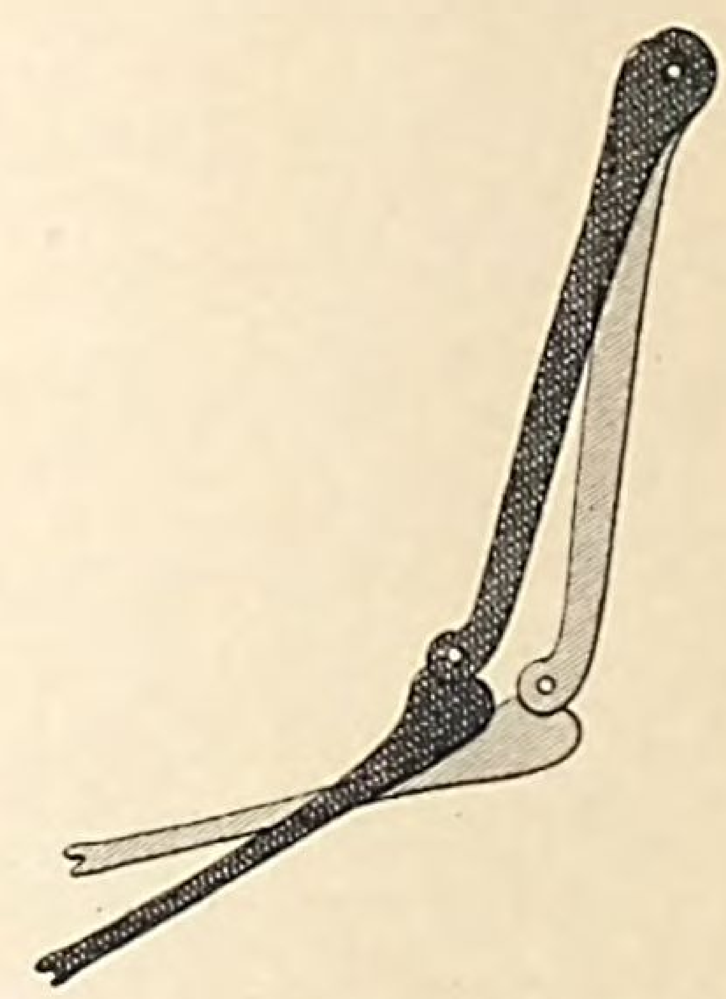
Ein ähnliches Resultat erhält man für jede andere Beugestellung des Ellbogengelenks, wie sich in der Arbeit ausführlich abgeleitet findet.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

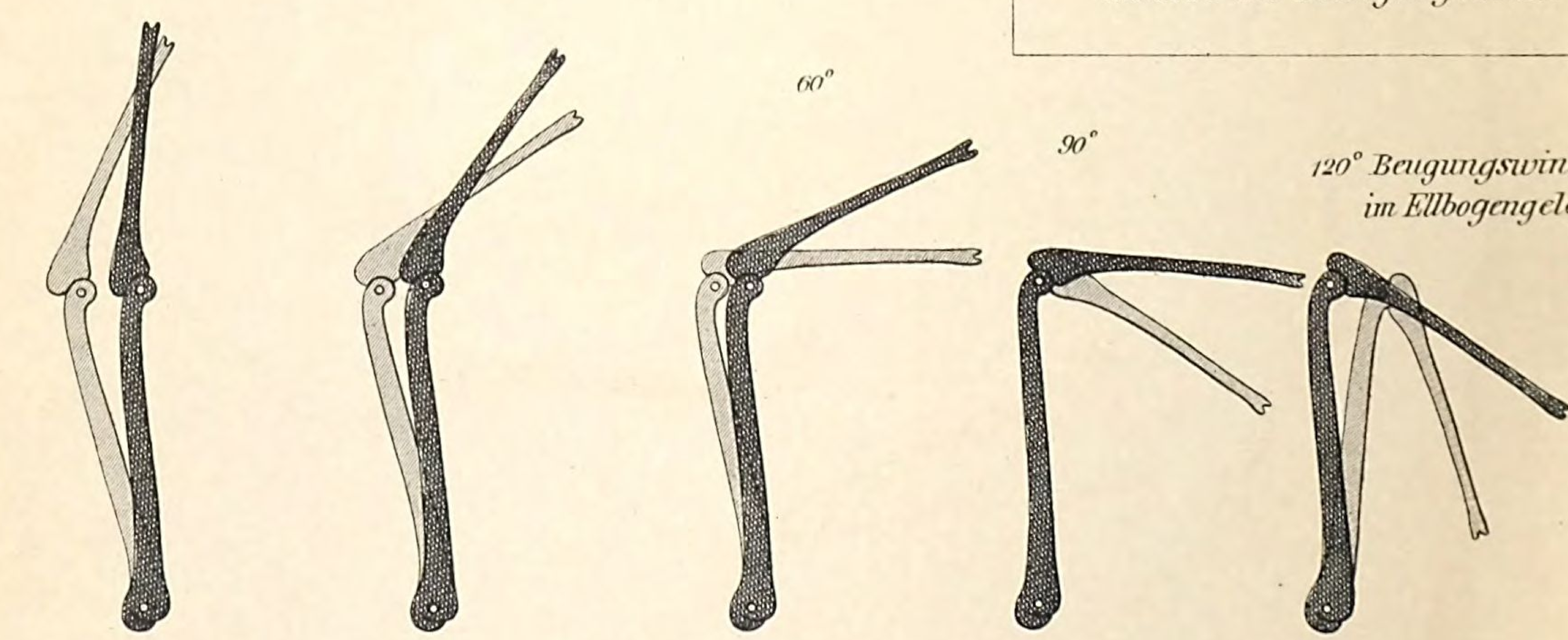
Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

[illegible]
LIBRARY
[illegible]

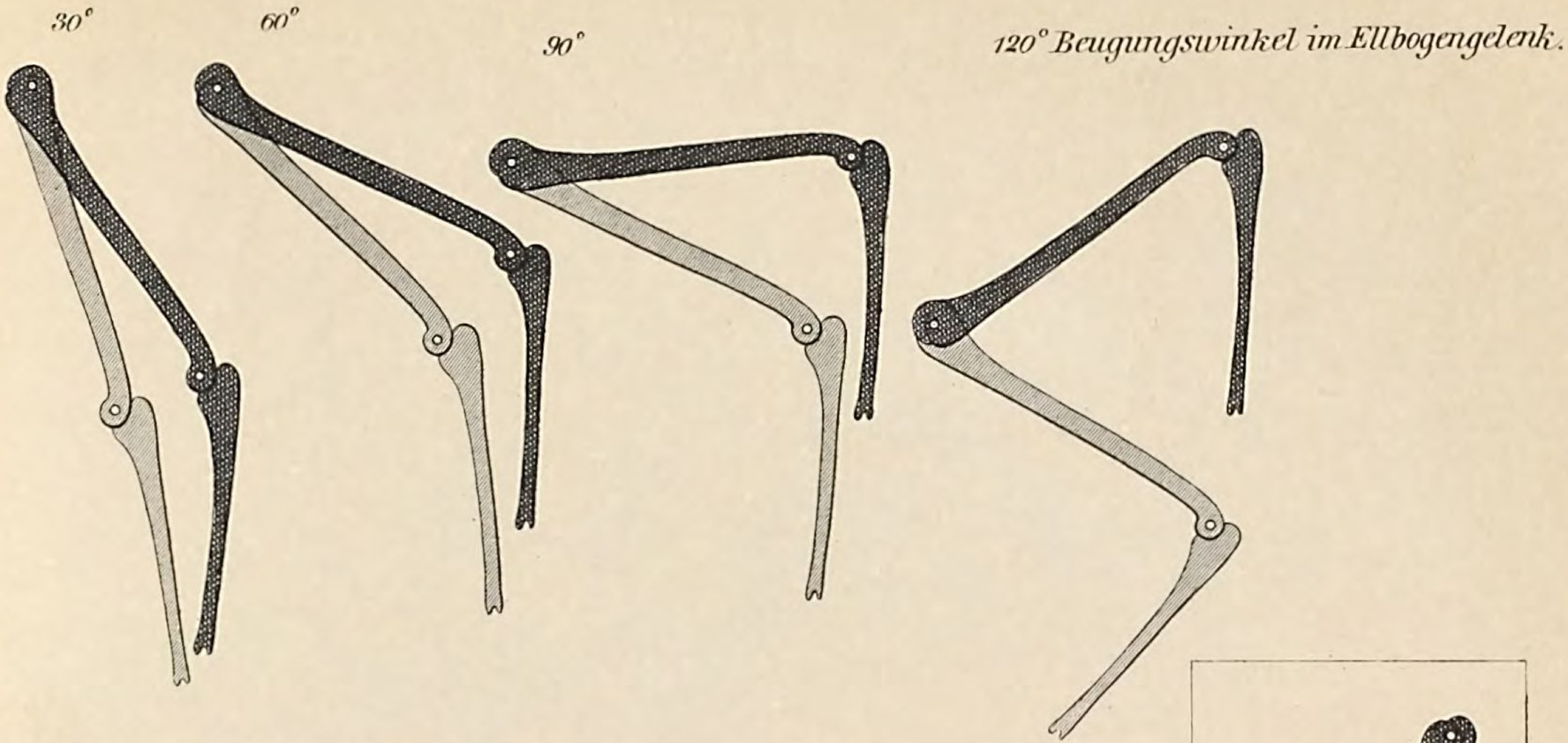


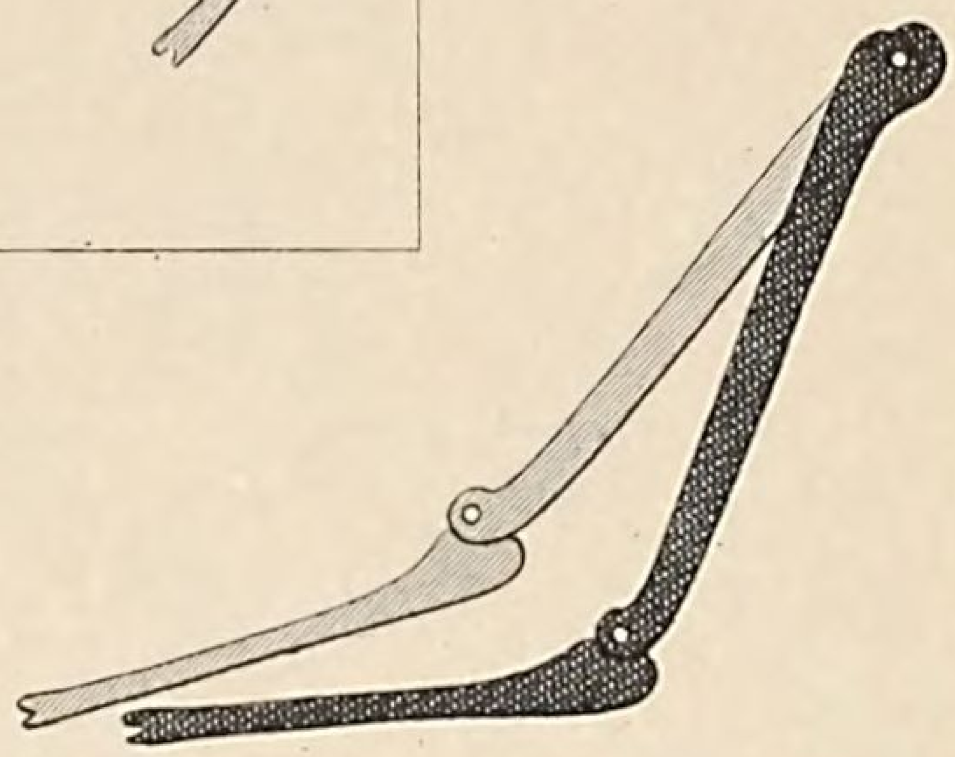



Wirkung des langen Kopfes von M. biceps brachii bei 33° Beugungswinkel im Ellbogengelenk.

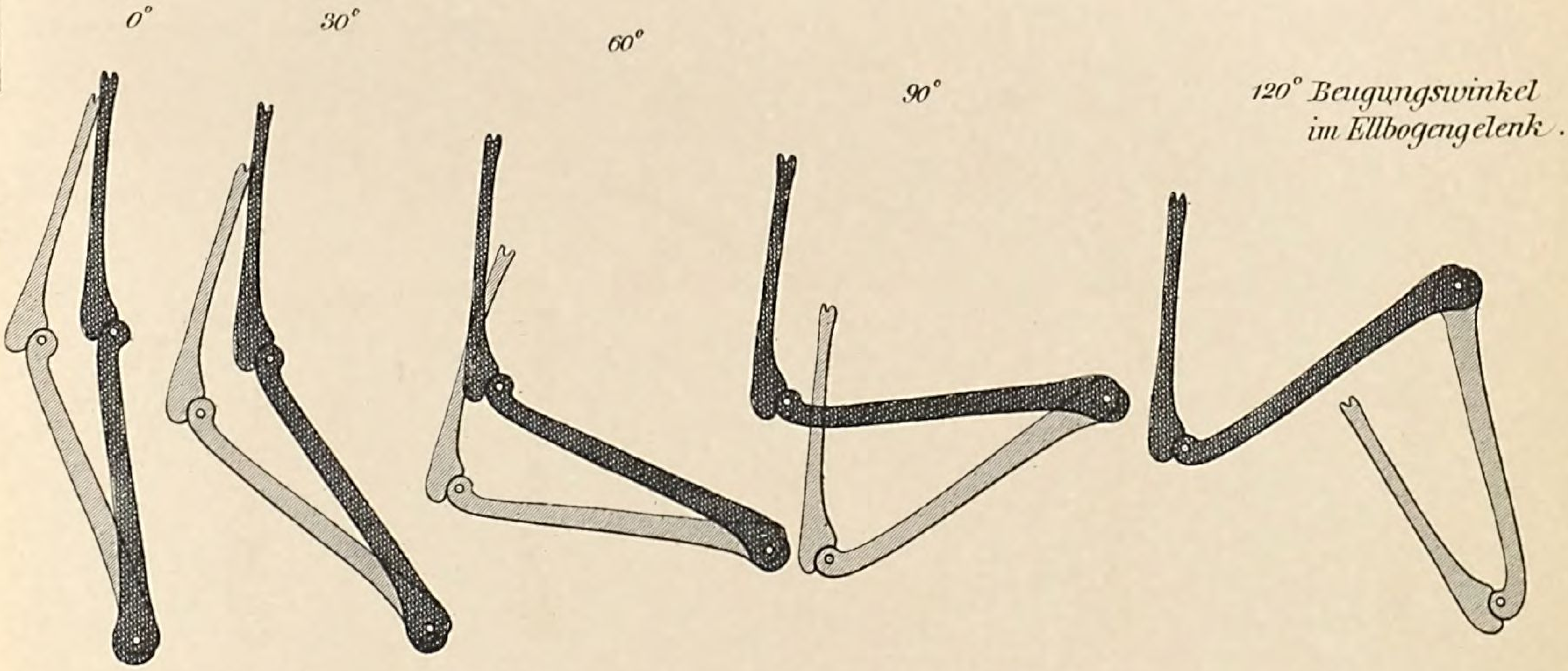



Anfang der durch die Schwere hervorgebrachten Gelenkbewegung bei verticaler Richtung der Oberarmlängsaxe.



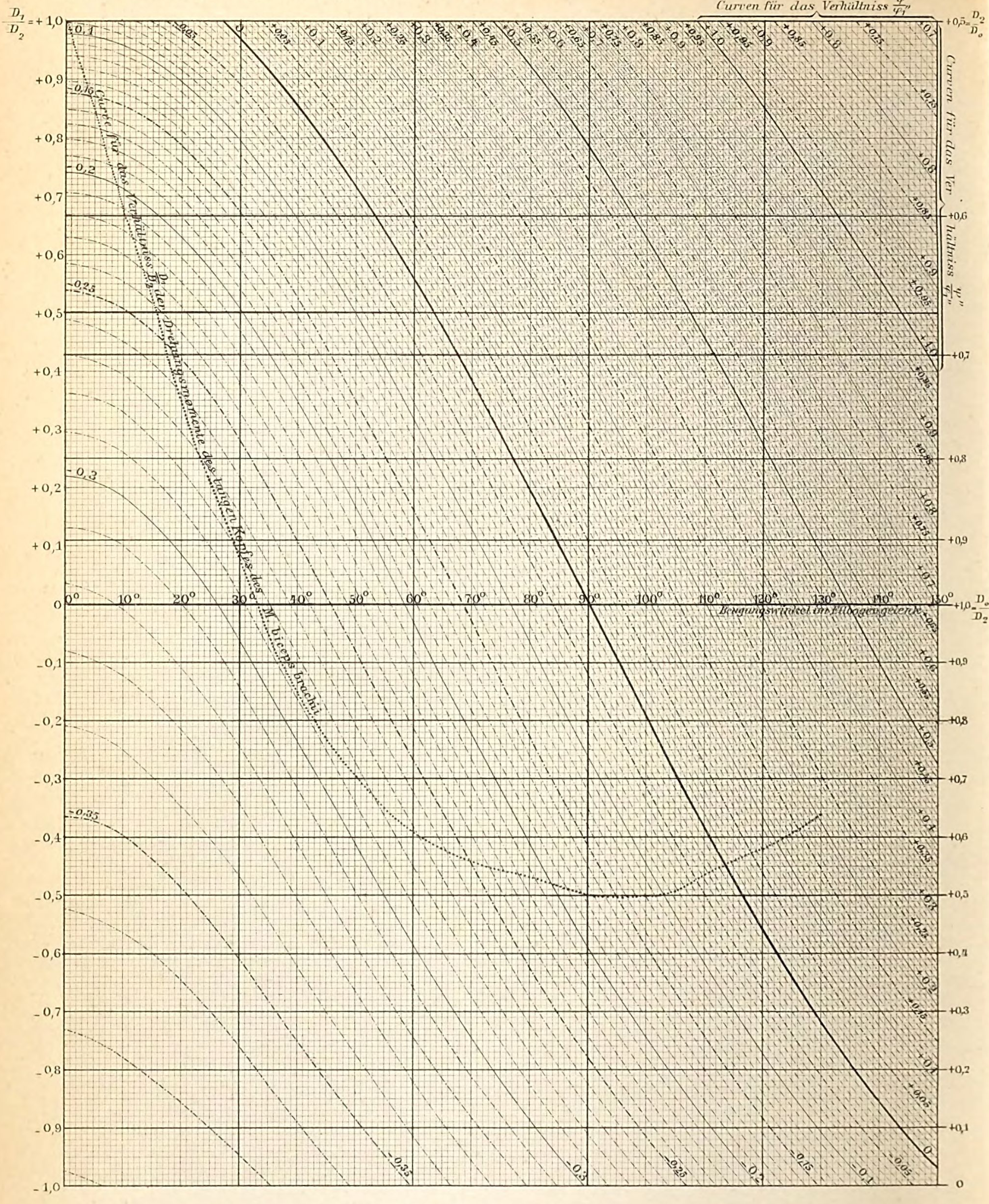



Wirkung des M. deltoideus bei
50° Beugungswinkel im Ellbogengelenk.

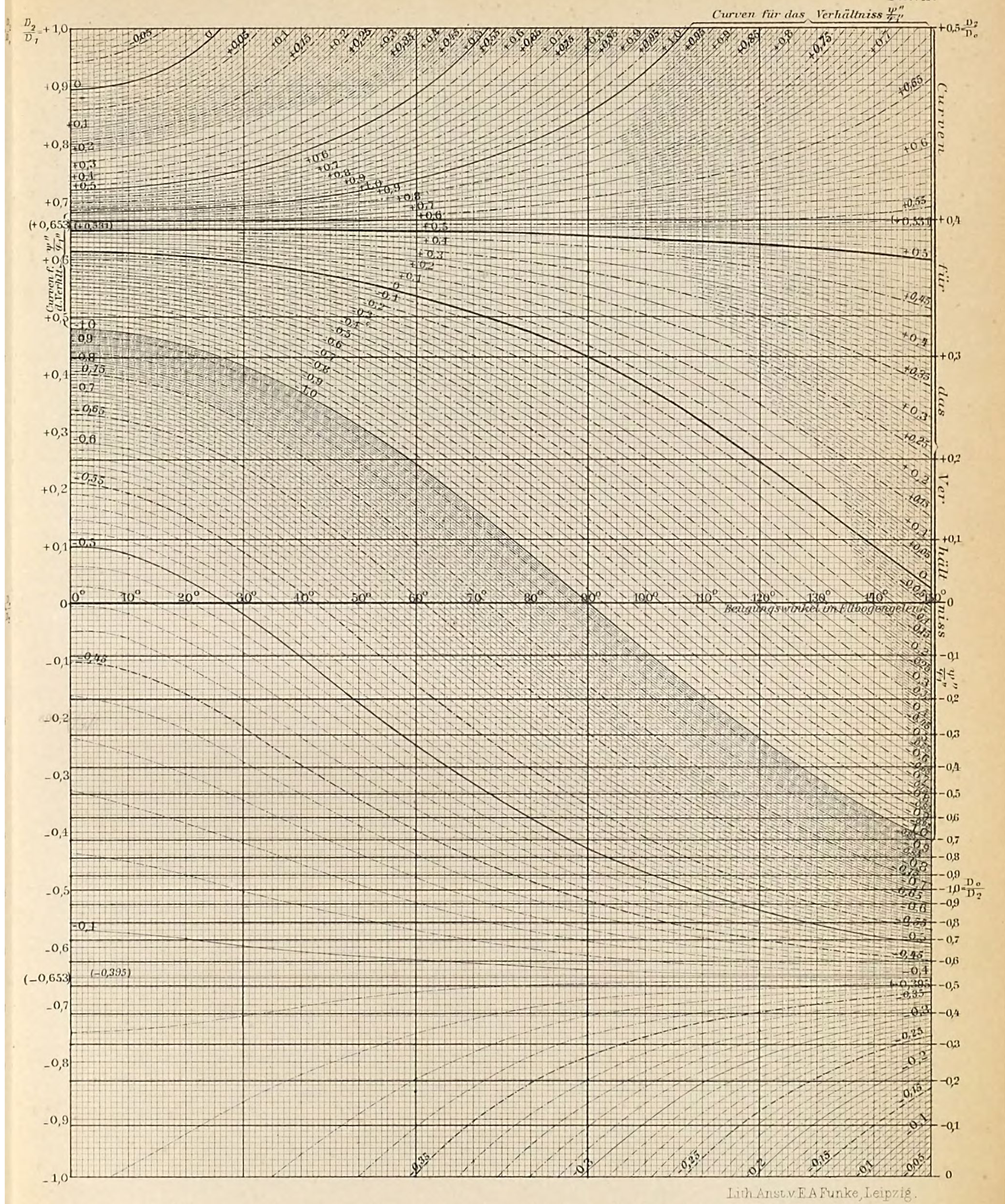



Anfang der durch die Schwere hervorgebrachten Gelenkbewegung bei verticaler Richtung der Unterarmlängsaxe.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

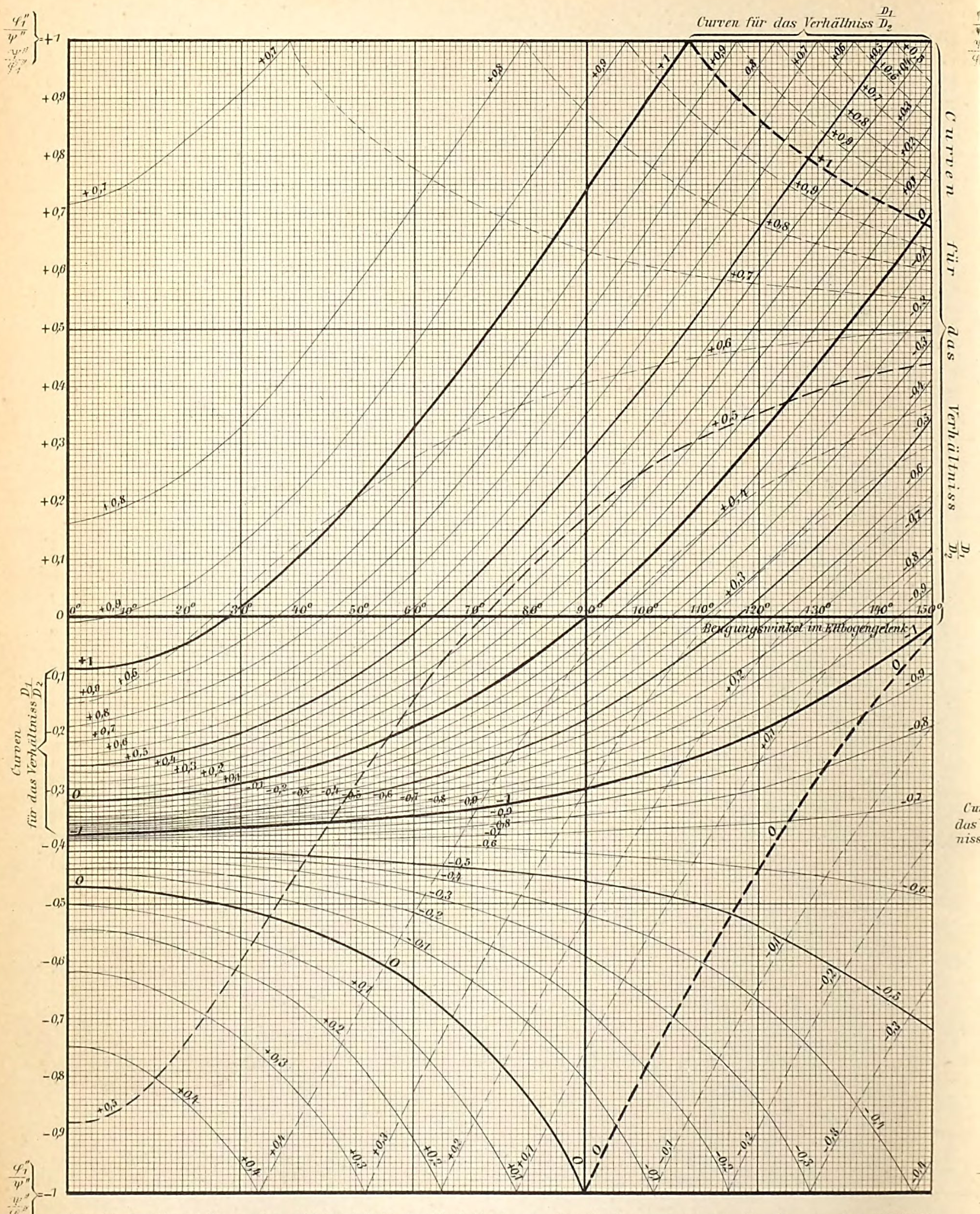



*Graphische Darstellung der Abhängigkeit des Verhältnisses der Winkelbeschleunigungen $\varphi_1''$ und $\psi''$ im S*
*der Drehungsmomente $D_1$ und $D_2$, bezüglich $D_0$ und $D_2$, mit denen ein beliebiger ein-oder mehrgelen*
*äusseren Kräften auf den Oberarm und den Unterarm, bezüglich auf den ganzen im Ellbogenge*
*beiden Winkelbeschleunigungen als der beiden Drehungsmomente ist immer dasjenige für die graph*
*Werth in Folge dessen kleiner oder höchstens gleich 1 ist. Die Curven, für welche am Rande nicht bes*

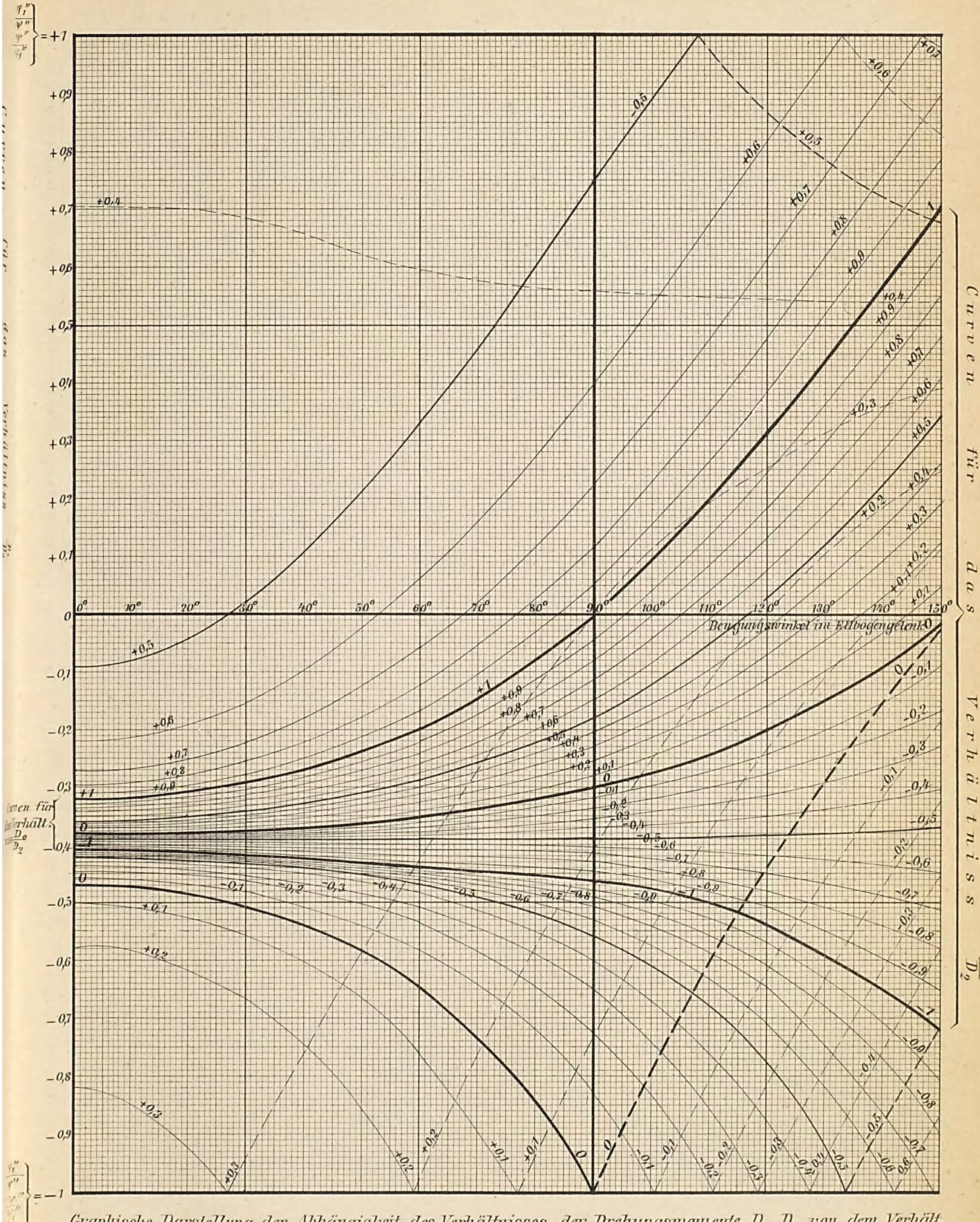



Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

...hultergelenk und Ellbogengelenk von dem Beugungswinkel φ im Ellbogengelenk und den Verhältnissen
...iger Muskel, irgend eine äussere Kraft, wie die Schwerkraft, oder ein ganzes System von inneren und
...nk festgestellten Arm und den Unterarm einwirken. (Von den beiden möglichen Verhältnissen sowohl der
...sche Darstellung zur Verwendung gekommen, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner und dessen
...ders das entgegengesetzte Verhältniss angegeben ist, gehören zu dem Verhältniss $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$.)



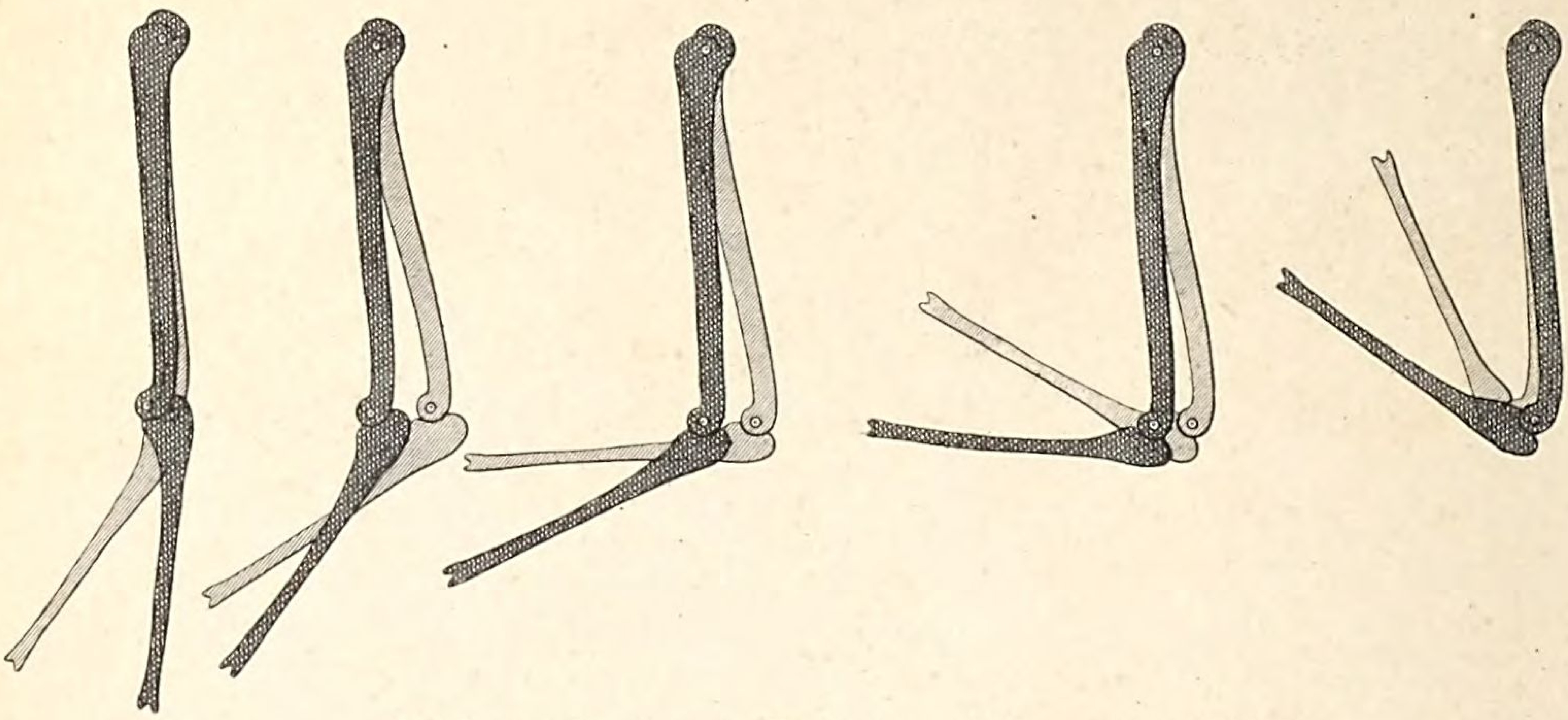

*Graphische Darstellung der Abhängigkeit des Verhältnisses der Drehungsmomente $D_1$, $D_2$ von dem Verhältniss der Winkelbeschleunigungen $\varphi_1''$, $\psi''$ und dem Beugungswinkel $\psi$ im Ellbogengelenk. (Die Ordinaten der durchbrochen gezeichneten Curven geben die Werthe des Verhältnisses $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ an.)*



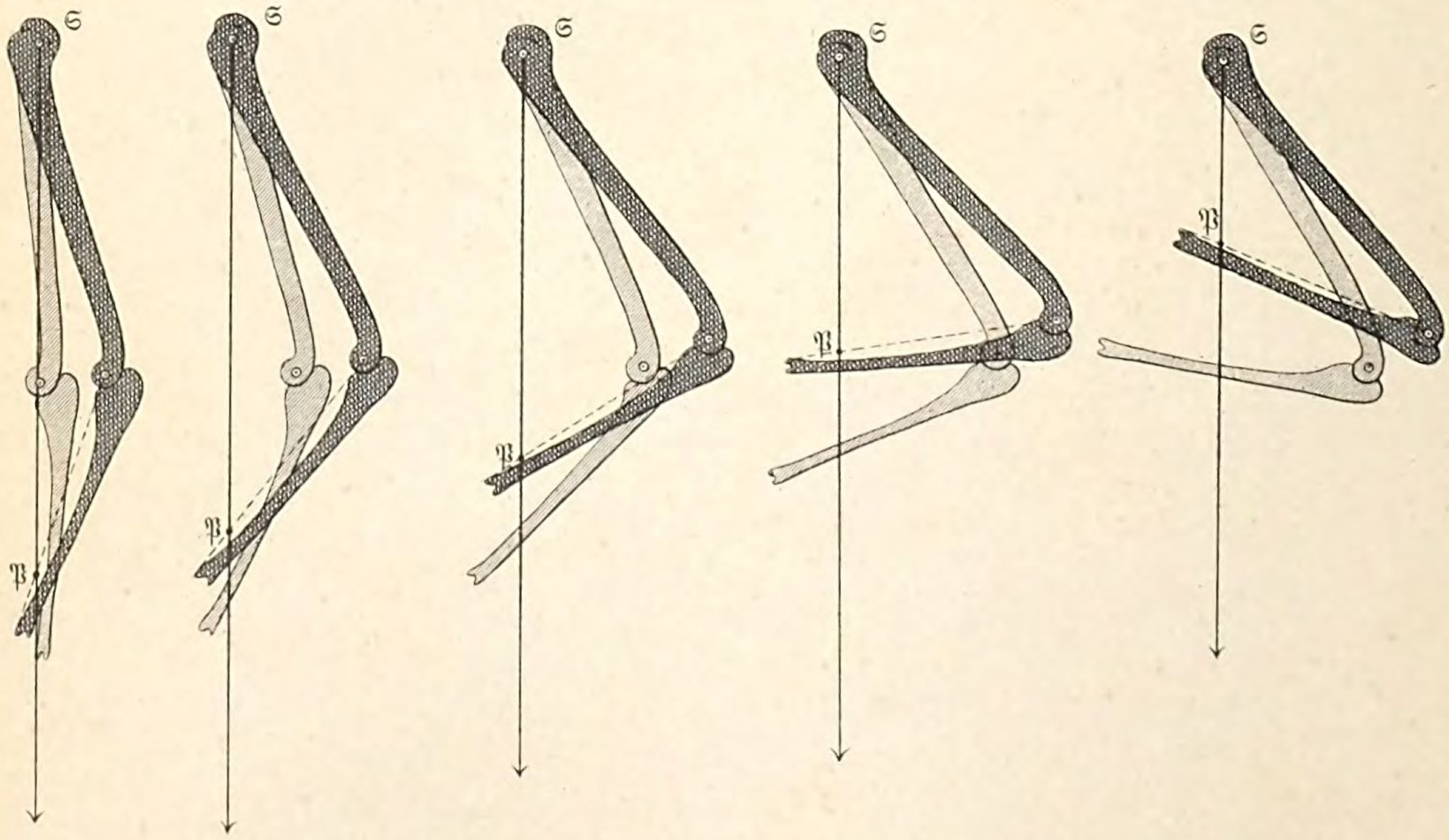

*Graphische Darstellung der Abhängigkeit des Verhältnisses der Drehungsmomente $D_0$, $D_2$ von dem Verhältniss der Winkelbeschleunigungen $\varphi_1''$, $\psi''$ und dem Beugungswinkel $\psi$ im Ellbogengelenk. (Die Ordinaten der durchbrochen gezeichneten Curven geben die Werthe des Verhältnisses $\frac{\psi''}{\varphi_1''}$ an.)*

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

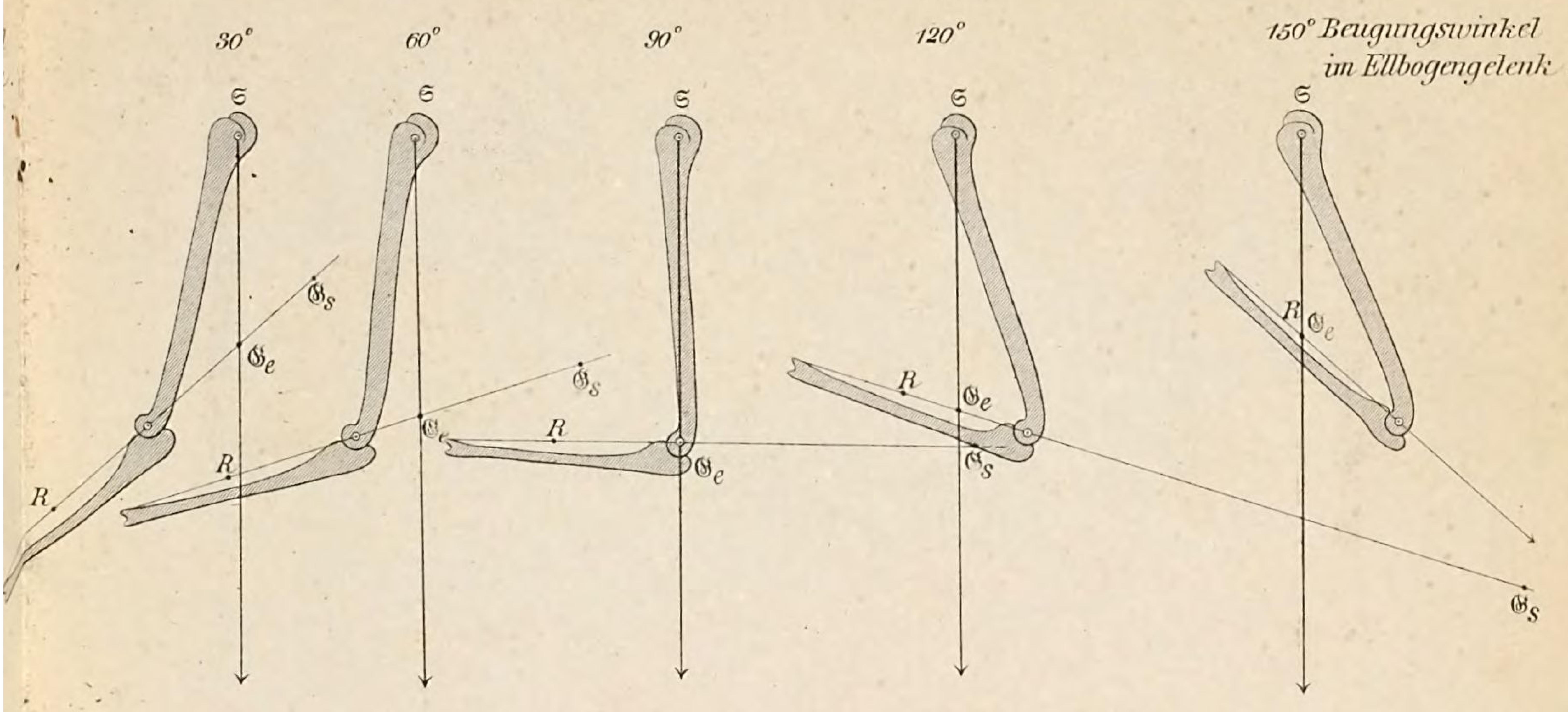
Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN



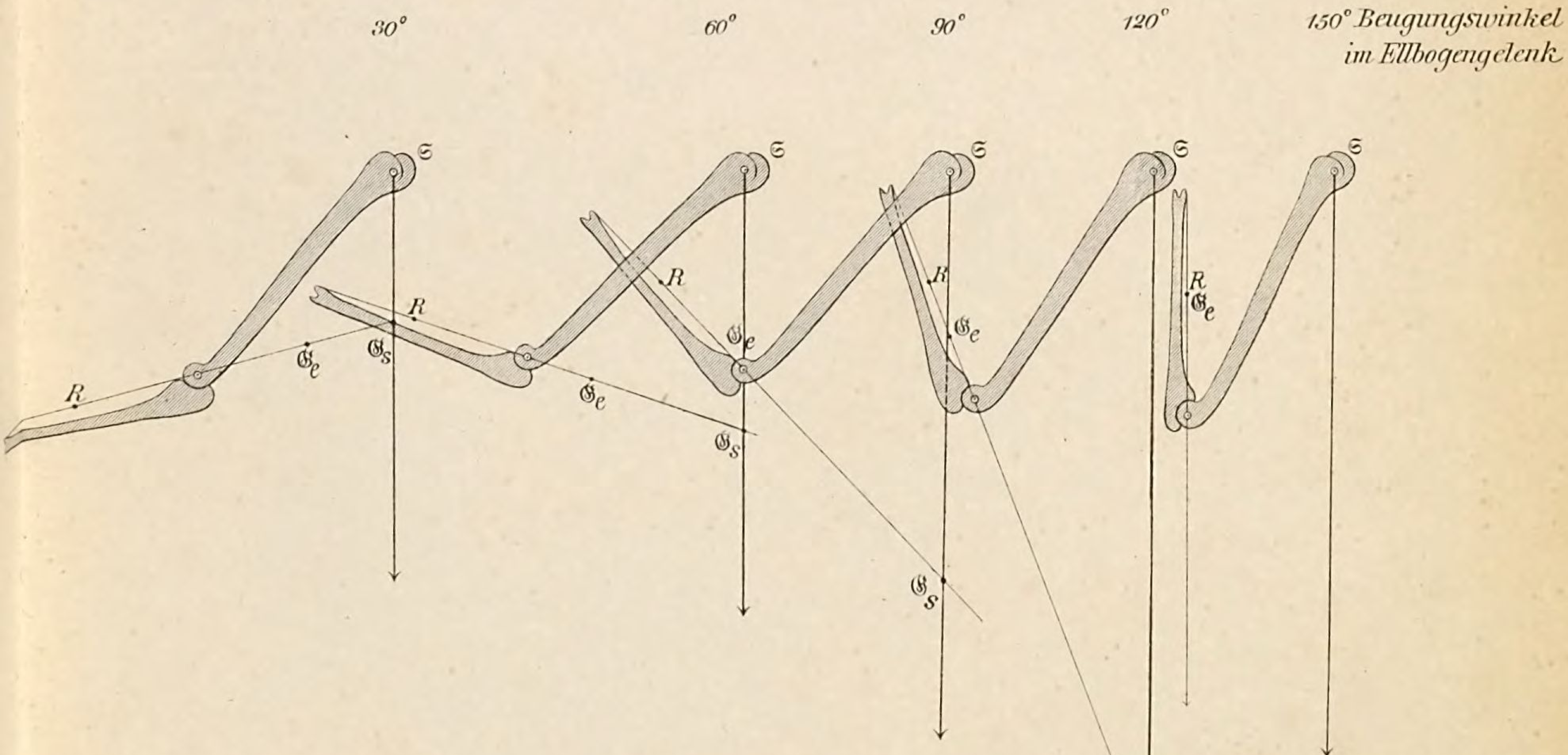

Wirkung des langen Kopfes vom M. biceps brachii bei verschiedenen Haltungen des Armes.




Einige Haltungen des Armes, in denen die Schwere das gleiche Drehungsverhältniss hervorbringt.
(Der Werth des constanten Drehungsverhältnisses ist 0,395)




*Haltungen des Armes, in denen die Schwere nur Drehung im Elbogengelenk hervorbringt.*




*Haltungen des Armes, in denen die Schwere nur Drehung im Schultergelenk hervorbringt.*

Lith. Anst. v. F. A. Funke, Leipzig.

Rap,

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Abhandlungen der Mathematisch-Physischen Klasse der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Bd.: 23. 1896/97 (1897)

Leipzig 1897

4 Acad. 78 fa,Math.phys.Kl.-23
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11788340-3